$\boxed{1}$

座標平面上に点 A $(-8,\ 0)$ をとる。また，不等式

$$x^2+y^2-4x-10y+4\leqq 0$$

の表す領域を D とする。

(1) 領域 D は，中心が点 $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$，半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円の $\boxed{\boxed{\text{エ}}}$ である。

$\boxed{\boxed{\text{エ}}}$ の解答群

⓪ 周	① 内部	② 外部
③ 周および内部	④ 周および外部	

以下，点 $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ を Q とし，方程式

$$x^2+y^2-4x-10y+4=0$$

の表す図形を C とする。

(2) 点 A を通る直線と領域 D が共有点をもつのはどのようなときかを考えよう。

(i) (1) により，直線 $y=\boxed{\text{オ}}$ は点 A を通る C の接線の一つとなることがわかる。

太郎さんと花子さんは点 A を通る C のもう一つの接線について話している。

点 A を通り，傾きが k の直線を ℓ とする。

> 太郎：直線 ℓ の方程式は $y=k(x+8)$ と表すことができるから，
> これを
> $$x^2+y^2-4x-10y+4=0$$
> に代入することで接線を求められそうだね。
>
> 花子：x 軸と直線 AQ のなす角のタンジェントに着目することでも
> 求められそうだよ。

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう。

$y=k(x+8)$ を $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ に代入すると，x についての 2 次方程式

$$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$$

が得られる。この方程式が $\boxed{\boxed{\text{カ}}}$ ときの k の値が接線の傾きとなる。

$\boxed{\boxed{\text{カ}}}$ の解答群

⓪	重解をもつ
①	異なる二つの実数解をもち，一つは0である
②	異なる二つの正の実数解をもつ
③	正の実数解と負の実数解をもつ
④	異なる二つの負の実数解をもつ
⑤	異なる二つの虚数解をもつ

(iii)　花子さんの求め方について考えてみよう。

x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であり，直線 $y=\boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きは $\tan\boxed{\text{ケ}}$ と表すことができる。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ θ	① 2θ	② $\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$
③ $\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$	④ $(\theta+\pi)$	⑤ $(\theta-\pi)$
⑥ $\left(2\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$	⑦ $\left(2\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$	

(iv)　点 A を通る C の接線のうち，直線 $y=\boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。

このとき，(ii) または (iii) の考え方を用いることにより

$$k_0=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であることがわかる。

直線 ℓ と領域 D が共有点をもつような k の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $k>k_0$	① $k\geqq k_0$
② $k<k_0$	③ $k\leqq k_0$
④ $0<k<k_0$	⑤ $0\leqq k\leqq k_0$

$\boxed{2}$

a，b は正の実数であり，$a \neq 1$，$b \neq 1$ を満たすとする。太郎さんは $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(1)　太郎さんは次のような考察をした。

まず，$\log_3 9 = \boxed{\text{ア}}$，$\log_9 3 = \dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}$ である。この場合

$$\log_3 9 > \log_9 3$$

が成り立つ。

一方，$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{イ}} = -\dfrac{3}{2}$，$\log_{\boxed{\text{イ}}} \dfrac{1}{4} = -\dfrac{2}{3}$ である。この場合

$$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{イ}} < \log_{\boxed{\text{イ}}} \frac{1}{4}$$

が成り立つ。

(2)　ここで

$$\log_a b = t \quad \cdots\cdots ①$$

とおく。

(1) の考察をもとにして，太郎さんは次の式が成り立つと推測し，それが正しいことを確かめることにした。

$$\log_b a = \frac{1}{t} \quad \cdots\cdots ②$$

① により，$\boxed{\boxed{\text{ウ}}}$ である。このことにより $\boxed{\boxed{\text{エ}}}$ が得られ，② が成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\boxed{\text{ウ}}}$ の解答群

⓪　$a^b = t$	①　$a^t = b$	②　$b^a = t$
③　$b^t = a$	④　$t^a = b$	⑤　$t^b = a$

$\boxed{\boxed{\text{エ}}}$ の解答群

⓪　$a = t^{\frac{1}{b}}$	①　$a = b^{\frac{1}{t}}$	②　$b = t^{\frac{1}{a}}$
③　$b = a^{\frac{1}{t}}$	④　$t = b^{\frac{1}{a}}$	⑤　$t = a^{\frac{1}{b}}$

(3)　次に，太郎さんは (2) の考察をもとにして

$$t > \frac{1}{t} \quad \cdots\cdots ③$$

を満たす実数 t ($t \neq 0$) の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t>0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2>1$ を得る。
このような t $(t>0)$ の値の範囲は $1<t$ である。
$t<0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2<1$ を得る。
このような t $(t<0)$ の値の範囲は $-1<t<0$ である。

この考察により，③ を満たす t $(t \fallingdotseq 0)$ の値の範囲は

$-1<t<0,\ 1<t$

であることがわかる。

ここで，a の値を一つ定めたとき，不等式

$\log_a b > \log_b a$ ……④

を満たす実数 b $(b>0,\ b \fallingdotseq 1)$ の値の範囲について考える。

④ を満たす b の値の範囲は，$a>1$ のときは $\boxed{\text{オ}}$ であり，$0<a<1$ のときは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $0<b<\dfrac{1}{a},\ 1<b<a$	① $0<b<\dfrac{1}{a},\ a<b$
② $\dfrac{1}{a}<b<1,\ 1<b<a$	③ $\dfrac{1}{a}<b<1,\ a<b$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $0<b<a,\ 1<b<\dfrac{1}{a}$	① $0<b<a,\ \dfrac{1}{a}<b$
② $a<b<1,\ 1<b<\dfrac{1}{a}$	③ $a<b<1,\ \dfrac{1}{a}<b$

(4) $p=\dfrac{12}{13},\ q=\dfrac{12}{11},\ r=\dfrac{14}{13}$ とする。

次の ⓪ ～ ③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$
② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$

3

a を実数とし，$f(x)=x^3-6ax+16$ とおく。

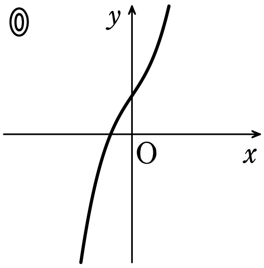
(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形は

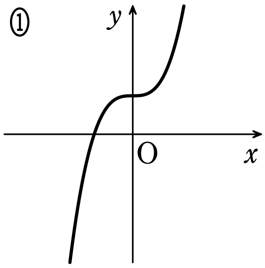
　　$a=0$ のとき，$\boxed{\text{ア}}$

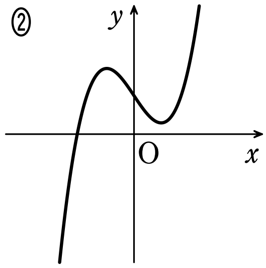
　　$a<0$ のとき，$\boxed{\text{イ}}$

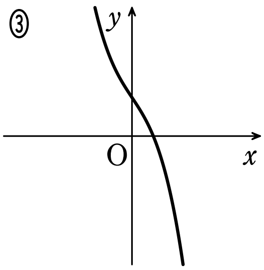
である。

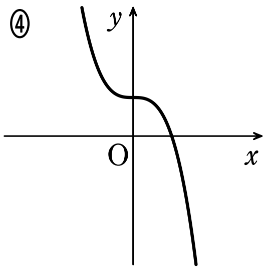
$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

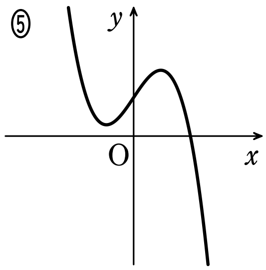
⓪


①


②


③


④


⑤


(2)　$a>0$ とし，p を実数とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}}<p<\boxed{\text{エ}}$ である。

$p=\boxed{\text{ウ}}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ は 2 個の共有点をもつ。それらの x 座標を q，r $(q<r)$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が点 $(r,\ p)$ で接することに注意すると

$$q=\boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,a^{\frac{1}{2}},\quad r=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,a^{\frac{1}{2}}$$

と表せる。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$2\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$	①　$-2\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$
②　$4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$	③　$-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$
④　$8\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$	⑤　$-8\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

(3)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数を n とする。次の ⓪ ～ ⑤ のうち，正しいも

のは $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$ ， $\boxed{\text{コ}}$ の解答群（解答の順序は問わない。）

⓪ $n=1$ ならば $a<0$	① $a<0$ ならば $n=1$
② $n=2$ ならば $a<0$	③ $a<0$ ならば $n=2$
④ $n=3$ ならば $a>0$	⑤ $a>0$ ならば $n=3$

$\boxed{4}$

$b>0$ とし，$g(x)=x^3-3bx+3b^2$，$h(x)=x^3-x^2+b^2$ とおく。座標平面上の曲線 $y=g(x)$ を C_1，曲線 $y=h(x)$ を C_2 とする。

C_1 と C_2 は2点で交わる。これらの交点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，

$\alpha=\boxed{\text{ア}}$，$\beta=\boxed{\text{イウ}}$ である。

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また，$t>\beta$ とし，$\beta \leqq x \leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を T とする。

このとき

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\boxed{\boxed{\text{エ}}}\,dx$$

$$T=\int_{\beta}^{t}\boxed{\boxed{\text{オ}}}\,dx$$

$$S-T=\int_{\alpha}^{t}\boxed{\boxed{\text{カ}}}\,dx$$

であるので

$$S-T=\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(2t^3-\boxed{\text{コ}}\,bt^2+\boxed{\text{サシ}}\,b^2t-\boxed{\text{ス}}\,b^3\right)$$

が得られる。

したがって，$S=T$ となるのは $t=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}b$ のときである。

$\boxed{\boxed{\text{エ}}}$ ～ $\boxed{\boxed{\text{カ}}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪	$\{g(x)+h(x)\}$	①	$\{g(x)-h(x)\}$
②	$\{h(x)-g(x)\}$	③	$\{2g(x)+2h(x)\}$
④	$\{2g(x)-2h(x)\}$	⑤	$\{2h(x)-2g(x)\}$
⑥	$2g(x)$	⑦	$2h(x)$

$\boxed{5}$

(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ。

$\boxed{6}$

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，……，X_n とする。

(1) X_1，X_2，……，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) X_1，X_2，……，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3) X_1，X_2，……，X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

$\boxed{7}$

O を原点とする座標平面において，放物線 $y=x^2-2x+4$ のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して，直線 ℓ：$y=ax$ を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点 A と ℓ 上の点 B で，3 点 O，A，B が正三角形の 3 頂点となるものがある。