1

解答　$\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$

解説

$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

よって　$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

2

解答　$\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

$$\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}=\int_1^4\frac{dx}{(x-1)^2+3}$$

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$1 \longrightarrow 4$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}=\int_1^4\frac{dx}{(x-1)^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

3

解答　$\dfrac{1}{24}\log 3+\dfrac{\sqrt{3}}{72}\pi$

解説

$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$ から

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{a}{x+2}+\frac{bx+c}{x^2-2x+4}$$

とおいて，両辺に $(x+2)(x^2-2x+4)$ を掛けると

$$1=a(x^2-2x+4)+(bx+c)(x+2)$$

これを整理して

$$(a+b)x^2+(2b+c-2a)x+4a+2c-1=0$$

これが x の恒等式であるから

$$a+b=0,\ 2b+c-2a=0,\ 4a+2c-1=0$$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{12}$，$b=-\dfrac{1}{12}$，$c=\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{x-4}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+4}+\frac{3}{x^2-2x+4}\right)$$

よって　$$\int_0^1\frac{1}{x^3+8}dx=\frac{1}{12}\int_0^1\frac{1}{x+2}dx-\frac{1}{24}\int_0^1\frac{(x^2-2x+4)'}{x^2-2x+4}dx$$

$$+\frac{1}{12}\int_0^1\frac{3}{x^2-2x+4}dx\ \cdots\cdots①$$

また　$$\int_0^1\frac{3}{x^2-2x+4}dx=\int_0^1\frac{3}{(x-1)^2+3}dx$$

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ であるから

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$-\dfrac{\pi}{6} \longrightarrow 0$

$$\int_0^1\frac{3}{x^2-2x+4}dx=\int_0^1\frac{3}{(x-1)^2+3}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 d\theta=\sqrt{3}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^0=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

ゆえに，① から

$$\int_0^1\frac{1}{x^3+8}dx=\frac{1}{12}\Big[\log(x+2)\Big]_0^1-\frac{1}{24}\Big[\log(x^2-2x+4)\Big]_0^1+\frac{1}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

$$=\frac{1}{12}(\log 3-\log 2)-\frac{1}{24}(\log 3-2\log 2)+\frac{\sqrt{3}}{72}\pi$$

$$=\frac{1}{24}\log 3+\frac{\sqrt{3}}{72}\pi$$

4

解答　$\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解説

$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos\theta)\cdot 2\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=2\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5

解答　(1)　$I_0=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2}$　　(2)　$I_n=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$　　(3)　$I_4=\dfrac{1}{4}e^2-\dfrac{3}{4}$

解説

(1)　$I_0=\displaystyle\int_0^1 e^{2x}dx=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$

(2)　$I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{2x}dx=\Big[\frac{1}{2}x^n e^{2x}\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 nx^{n-1}e^{2x}dx$

よって　$I_n=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$

(3)　(2) を繰り返し使って，また，(1) の I_0 も使って

$$I_4=\frac{1}{2}e^2-\frac{4}{2}I_3=\frac{1}{2}e^2-2\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}I_2\right)=-\frac{1}{2}e^2+3\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{2}{2}I_1\right)$$

$$=e^2-3\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}I_0\right)=-\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}$$

6

解答　(1)　$I_0=\dfrac{\pi}{2}$，$I_1=1$，$I_2=\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$　　(3)　$I_{12}=\dfrac{231}{2048}\pi$

解説

(1)　$I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$，$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[x+\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot(\sin x)'dx$$

$$=\Big[\cos^{n-1}x\cdot\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\sin x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\cdot(1-\cos^2 x)dx$$

$$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\right)=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

したがって　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

(3)　(2) の結果を用いると

$$I_5=\frac{4}{5}I_3=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{8}{15}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{15}$$

$$I_{12}=\frac{11}{12}I_{10}=\frac{11}{12}\cdot\frac{9}{10}I_8=\cdots\cdots=\frac{11}{12}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0=\frac{231}{1024}I_0$$

(1) より $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$I_{12}=\dfrac{231}{1024}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{231}{2048}\pi$

7

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{\pi}{4}$

解説

(1)　$t=a+b-x$ とおくと　$dx=(-1)dt$

x	$a \longrightarrow b$
t	$b \longrightarrow a$

よって　$\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx=\int_b^a f(t)\cdot(-1)dt=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$

(2)　(1) から　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ とおくと，

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

よって　$I=\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{6}$　　(2)　$\dfrac{\pi}{18}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{2}}{72}\pi$

解説

(1)　$x=2\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \longrightarrow 2\sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+4}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{4(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$$

(2)　$x=3\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$\sqrt{3} \longrightarrow 3\sqrt{3}$
θ	$\dfrac{\pi}{6} \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+9}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{18}$$

(3)　$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{3x^2+6}=\frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{x^2+2}$$

$x=\sqrt{2}\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{6}$
θ	$\dfrac{\pi}{4} \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{3x^2+6}=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{72}\pi$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$\dfrac{\pi}{3}$　　(3)　$\dfrac{\pi}{8}$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

(1)　$x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

$x-1=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$1 \longrightarrow 2$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

よって　$$\int_1^2\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(2)　$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

$x-2=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$2 \longrightarrow \sqrt{3}+2$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_2^{\sqrt{3}+2}\frac{dx}{x^2-4x+5}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

(3)　$x^2+2x+5=(x+1)^2+4$

$x+1=2\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$-1 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

よって　$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int_{-1}^1\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$

(4)　$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ であるから，

$x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\dfrac{\pi}{6} \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sqrt{3}}{3}d\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

$\boxed{3}$

解答　$\dfrac{1}{3}\log 2+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であるから，$\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ とおいて，分母を払うと　　$1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$

整理して　　$(a+b)x^2+(b+c-a)x+a+c=1$

これが x の恒等式であるから　　$a+b=0$，$b+c-a=0$，$a+c=1$

これを解いて　　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{2}{3}$

よって　$$\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

ここで　$$\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\Big[\log(x+1)\Big]_0^1=\log 2$$

次に，$I=\displaystyle\int_0^1\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$ とすると　　$I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{3}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$

I の第１項の積分について

$$\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx=\Big[\log(x^2-x+1)\Big]_0^1=0$$

I の第２項について，$J=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$ とする。

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ であるから，$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$

とおくと　　$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

x と θ の対応は右のようになる。

ゆえに　$J=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

よって　$\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\log 2-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\right)=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

4

解答　(1)　$\frac{3}{4}\pi$　　(2)　$\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(3)　$\frac{\pi}{3}$

解説

(1)　$x=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと　　$dx=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

また，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{3-x^2}=\sqrt{3-3\sin^2\theta}=\sqrt{3}\cos\theta$

よって　$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}\cos\theta)\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$

$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=\frac{3}{2}\Big[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}\pi$

(2)　$x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　　$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

また，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2-2\sin^2\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

よって　$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}\cos\theta)\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$=\Big[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

(3)　$x=2\sin\theta$ とおくと　　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$-1 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

また，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\cos\theta$

よって　$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}$

5

解答　(1)　$\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}$　　(2)　$\frac{1}{3}e^3-\frac{n}{3}I_{n-1}$　　(3)　$\frac{4}{27}e^3+\frac{2}{27}$

解説

(1)　$I_0=\int_0^1 e^{3x}dx=\Big[\frac{1}{3}e^{3x}\Big]_0^1=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}$

(2)　$I_n=\int_0^1 x^n e^{3x}dx=\Big[\frac{1}{3}x^n e^{3x}\Big]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}e^{3x}\cdot nx^{n-1}dx$

$=\frac{1}{3}e^3-\frac{n}{3}\int_0^1 x^{n-1}e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^3-\frac{n}{3}I_{n-1}$

(3)　(1)，(2) の結果から

$I_1=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}I_0=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$

$I_2=\frac{1}{3}e^3-\frac{2}{3}I_1=\frac{1}{3}e^3-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}$

$I_3=\frac{1}{3}e^3-I_2=\frac{1}{3}e^3-\left(\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}\right)=\frac{4}{27}e^3+\frac{2}{27}$

6

解答　(ア)　$\frac{\pi}{4}$　　(イ)　$\frac{n+1}{n+2}$　　(ウ)　$\frac{35}{256}\pi$

解説

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}={}^{ア}\frac{\pi}{4}$

$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin^{n+1}x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)'\sin^{n+1}x\,dx=\Big[-\cos x\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^n x\,dx$

$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^n x\,dx$

$=(n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx\right)=(n+1)(I_n-I_{n+2})$

すなわち　　$I_{n+2}=(n+1)(I_n-I_{n+2})$

よって　　$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$

$n+2\neq 0$ であるから　　$I_{n+2}={}^{イ}\frac{n+1}{n+2}I_n$

したがって　　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\,dx=I_8=\frac{7}{8}I_6=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}I_4=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2$

$=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}={}^{ウ}\frac{35}{256}\pi$

7

解答　(1)　略　　(2)　$\frac{a}{2}$

解説

(1)　$a-x=t$ とおくと　　$x=a-t$

ゆえに　　$dx=-dt$　　　x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow a$
t	$a \longrightarrow 0$

よって　　(右辺)$=\int_0^a f(a-x)dx=\int_a^0 f(t)(-dt)=\int_0^a f(t)dt$

$=\int_0^a f(x)dx=$(左辺)

(2)　$I=\int_0^a\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}dx$ とし，$f(x)=\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}$ とする。

(1) の等式 $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ から　　$I=\int_0^a f(a-x)dx$

また　　$f(x)+f(a-x)=\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}+\frac{e^{a-x}}{e^{a-x}+e^x}$

ゆえに　　$f(x)+f(a-x)=1$

よって　　$\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a dx$

ゆえに　　$I+I=a$　　　したがって　　$I=\frac{a}{2}$

1

解答　(1) $\log 2+\dfrac{\pi}{12}$　(2) $\dfrac{\pi+2}{8a^3}$　(3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{8}$　(4) $\dfrac{\pi}{48}-\dfrac{\sqrt{3}}{64}$　(5) $\dfrac{\pi}{4}$

(6) $-\dfrac{\pi}{6}$

解説

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{x^2+1}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx$

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\Big[\log(x^2+1)\Big]_1^{\sqrt{3}}$

$=\log 2$

また，$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1\ \longrightarrow\ \sqrt{3}$
θ	$\dfrac{\pi}{4}\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{3}$

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi}{12}$

したがって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{x^2+1}dx=\log 2+\frac{\pi}{12}$

(2) $x=a\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\ \longrightarrow\ a$
θ	$0\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{4}$

$\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^4(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}d\theta=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2a^3}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{8a^3}$

(3) $x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$

$\displaystyle\int_0^1\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\theta+1}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta+1)\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2\theta+1+\cos 2\theta)d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$

(4) $x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow\dfrac{1}{2}$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{6}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin\theta\cos\theta)^2d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 2\theta\,d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{8}\Big[\theta-\frac{\sin 4\theta}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{8}\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\sin\frac{2}{3}\pi\Big)$

$\displaystyle=\frac{1}{8}\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\Big)=\frac{\pi}{48}-\frac{\sqrt{3}}{64}$

(5) $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(1-x)^2}$

$1-x=\sin\theta$ とおくと　$dx=-\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\ \longrightarrow\ 1$
θ	$\dfrac{\pi}{2}\ \longrightarrow\ 0$

この範囲において $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$

よって　$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos\theta\cdot(-\cos\theta)d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

(6) $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(1-x)^2}$

$1-x=\sin\theta$ とおくと　$dx=-\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$1\ \longrightarrow\ \dfrac{1}{2}$
θ	$0\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{6}$

この範囲において $\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$

よって

$\displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{-\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-1)d\theta=\Big[-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{\pi}{6}$

2

解答　(ア) 1　(イ) 4　(ウ) $\dfrac{\sqrt{3}}{18}\pi$　(エ) $\log 3+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

$\dfrac{28}{(4-x^2)(x^2+3)}=\dfrac{a}{x+2}-\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x^2+3}$　……① とする。

① の両辺に $(4-x^2)(x^2+3)$ を掛けると

$28=a(2-x)(x^2+3)+a(x+2)(x^2+3)+b(4-x^2)$

右辺を展開して整理すると　$28=(4a-b)x^2+12a+4b$

これが x についての恒等式であるから　$4a-b=0$，$12a+4b=28$

これを解くと　$a={}^{ア}1$，$b={}^{イ}4$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx$ において，$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{6}$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}={}^{ウ}\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$

したがって　$\displaystyle\int_0^1\frac{28}{(4-x^2)(x^2+3)}dx=\int_0^1\Big(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x^2+3}\Big)dx$

$\displaystyle=\Big[\log|x+2|-\log|x-2|\Big]_0^1+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$

$\displaystyle={}^{エ}\log 3+\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

3

解答　(1) ① 1　② $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$　③ $9e-24$

(2) ① $I_1=\dfrac{1}{2}\log 2$，$I_2=1-\dfrac{\pi}{4}$　② $I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$　③ $\dfrac{13}{15}-\dfrac{\pi}{4}$

解説

(1) ① $\displaystyle I_1=\int_1^e\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^e=1$

② $\displaystyle I_{n+1}=\int_1^e(\log x)^{n+1}dx=\int_1^e(x)'(\log x)^{n+1}dx$

$\displaystyle=\Big[x(\log x)^{n+1}\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=e-(n+1)\int_1^e(\log x)^n dx$

よって　$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

③ (2)から　$I_2=e-2I_1=e-2$

$I_3=e-3I_2=e-3(e-2)=-2e+6$

よって　$I_4=e-4I_3=e-4(-2e+6)=9e-24$

(2) ① $\displaystyle I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\Big[-\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log 2$

$\displaystyle I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\frac{1}{\cos^2 x}-1\Big)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

② $\displaystyle I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\Big(\frac{1}{\cos^2 x}-1\Big)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot(\tan x)'dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$

$\displaystyle=\Big[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n=\frac{1}{n+1}-I_n$

③ ①，② から　$\displaystyle I_6=\frac{1}{5}-I_4=\frac{1}{5}-\Big(\frac{1}{3}-I_2\Big)=-\frac{2}{15}+1-\frac{\pi}{4}=\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}$

4

解答　(1) 略　(2) $I_5=\dfrac{5}{32}\pi$

解説

(1) $\displaystyle I_{n+2}=\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n+2}dx$

$x=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\geqq0$ であるから

x	$0\to1$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{2}$

$$I_{n+2}=\int_0^1(\sqrt{1-x^2})^{n+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+3}\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\cos^{n+2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

$$=(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}\theta(1-\cos^2\theta)d\theta$$

$$=(n+2)(I_n-I_{n+2})$$

よって　　$(n+3)I_{n+2}=(n+2)I_n$　　　　ゆえに　　$I_{n+2}=\dfrac{n+2}{n+3}I_n$

(2)　(1) より　　$I_5=\dfrac{5}{6}I_3=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{4}I_1$

$I_1=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は半径１の四分円の面積を表すから　　$I_1=\dfrac{\pi}{4}$

したがって　　$I_5=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{32}\pi$

5

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　右辺$=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(-x)\,dx$

$-x=t$ とおくと　　$-dx=dt$

x	$0\ \to\ a$
t	$0\ \to\ -a$

よって　　$\displaystyle\int_0^a f(-x)\,dx=\int_0^{-a}f(t)\cdot(-1)dt$

$$=\int_{-a}^0 f(t)\,dt=\int_{-a}^0 f(x)\,dx$$

ゆえに　　右辺$=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx+\int_{-a}^0 f(x)\,dx=\int_{-a}^a f(x)\,dx=$左辺

(2)　右辺$=\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)\,dx+\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)\,dx$

$a-x=t$ とおくと　　$-dx=dt$

x	$0\ \to\ \dfrac{a}{2}$
t	$a\ \to\ \dfrac{a}{2}$

よって　　$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)\,dx=\int_a^{\frac{a}{2}}f(t)\cdot(-1)dt$

$$=\int_{\frac{a}{2}}^a f(t)\,dt=\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\,dx$$

ゆえに　　右辺$=\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)\,dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx=$左辺

(3)　左辺$=\displaystyle\int_{a-b}^a f(x)\,dx+\int_a^{a+b}f(x)\,dx$

$x=a+t$ とおくと　　$dx=dt$

x	$a-b\ \to\ a$
t	$-b\ \to\ 0$

よって　　$\displaystyle\int_{a-b}^a f(x)\,dx=\int_{-b}^0 f(a+t)\,dt=\int_{-b}^0 f(a-t)\,dt$

$a-t=x$ とおくと　　$-dt=dx$

t	$-b\ \to\ 0$
x	$a+b\ \to\ a$

よって　　$\displaystyle\int_{-b}^0 f(a-t)\,dt=\int_{a+b}^a f(x)\cdot(-1)\,dx=\int_a^{a+b}f(x)\,dx$

ゆえに　　左辺$=2\displaystyle\int_a^{a+b}f(x)\,dx=$右辺

6

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　略　　(3)　$\dfrac{\pi-1}{4}$

解説

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}(-1-1)=\frac{1}{2}$

(2)　$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ から　　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

ゆえに　　$I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-1)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\cos t+\sin t}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt$$

(3)　(2) は $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ とも書ける．

よって　　$2I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

ゆえに　　$I=\dfrac{\pi-1}{4}$

1

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$　　(2)　$\log(\sqrt{2}+1)$　　(3)　$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\dfrac{\pi}{12}$

解説

(1)　$\dfrac{1}{\cos^2 x}=(\tan x)'$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\tan x)'dx=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\Big[\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}-\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\Big[\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=\log(\sqrt{2}+1)$$

(3)　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\log(1+x^2)\,dx$

$$=\frac{1}{2}\left\{\Big[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\Big]_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1\ \to\ \sqrt{3}$
θ	$\dfrac{\pi}{4}\ \to\ \dfrac{\pi}{3}$

よって　　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$

したがって　　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\frac{\pi}{12}$

2

解答　$\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{2}(\log 3-\log 2)$

解説

$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$ とおく。$t=e^x$ とおくと，$x=\log t$ であるから

$dx=\dfrac{1}{t}dt$

x	$0\ \to\ \dfrac{\log 3}{2}$
t	$1\ \to\ \sqrt{3}$

よって　$I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt$

ここで $\frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}=\frac{at+b}{t^2+1}+\frac{c}{t}$ とおく。

両辺に $(t^2+1)t$ を掛けると　$t+1=(at+b)t+c(t^2+1)$

右辺を整理すると　$t+1=(a+c)t^2+bt+c$

この式が t の恒等式であるから　$a+c=0$，$b=1$，$c=1$

よって　$a=-1$

したがって　$I=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{-t+1}{t^2+1}+\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2+1}+\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt$$

t	$1\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

第１項で $t=\tan\theta$ とおくと　$dt=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

よって　$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta+\left[\log t-\frac{1}{2}\log(t^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}}$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta+\log\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log 4+\frac{1}{2}\log 2=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}(\log 3-\log 2)$$

3

解答　(1)　$(x+1)(x+2)(x^2-x+1)$　　(2)　(ア)　$\log\frac{2(a+1)}{2a+1}$　　(イ)　$\frac{2\sqrt{3}}{9a}\pi$

(3)　$\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi-\log\frac{4}{3}$

解説

(1)　$x^4+2x^3+x+2=x^3(x+2)+x+2=(x^3+1)(x+2)=(x+1)(x+2)(x^2-x+1)$

(2)　(ア)　$\int_0^a\frac{dx}{(x+a)(x+a+1)}=\int_0^a\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+a+1}\right)dx$

$$=\Big[\log|x+a|-\log|x+a+1|\Big]_0^a$$

$$=\log 2a-\log(2a+1)-\log a+\log(a+1)$$

$$=\log\frac{2a(a+1)}{a(2a+1)}=\log\frac{2(a+1)}{2a+1}$$

(イ)　$\int_0^a\frac{dx}{x^2-ax+a^2}=\int_0^a\frac{dx}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2}$

$x-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{\sqrt{3}a}{2\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow a$
θ	$-\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

よって　$\int_0^a\frac{dx}{x^2-ax+a^2}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}a^2(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3a}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3a}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9a}\pi$$

(3)　(1) から　$\frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2}=\frac{4x+1}{(x+1)(x+2)(x^2-x+1)}=\frac{x^2+3x+2-(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)(x^2-x+1)}$

$$=\frac{(x+1)(x+2)-(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

ここで，(2) の結果に $a=1$ を代入して

$$\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\log\frac{4}{3}$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

したがって　$\int_0^1\frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2}dx=\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}-\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi-\log\frac{4}{3}$$

4

解答　$\frac{a}{2}-b$

解説

$I=\int_{\frac{a}{2}}^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$ とおく。

x	$\frac{a}{2}\longrightarrow a$
t	$\frac{a}{2}\longrightarrow 0$

$a-x=t$ とおくと　$-dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

よって　$I=\int_{\frac{a}{2}}^0\frac{f(a-t)}{f(a-t)+f(t)}\cdot(-1)dt$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(a-t)}{f(t)+f(a-t)}dt=\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{1-\frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}\right\}dt$$

$$=\Big[t\Big]_0^{\frac{a}{2}}-\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}dt=\frac{a}{2}-b$$

1

解答　$f'(x)=\sin 2x$

解説

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\sin 2t\,dt=\sin 2x$$

2

解答　$\frac{x^2-x}{\log x}$

解説

$\frac{1}{\log t}$ の原始関数を $F(t)$ とすると

$$\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\log t}dt=F(x^3)-F(x^2),\qquad F'(t)=\frac{1}{\log t}$$

よって　$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\log t}dt=F'(x^3)(x^3)'-F'(x^2)(x^2)'$

$$=\frac{3x^2}{\log x^3}-\frac{2x}{\log x^2}=\frac{x^2}{\log x}-\frac{x}{\log x}=\frac{x^2-x}{\log x}$$

別解　$f'(x)=\frac{1}{\log x^3}\cdot(x^3)'-\frac{1}{\log x^2}\cdot(x^2)'=\frac{3x^2}{3\log x}-\frac{2x}{2\log x}=\frac{x^2-x}{\log x}$

3

解答　$\cos x-1$

解説

$$f(x)=\int_0^x(t-x)\sin t\,dt=\int_0^x t\sin t\,dt-x\int_0^x\sin t\,dt$$

よって　$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x t\sin t\,dt-\left\{(x)'\int_0^x\sin t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x\sin t\,dt\right)\right\}$

$$=x\sin x-\left(\int_0^x\sin t\,dt+x\sin x\right)=\Big[\cos t\Big]_0^x=\cos x-1$$

4

解答　$f(x)=\sin x-\frac{3}{4}$

解説

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt=a$ とおくと　$f(x)=\sin x+3a$　……①

よって　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+3a)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t+3a\cos t)dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+3a\cos t\right)dt=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t+3a\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+3a$$

ゆえに　$\frac{1}{2}+3a=a$　　これを解くと　$a=-\frac{1}{4}$

これを ① に代入して　$f(x)=\sin x-\frac{3}{4}$

$\boxed{5}$

解答　$f(x)=\dfrac{2\pi}{\pi^2+4}\sin x+\dfrac{4}{\pi^2+4}\cos x$

解説

$f(x)=\cos x+\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin x\cos t-\cos x\sin t)f(t)\,dt$

$\quad=\cos x+\sin x\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt$

$\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,dt=a$，$\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt=b$（$a$，$b$ は定数）とおくと

$$f(x)=\cos x+a\sin x-b\cos x$$
$$=a\sin x+(1-b)\cos x \quad\cdots\cdots①$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,dt=\int_0^{\pi}\{a\sin t\cos t+(1-b)\cos^2 t\}dt$

$$=\int_0^{\pi}\left\{\frac{a}{2}\sin 2t+(1-b)\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\right\}dt$$
$$=\left[-\frac{a}{4}\cos 2t+\frac{1-b}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$=-\frac{a}{4}(1-1)+\frac{1-b}{2}\pi=\frac{\pi}{2}(1-b)$$

ゆえに　$a=\dfrac{\pi}{2}(1-b)$　$\cdots\cdots②$

また　$\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt=\int_0^{\pi}\{a\sin^2 t+(1-b)\sin t\cos t\}dt$

$$=\int_0^{\pi}\left(a\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+\frac{1-b}{2}\sin 2t\right)dt$$
$$=\left[\frac{a}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)-\frac{1-b}{4}\cos 2t\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{a}{2}\pi-\frac{1-b}{4}(1-1)=\frac{\pi}{2}a$$

ゆえに　$b=\dfrac{\pi}{2}a$　$\cdots\cdots③$

③ を ② に代入して　$a=\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{2}a\right)$

よって　$a=\dfrac{2\pi}{\pi^2+4}$　　これを ③ に代入して　$b=\dfrac{\pi^2}{\pi^2+4}$

求めた a，b の値を ① に代入して　$f(x)=\dfrac{2\pi}{\pi^2+4}\sin x+\left(1-\dfrac{\pi^2}{\pi^2+4}\right)\cos x$

すなわち　$f(x)=\dfrac{2\pi}{\pi^2+4}\sin x+\dfrac{4}{\pi^2+4}\cos x$

$\boxed{6}$

解答　$t=e$ のとき最大値 1，$t=\sqrt{e}$ のとき最小値 $e-2\sqrt{e}+1$

解説

$e^x-t=0$ とすると　$x=\log t$

$1\leqq t\leqq e$ であるから　$0\leqq\log t\leqq 1$

ゆえに　$0\leqq x\leqq\log t$ のとき　$|e^x-t|=-(e^x-t)$，

$\log t\leqq x\leqq 1$ のとき　$|e^x-t|=e^x-t$

よって　$S(t)=\displaystyle\int_0^{\log t}\{-(e^x-t)\}dx+\int_{\log t}^{1}(e^x-t)dx=-\Big[e^x-tx\Big]_0^{\log t}+\Big[e^x-tx\Big]_{\log t}^{1}$

$$=-2(e^{\log t}-t\log t)+1+e-t$$
$$=-2t+2t\log t+1+e-t$$
$$=2t\log t-3t+e+1$$

ゆえに　$S'(t)=2\log t+2t\cdot\dfrac{1}{t}-3=2\log t-1$

$S'(t)=0$ とすると　$\log t=\dfrac{1}{2}$

よって　$t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$1\leqq t\leqq e$ における $S(t)$ の増減表は右のようになる。

t	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$e-2$	↘	極小	↗	1

ここで　$e-2<1$，

$$S(\sqrt{e})=2\sqrt{e}\log\sqrt{e}-3\sqrt{e}+e+1=e-2\sqrt{e}+1$$

したがって，$S(t)$ は $t=e$ のとき最大値 1，

$t=\sqrt{e}$ のとき最小値 $e-2\sqrt{e}+1$ をとる。

$\boxed{7}$

解答　$\dfrac{1}{2}$

解説

$f(t)=\dfrac{\cos t}{1+\cos t}$ とおき，$f(t)$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とすると

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\cos t}{1+\cos t}dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=f(0)=\frac{1}{2}$$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{x+1}$　　(2)　e^{3x}　　(3)　$-\sin 2x$

解説

(1)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t+1}dt=\frac{1}{x+1}$

(2)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^x e^{3t}dt=e^{3x}$

(3)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^a\sin 2t\,dt=-\frac{d}{dx}\int_a^x\sin 2t\,dt=-\sin 2x$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$f'(x)=2\left(xe^{x^2}\cos x^2-e^{2x}\cos 2x\right)$

(2)　$f'(x)=(1+x)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)$

解説

(1)　$e^t\cos t$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とすると　$F'(t)=e^t\cos t$

また　$f(x)=\displaystyle\int_{2x}^{x^2}e^t\cos t\,dt=F(x^2)-F(2x)$

よって　$f'(x)=F'(x^2)\cdot 2x-F'(2x)\cdot 2$

$$=\left(e^{x^2}\cos x^2\right)\cdot 2x-\left(e^{2x}\cos 2x\right)\cdot 2$$
$$=2\left(xe^{x^2}\cos x^2-e^{2x}\cos 2x\right)$$

(2)　$t\log t$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とすると　$F'(t)=t\log t$

また　$f(x)=\displaystyle\int_{1-x}^{1+x}t\log t\,dt=F(1+x)-F(1-x)$

よって　$f'(x)=F'(1+x)\cdot 1-F'(1-x)\cdot(-1)$

$$=(1+x)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$f'(x)=(2x+1)e^x-e$　　(2)　$f'(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$

解説

(1)　$f(x)=x\displaystyle\int_1^x e^t dt+\int_1^x te^t dt$

よって　$f'(x)=(x)'\displaystyle\int_1^x e^t dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_1^x e^t dt\right)+\frac{d}{dx}\int_1^x te^t dt$

$$=\int_1^x e^t dt+xe^x+xe^x=\Big[e^t\Big]_1^x+2xe^x=(2x+1)e^x-e$$

(2)　$f(x)=x\displaystyle\int_0^x\cos^2 t\,dt-\int_0^x t\cos^2 t\,dt$

よって　$f'(x)=(x)'\displaystyle\int_0^x\cos^2 t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x\cos^2 t\,dt\right)-\frac{d}{dx}\int_0^x t\cos^2 t\,dt$

$$=\int_0^x\cos^2 t\,dt+x\cos^2 x-x\cos^2 x=\int_0^x\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$f(x)=e^x-\dfrac{e-1}{2}$　　(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}$　　(3)　$f(x)=2x+4$

解説

(1) $\int_0^1 f(t)dt=a$（a は定数）とおくと　$f(x)=e^x-a$ ……①

よって　$\int_0^1(e^t-a)dt=\Big[e^t-at\Big]_0^1=e-a-1$

ゆえに，$a=e-a-1$ から　$a=\dfrac{e-1}{2}$

これを①に代入して　$f(x)=e^x-\dfrac{e-1}{2}$

(2) $\int_1^3 tf(t)dt=a$（a は定数）とおくと　$f(x)=\dfrac{1}{x}+a$ ……①

よって　$\int_1^3 t\left(\dfrac{1}{t}+a\right)dt=\left[t+\dfrac{at^2}{2}\right]_1^3=2+4a$

ゆえに，$a=2+4a$ から　$a=-\dfrac{2}{3}$

これを①に代入して　$f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}$

(3) $\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=a$（$a$ は定数）とおくと　$f(x)=2x-a$ ……①

よって
$$\int_0^\pi(2t-a)\cos t\,dt=2\int_0^\pi t\cos t\,dt-a\int_0^\pi\cos t\,dt$$
$$=2\int_0^\pi t(\sin t)'dt-a\Big[\sin t\Big]_0^\pi$$
$$=2\Big[t\sin t\Big]_0^\pi-2\int_0^\pi\sin t\,dt$$
$$=2\Big[\cos t\Big]_0^\pi=-4$$

ゆえに　$a=-4$

これを①に代入して　$f(x)=2x+4$

$\boxed{5}$

解答　$f(x)=x-\dfrac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}\sin x+\dfrac{2\pi}{\pi^2+1}\cos x$

解説

$$f(x)=x+2\int_0^\pi f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$$
$$=x+2\sin x\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt-2\cos x\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$$

$2\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=A$，$-2\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=B$（$A$，$B$ は定数）とおくと，$f(x)$ は次のように表される。

$$f(x)=x+A\sin x+B\cos x$$

よって　$A=2\int_0^\pi(t+A\sin t+B\cos t)\cos t\,dt=2\int_0^\pi(t\cos t+A\sin t\cos t+B\cos^2 t)dt$

ここで　$\int_0^\pi t\cos t\,dt=\Big[t\sin t\Big]_0^\pi-\int_0^\pi\sin t\,dt=0+\Big[\cos t\Big]_0^\pi=-2$

$\int_0^\pi\sin t\cos t\,dt=\dfrac12\int_0^\pi\sin 2t\,dt=\dfrac12\left[-\dfrac12\cos 2t\right]_0^\pi=0$

$\int_0^\pi\cos^2 t\,dt=\dfrac12\int_0^\pi(1+\cos 2t)dt=\dfrac12\left[t+\dfrac12\sin 2t\right]_0^\pi=\dfrac{\pi}{2}$

から　$A=2\left(-2+\dfrac{\pi}{2}B\right)$

ゆえに　$A-\pi B=-4$ ……①

また　$B=-2\int_0^\pi(t+A\sin t+B\cos t)\sin t\,dt=-2\int_0^\pi(t\sin t+A\sin^2 t+B\sin t\cos t)dt$

ここで　$\int_0^\pi t\sin t\,dt=\Big[-t\cos t\Big]_0^\pi+\int_0^\pi\cos t\,dt=\pi+\Big[\sin t\Big]_0^\pi=\pi$

$\int_0^\pi\sin^2 t\,dt=\dfrac12\int_0^\pi(1-\cos 2t)dt=\dfrac12\left[t-\dfrac12\sin 2t\right]_0^\pi=\dfrac{\pi}{2}$

から　$B=-2\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}A\right)$

ゆえに　$\pi A+B=-2\pi$ ……②

①，②を解くと　$A=-\dfrac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}$，$B=\dfrac{2\pi}{\pi^2+1}$

よって　$f(x)=x-\dfrac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}\sin x+\dfrac{2\pi}{\pi^2+1}\cos x$

$\boxed{6}$

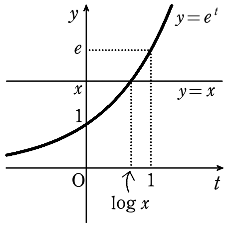
解答　$e-2\sqrt{e}+1$

解説

$e^t-x=0$ とすると　$t=\log x$

$0\leqq t\leqq\log x$ のとき　$|e^t-x|=-(e^t-x)=-e^t+x$

$\log x\leqq t\leqq 1$ のとき　$|e^t-x|=e^t-x$



よって
$$g(x)=\int_0^{\log x}(-e^t+x)dt+\int_{\log x}^1(e^t-x)dt$$
$$=\Big[-e^t+xt\Big]_0^{\log x}+\Big[e^t-xt\Big]_{\log x}^1$$
$$=(-x+x\log x+1)+(e-x-x+x\log x)$$
$$=2x\log x-3x+e+1,$$
$$g'(x)=2\log x+2-3=2\log x-1$$

$g'(x)=0$ とすると，$\log x=\dfrac12$ から　$x=\sqrt{e}$

ゆえに，$1\leqq x\leqq e$ における $g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$e-2\sqrt{e}+1$	↗	

したがって，$x=\sqrt{e}$ で最小値 $e-2\sqrt{e}+1$ をとる。

$\boxed{7}$

解答　$\dfrac13$

解説

$f(t)=\dfrac{1}{3+\sin t}$ とおき，$f(t)$ の不定積分の１つを $F(t)$ とすると

$$\lim_{x\to0}\frac1x\int_0^x\frac{dt}{3+\sin t}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=f(0)$$
$$=\frac{1}{3+0}=\frac13$$

$\boxed{1}$

解答　$f(x)=-\dfrac12 e^{\frac{x}{2}}$，$a=0$

解説

$f(t)$ の不定積分の１つを $F(t)$ とする。

与えられた等式から　$F(2x)-F(a)=1-e^x$

両辺を x について微分すると　$F'(2x)\cdot2=-e^x$

よって　$f(2x)=-\dfrac12 e^x$

$2x=t$ とおくと　$f(t)=-\dfrac12 e^{\frac{t}{2}}$　　したがって　$f(x)=-\dfrac12 e^{\frac{x}{2}}$

また，与えられた等式の両辺で $x=\dfrac{a}{2}$ とおくと　$0=1-e^{\frac{a}{2}}$

すなわち　$e^{\frac{a}{2}}=1$　　ゆえに　$a=0$

$\boxed{2}$

解答　$\alpha=\dfrac{4}{\pi+2}$，$\dfrac{4}{\pi-2}$

解説

$$f(x)=\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos(t-x)dt=\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)(\cos t\cos x+\sin t\sin x)dt$$
$$=\alpha\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt+\alpha\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt=A$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt=B$（$A$，$B$ は定数）とおくと

$$f(x)=\alpha A\cos x+\alpha B\sin x$$

よって
$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha(A\cos t+B\sin t)\cos t\,dt$$
$$=\alpha A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt+\alpha B\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt\quad\cdots\cdots①$$
$$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha(A\cos t+B\sin t)\sin t\,dt$$
$$=\alpha A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt+\alpha B\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\quad\cdots\cdots②$$

ここで　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\dfrac{t}{2}+\dfrac14\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2t}{2}dt=\left[\dfrac{t}{2}-\dfrac14\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=\dfrac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=\dfrac12\left[-\dfrac12\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac12$

①，②に代入すると
$$\begin{cases}A=\dfrac{\pi}{4}\alpha A+\dfrac12\alpha B & \cdots\cdots③\\ B=\dfrac12\alpha A+\dfrac{\pi}{4}\alpha B & \cdots\cdots④\end{cases}$$

③−④から　$A-B=\dfrac{\pi}{4}\alpha(A-B)-\dfrac12\alpha(A-B)$

よって　$(A-B)\left(1-\dfrac{\pi}{4}\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha\right)=0$

ゆえに　$A=B$　または　$1-\dfrac{\pi}{4}\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha=0$

ただし，関数 $f(x)$ は定数 0 でないから，連立方程式③，④は $(A,\ B)=(0,\ 0)$ 以外の解をもち，$A=B$ ならば $A\neq 0$ である。

[1]　$A=B$ のとき　③から　$A=\dfrac{\pi}{4}\alpha A+\dfrac{1}{2}\alpha A$

$A\neq 0$ であるから　$1=\dfrac{\pi}{4}\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha$　　ゆえに　$\alpha=\dfrac{4}{\pi+2}$

[2]　$1-\dfrac{\pi}{4}\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha=0$ のとき　$\alpha=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{4}{\pi-2}$

以上から　$\alpha=\dfrac{4}{\pi+2},\ \dfrac{4}{\pi-2}$

$\boxed{3}$

解答　$f(x)=(\pi-3)\sin x-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cos x$，$g(x)=x+\dfrac{\pi}{2}-2$

解説

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt=\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\sin t\,dt$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cos t\,dt=a$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\sin t\,dt=b$ とおくと　$f(x)=a\sin x-b\cos x$

また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=c$ とおくと　$g(x)=x+c$

ゆえに　$\displaystyle a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+c)\cos t\,dt=\Big[(t+c)\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}+c-\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2}+c-1$

よって　$a=c+\dfrac{\pi}{2}-1$　……①

また　$\displaystyle b=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+c)\sin t\,dt=\Big[-(t+c)\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=c+\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=c+1$

よって　$b=c+1$　……②

更に　$\displaystyle c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin t-b\cos t)dt=\Big[-a\cos t-b\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-b+a$

よって　$c=a-b$　……③

①，②，③から　$a=\pi-3$，$b=\dfrac{\pi}{2}-1$，$c=\dfrac{\pi}{2}-2$

したがって　$f(x)=(\pi-3)\sin x-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cos x$，$g(x)=x+\dfrac{\pi}{2}-2$

$\boxed{4}$

解答　$x=e$ で最大値 e^2+1，$x=\sqrt{e}$ で最小値 $(e-1)^2$

解説

$0\leqq t\leqq 2$ において　$1\leqq e^t\leqq e^2$

$x^2\leqq 1$ すなわち $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_0^2(e^t-x^2)\,dt=\Big[e^t-x^2t\Big]_0^2=-2x^2+e^2-1$$

$1<x^2\leqq e^2$ すなわち $1<x\leqq e$ のとき

$e^t-x^2=0$ とすると　$t=2\log x$

よって　$\displaystyle f(x)=\int_0^{2\log x}(-e^t+x^2)\,dt+\int_{2\log x}^2(e^t-x^2)dt$

$\displaystyle=\Big[-e^t+x^2t\Big]_0^{2\log x}+\Big[e^t-x^2t\Big]_{2\log x}^2$

$=(-x^2+2x^2\log x+1)+(e^2-3x^2+2x^2\log x)$

$=4x^2\log x-4x^2+e^2+1$

したがって　$f(x)=\begin{cases}-2x^2+e^2-1 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 4x^2\log x-4x^2+e^2+1 & (1<x\leqq e)\end{cases}$

$0<x<1$ のとき　$f'(x)=-4x$

$1<x<e$ のとき　$f'(x)=4(2x\log x+x)-8x=8x\log x-4x=4x(2\log x-1)$

$1<x<e$ のとき，$f'(x)=0$ とすると　$x=\sqrt{e}$

$0\leqq x\leqq e$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	1	…	$\sqrt{e}$	…	e
$f'(x)$		−		−	0	+	
$f(x)$	e^2-1	↘	e^2-3	↘	$(e-1)^2$	↗	e^2+1

よって，$f(x)$ は $x=e$ で最大値 e^2+1，$x=\sqrt{e}$ で最小値 $(e-1)^2$ をとる。

$\boxed{1}$

解答　$f(x)=2(2x-k-1)e^x+k+2$

解説

$\displaystyle f(x)=(2x-k)e^x+e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$　……①　とする。

①の両辺を x で微分すると

$\displaystyle f'(x)=2e^x+(2x-k)e^x-e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt+e^{-x}\cdot f(x)e^x$

$\displaystyle=(2x-k+2)e^x+f(x)-e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$　……②

①から　$\displaystyle f(x)-e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt=(2x-k)e^x$

これを②に代入して

$f'(x)=(2x-k+2)e^x+(2x-k)e^x$

$=(4x-2k+2)e^x$

ゆえに　$\displaystyle f(x)=\int(4x-2k+2)e^x dx=\int(4x-2k+2)(e^x)'dx$

$\displaystyle=(4x-2k+2)e^x-\int 4e^x dx$

$=(4x-2k-2)e^x+C$（C は積分定数）……③

①から　$f(0)=-k$

また，③から　$f(0)=-2k-2+C$

よって　$-k=-2k-2+C$　　ゆえに　$C=k+2$

これを③に代入して

$f(x)=(4x-2k-2)e^x+k+2$

$=2(2x-k-1)e^x+k+2$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$I(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\dfrac{1}{3} & (0<t<1)\\ t-\dfrac{1}{3} & (t\geqq 1)\end{cases}$　　(2)　$t=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　$s=\sin\theta$ とおくと　$ds=\cos\theta\,d\theta$

θ	$0\to\dfrac{\pi}{2}$
s	$0\to 1$

よって　$\displaystyle I(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin^2\theta-t|\cos\theta\,d\theta=\int_0^1|s^2-t|ds$

ゆえに，$0<t<1$ のとき

$\displaystyle I(t)=\int_0^{\sqrt{t}}(t-s^2)ds+\int_{\sqrt{t}}^1(s^2-t)ds=\Big[ts-\frac{1}{3}s^3\Big]_0^{\sqrt{t}}+\Big[\frac{1}{3}s^3-ts\Big]_{\sqrt{t}}^1$

$\displaystyle=t\sqrt{t}-\frac{1}{3}t\sqrt{t}+\frac{1}{3}-t-\frac{1}{3}t\sqrt{t}+t\sqrt{t}=\frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}$

$t\geqq 1$ のとき　$\displaystyle I(t)=\int_0^1(t-s^2)ds=\Big[ts-\frac{1}{3}s^3\Big]_0^1=t-\frac{1}{3}$

したがって　$I(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\dfrac{1}{3} & (0<t<1)\\ t-\dfrac{1}{3} & (t\geqq 1)\end{cases}$

(2)　$I(1)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$，$\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\left(\frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}-1+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ であるから，$I(t)$ はす

べての正の実数 t で連続である。

(1) より，$t \geqq 1$ で $I(t)$ は単調に増加するから，$I(t)$ が最小となる t の値は $0<t\leqq 1$ に存在する。

$0<t<1$ で $f(t)=\dfrac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\dfrac{1}{3}$ とおくと　$f'(t)=2\sqrt{t}-1$

$0<t<1$ で $f'(t)=0$ とすると　$t=\dfrac{1}{4}$

よって，$0<t<1$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

ゆえに，$0<t<1$ において，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{4}$ で極小かつ最小で，最小値は　$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

したがって，$I(t)$ は $t=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

1

解答　(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{1}{2}\log 2$

解説

(1) (与式)$=\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

(2) (与式)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

2

解答　$\log\dfrac{5}{3}$

解説

(与式)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{3+\frac{k}{n}}=\int_0^2\frac{1}{3+x}dx=\Big[\log(3+x)\Big]_0^2=\log 5-\log 3=\log\frac{5}{3}$

3

解答　$\dfrac{256}{27e}$

解説

$P=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(4n)!}{(3n)!}}$ とおくと

$$P=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)(3n+3)\cdots\cdots(3n+n)}$$
$$=\sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)\cdots\cdots\left(3+\frac{n}{n}\right)}$$

よって

$$\log P=\frac{1}{n}\left\{\log\left(3+\frac{1}{n}\right)+\log\left(3+\frac{2}{n}\right)+\log\left(3+\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(3+\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(3+\frac{k}{n}\right)$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log P=\int_0^1\log(3+x)dx=\int_0^1(3+x)'\log(3+x)dx$

$$=\Big[(3+x)\log(3+x)\Big]_0^1-\int_0^1dx$$
$$=4\log 4-3\log 3-1=\log\frac{4^4}{3^3e}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P=\frac{256}{27e}$

4

解答　略

解説

自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき　$\dfrac{1}{k+1}\leqq\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{k}$

常に $\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{x}$ または $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{k}$ ではないから　$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{k}$

よって　$\displaystyle\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k}$

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k}$ から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)$ であるから

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\quad\cdots\cdots①$$

$\displaystyle\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$ から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^{n}=\log n$ であるから　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}<\log n$

この不等式の両辺に 1 を加えて　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}<\log n+1$　……②

よって，①，② から，$n\geqq 2$ のとき　$\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}<\log n+1$

5

解答　略

解説

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$0\leqq x^4\leqq x^2\leqq 1$ であるから　$1\leqq 1+x^4\leqq 1+x^2\leqq 2$

よって，$\dfrac{1}{1+x^2}\leqq\dfrac{1}{1+x^4}\leqq 1$ である。

等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<\int_0^1dx\quad\cdots\cdots①$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ において，$x=\tan\theta$ とおくと

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

また　$\displaystyle\int_0^1dx=\Big[x\Big]_0^1=1$

よって，① から　$\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^4}<1$

6

解答　略

解説

$0<x<\dfrac{1}{2}$ であるから　$0<x^3<x$　よって　$-\dfrac{1}{2}<-x<-x^3<0$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}<1-x<1-x^3<1$　したがって　$\sqrt{1-x}<\sqrt{1-x^3}<1$

よって，$0<x<\dfrac{1}{2}$ において　$1<\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}<\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

また　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{2}$

ゆえに　$\displaystyle\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<2-\sqrt{2}$

$\boxed{1}$

解答　(1) $\frac{1}{4}$　(2) 2　(3) $\frac{1}{3}$　(4) $2\log 2-1$　(5) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(6) $e-2$

(7) $\log\frac{3}{2}$　(8) $\frac{3}{8}$　(9) $2\log 2-\frac{3}{4}$

解説

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(2-\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x(1-x)(2-x)dx=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\pi\sin\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\pi\sin\pi x\,dx$$
$$=\left[\pi\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)\right]_0^1=2$$

(3) $$(\text{与式})=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(3\pi\cdot\frac{k}{n}\right)$$
$$=\pi\int_0^1 x\sin 3\pi x\,dx=\pi\int_0^1 x\left(-\frac{1}{3\pi}\cos 3\pi x\right)'dx$$
$$=\pi\left(\left[-\frac{1}{3\pi}x\cos 3\pi x\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{3\pi}\cos 3\pi x\,dx\right)$$
$$=\pi\left(\frac{1}{3\pi}+\frac{1}{3\pi}\left[\frac{1}{3\pi}\sin 3\pi x\right]_0^1\right)=\frac{1}{3}$$

(4) $$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)\,dx$$
$$=\int_0^1(1+x)'\log(1+x)\,dx=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx$$
$$=2\log 2-\Big[x\Big]_0^1=2\log 2-1$$

(5) $$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$
$$=\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big[x\sqrt{x}\Big]_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(6) $$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}+\frac{2^2}{n^2}e^{\frac{2}{n}}+\frac{3^2}{n^2}e^{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{n^2}e^{\frac{n}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 x^2e^x dx$$
$$=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=e-2\int_0^1 xe^x dx$$
$$=e-2\left(\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)=e-2\left(e-\Big[e^x\Big]_0^1\right)$$
$$=e-2$$

(7) $$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{2+x}dx=\Big[\log(2+x)\Big]_0^1=\log 3-\log 2=\log\frac{3}{2}$$

(8) $$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^3}{(n+k)^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^3}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}dx=\left[-\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^1=\frac{3}{8}$$

(9) $$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2}\log\frac{n+k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$=\int_0^1(1+x)\log(1+x)\,dx=\left[\frac{(1+x)^2}{2}\log(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1+x}{2}dx$$
$$=2\log 2-\left[\frac{(x+1)^2}{4}\right]_0^1=2\log 2-\left(1-\frac{1}{4}\right)=2\log 2-\frac{3}{4}$$

$\boxed{2}$

解答　(1) 9　(2) $\log\frac{3}{2}$

解説

(1) $$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^3 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=9$$

(2) $$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_1^2\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log(1+x)\Big]_1^2=\log\frac{3}{2}$$

$\boxed{3}$

解答　$\frac{4}{e}$

解説

$$\log\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{(2n)!}{n!n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n}{n^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots\cdots+\log\frac{n+n}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n+k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$=\int_0^1\log(1+x)\,dx=\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1=\log\frac{4}{e}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき

[1]　$\sqrt{k}\leqq\sqrt{x}$ であるから　$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}}\leqq\frac{1}{\sqrt{k}}$

常には $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{k}}$ でないから　$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}dx$

すなわち　$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\frac{1}{\sqrt{k}}$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ として，辺々を加えると

$$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_3^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

ここで　左辺$=\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1}=2(\sqrt{n+1}-1)$

したがって　$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

[2]　$\sqrt{x}\leqq\sqrt{k+1}$ であるから　$\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leqq\frac{1}{\sqrt{x}}$

常には $\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ でないから　$\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

すなわち　$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$ として辺々を加え，さらに両辺に１を加えると

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

ここで　右辺$=1+\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\left[2\sqrt{x}\right]_1^n=2\sqrt{n}-1$

したがって　$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

[1]，[2] より　$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

$\boxed{5}$

解答 略

解説

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$0\leqq x^3\leqq x^2\leqq 1$ であるから　$1\geqq 1-x^3\geqq 1-x^2\geqq 0$

ゆえに　$1\geqq\sqrt{1-x^3}\geqq\sqrt{1-x^2}\geqq 0$　　よって　$1\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

等号は常には成り立たないから

$$\int_0^{\frac{1}{2}}dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad\cdots\cdots①$$

$x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow\frac{1}{2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

また　$\int_0^{\frac{1}{2}}dx=\left[x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

よって，① から　$\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{\pi}{6}$

$\boxed{6}$

解答 略

解説

$0\leqq x\leqq 1$ であるから　$0\leqq x^2\leqq x$

よって　$-\frac{x}{2}\leqq-\frac{x^2}{2}\leqq 0$

ゆえに　$e^{-\frac{x}{2}}\leqq e^{-\frac{x^2}{2}}\leqq e^0=1$

等号は常には成り立たないから　$\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}dx<\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx<\int_0^1 dx$

ここで　$\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}dx=\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

よって　$2\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)<\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx<1$

$\boxed{1}$

解答　(1) $2\log 2-\frac{3}{4}$　(2) $\frac{\pi}{4}$　(3) $2(\sqrt{2}-1)$　(4) π　(5) $\log 3-\log 2$

解説

求める極限値を S とする。

(1) $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2}\log\frac{n+k}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n+k}{n}\log\frac{n+k}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=\int_0^1(1+x)\log(1+x)\,dx$

$=\left[\frac{(1+x)^2}{2}\log(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1+x}{2}dx=2\log 2-\left[\frac{(x+1)^2}{4}\right]_0^1$

$=2\log 2-\left(1-\frac{1}{4}\right)=2\log 2-\frac{3}{4}$

(2) $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

(3) $S=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=1\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$

$=\left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1=2(\sqrt{2}-1)$

(4) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{(2n)^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{\frac{4n^2-k^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ は，半径２の四分円の面積を表すから　$S=\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=\pi$

別解　$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{(2n)^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\sqrt{(2n)^2-k^2}}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{2n}\right)^2}=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{2n}\right)^2}$

$=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=4\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{4}=\pi$

(5) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n^2}{2n^2+3nk+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2+3\cdot\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^2\frac{1}{2+3x+x^2}dx=\int_0^2\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\left[\log(x+1)-\log(x+2)\right]_0^2=\log 3-\log 4-(-\log 2)=\log 3-\log 2$

$\boxed{2}$

解答　$\frac{4}{e}$

解説

$a_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log a_n&=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}{n^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(\frac{n+n}{n}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)dx\\&=\int_0^1(1+x)'\log(1+x)dx=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1dx\\&=2\log2-1=\log\frac{2^2}{e}=\log\frac{4}{e}\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{e}$

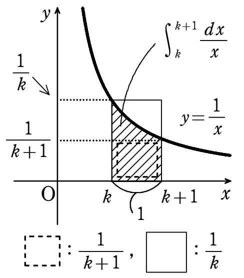
$\boxed{3}$

解答　略

解説

自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき

$$\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{k}$$



常に $\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{x}$ または $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{k}$ ではないから

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$$

よって　$\displaystyle\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$

この不等式で k を 1 から $n-1$ まで加えると，

$n\geqq2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^n\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n$$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n$

この不等式の両辺に 1 を加えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

すなわち　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$　……①

また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}$

したがって　$\displaystyle\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}$

この不等式の両辺に $\dfrac{1}{n}$ を加えると

$$\frac{1}{n}+\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

すなわち　$\displaystyle\frac{1}{n}+\log n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$　……②

①，② から　$\displaystyle\frac{1}{n}+\log n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

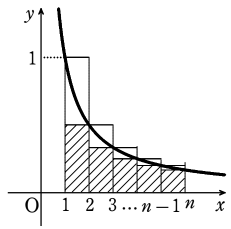
$n=1$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{1}+\log1=1,\ \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}=1,\ 1+\log1=1$

したがって，すべての自然数に対して

$$\frac{1}{n}+\log n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq1+\log n$$

別解　$n\geqq2$ のとき

$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを考えると，右図のようになる。



図の階段状の小さい方の長方形の面積の和を S_1，

大きい方の長方形の面積の和を S_2 とすると

$$S_1=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k},\ S_2=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

また，$\displaystyle S=\int_1^n\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n$ とすると，

図から　$S_1<S<S_2$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\log n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

よって　$\displaystyle\frac{1}{n}+\log n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$　……①

$n=1$ のとき，① の各辺はすべて 1 となり，等号が成り立つ。

したがって，自然数 n について　$\displaystyle\frac{1}{n}+\log n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq1+\log n$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

$y=\dfrac{1}{2x+1}$ とおくと　$y'=-\dfrac{2}{(2x+1)^2}<0$

よって，関数 y は $x\geqq0$ において単調に減少する。

ゆえに，$0\leqq a<x<a+1$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{2(a+1)+1}<\frac{1}{2x+1}<\frac{1}{2a+1}$

よって　$\displaystyle\int_a^{a+1}\frac{dx}{2a+3}<\int_a^{a+1}\frac{dx}{2x+1}<\int_a^{a+1}\frac{dx}{2a+1}$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{2a+3}<\int_a^{a+1}\frac{dx}{2x+1}<\frac{1}{2a+1}$

これより　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+3}<\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{2x+1}$　……①

$$\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{2x+1}<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\quad\cdots\cdots②$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{2x+1}=\int_0^1\frac{dx}{2x+1}+\int_1^2\frac{dx}{2x+1}+\cdots\cdots+\int_{n-1}^n\frac{dx}{2x+1}$

$$=\int_0^n\frac{dx}{2x+1}=\left[\frac{1}{2}\log(2x+1)\right]_0^n=\frac{1}{2}\log(2n+1)$$

同様に　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{2x+1}=\frac{1}{2}\log(2n+3)$

① から　$\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\log(2n+1)$

② から　$\displaystyle\frac{1}{2}\log(2n+3)<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{2}\log(2n+3)<1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}<1+\frac{1}{2}\log(2n+1)$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　略

解説

(1)　$x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

(2)　$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$0\leqq x^n\leqq x^2$

よって　$(1-x^n)-(1-x^2)=x^2-x^n\geqq0$

ゆえに　$1-x^n\geqq1-x^2$　すなわち　$\sqrt{1-x^n}\geqq\sqrt{1-x^2}>0$

よって　$\displaystyle1\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\leqq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx\leqq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(1) の結果から　$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx\leqq\frac{\pi}{4}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$（$C$ は積分定数）　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$　（C は積分定数）

(2)　$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$1-x^2>0$ であるから

$(1+x^2)(1-x^2)\leqq1\leqq\left(1+\dfrac{9}{8}x^2\right)(1-x^2)$ を示せばよい。

$x\geqq0$ であるから　$(1+x^2)(1-x^2)=1-x^4\leqq1$

また　$\displaystyle\left(1+\frac{9}{8}x^2\right)(1-x^2)-1=\frac{x^2}{8}(1-3x)(1+3x)\geqq0$

よって　$\displaystyle1+x^2\leqq\frac{1}{1-x^2}\leqq1+\frac{9}{8}x^2$　……①

(3)　$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{3}$ において，① の等号は常には成り立たないから

$$\int_0^{\frac{1}{3}}(1+x^2)dx<\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{1-x^2}<\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{9}{8}x^2\right)dx$$

すなわち　$\left[x+\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{3}}<\left[\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{3}}<\left[x+\dfrac{3}{8}x^3\right]_0^{\frac{1}{3}}$

ゆえに　$\dfrac{28}{81}<\dfrac{1}{2}\log 2<\dfrac{25}{72}$　　よって　$\dfrac{56}{81}<\log 2<\dfrac{25}{36}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\log\dfrac{27}{16}$　　(2)　$\dfrac{27}{16}$

解説

(1)　$\displaystyle\int_0^1\log\frac{x+2}{x+1}dx=\int_0^1\{\log(x+2)-\log(x+1)\}dx$

$$=\int_0^1(x+2)'\log(x+2)dx-\int_0^1(x+1)'\log(x+1)dx$$

$$=\Big[(x+2)\log(x+2)\Big]_0^1-\int_0^1(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}dx$$

$$-\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1+\int_0^1(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx$$

$$=3\log 3-2\log 2-2\log 2=3\log 3-4\log 2$$

$$=\log\frac{3^3}{2^4}=\log\frac{27}{16}$$

(2)　$a_n=\left\{\dfrac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\log\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\log\frac{2+\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}dx=\log\frac{27}{16}\quad\text{((1) から)}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{27}{16}$

$\boxed{2}$

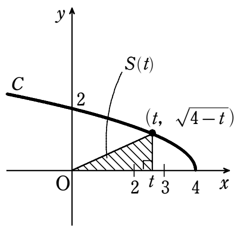
解答　$\dfrac{28\sqrt{2}-17}{15}$

解説

$S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot\sqrt{4-t}=\dfrac{1}{2}t\sqrt{4-t}$

$\dfrac{t_n-t_0}{n}=\dfrac{1}{n}$ より，$t_k=2+\dfrac{k}{n}$　$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

と表すことができるから



$S(t_k)=\dfrac{1}{2}t_k\sqrt{4-t_k}=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{k}{n}\right)\sqrt{4-\left(2+\dfrac{k}{n}\right)}$

$\qquad=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{k}{n}\right)\sqrt{2-\dfrac{k}{n}}$　$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{2-\frac{k}{n}}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(2+x)\sqrt{2-x}\,dx$$

ここで，$\sqrt{2-x}=u$ とおくと

$\qquad x=2-u^2$，$dx=-2udu$

x と u の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
u	$\sqrt{2}\longrightarrow 1$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{1}(4-u^2)u\cdot(-2u)du=\int_1^{\sqrt{2}}(4u^2-u^4)du$

$$=\left[\frac{4}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{28\sqrt{2}-17}{15}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　$2-\sqrt{2}$　　(3)　略

解説

(1)　$f(t)=e^t-(1+t)$ とすると　　$f'(t)=e^t-1$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=0$

$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，すべての実数 t に対して　　$f(t)\geqq 0$

すなわち　　$1+t\leqq e^t$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

$$=\left[\tan x-\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=(1-\sqrt{2})-(-1)=2-\sqrt{2}$$

(3)　(1) の不等式の t を $\sin x$ とすると　　$1+\sin x\leqq e^{\sin x}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，$1+\sin x>0$，$e^{\sin x}>0$ であるから　　$e^{-\sin x}\leqq\dfrac{1}{1+\sin x}$

また，(1) の不等式の t を $-\sin x$ とすると　　$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}$

よって，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において　　$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}\leqq\dfrac{1}{1+\sin x}$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$

ここで　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx=\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) の結果と合わせて　　$\displaystyle\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$

1

解答　(1)　$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　(2)　$2\sqrt{5}-3$

解説

(1)　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に $\sin\alpha=2\cos\alpha$ を代入すると　$5\cos^2\alpha=1$

$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から　　$\cos\alpha\geqq0$　　　よって　$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また　　$\sin\alpha=2\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

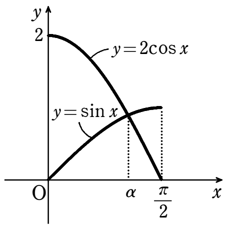
(2)　$0\leqq x\leqq\alpha$ のとき

$|\sin x-2\cos x|=-(\sin x-2\cos x)$

$\alpha\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$|\sin x-2\cos x|=\sin x-2\cos x$

よって



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-2\cos x|dx$$

$$=-\int_0^{\alpha}(\sin x-2\cos x)dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-2\cos x)dx$$

$$=-\Big[-\cos x-2\sin x\Big]_0^{\alpha}+\Big[-\cos x-2\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-(-\cos\alpha-2\sin\alpha)\times2+(-1)+(-2)=2\cos\alpha+4\sin\alpha-3$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-3=2\sqrt{5}-3$$

2

解答　(1)　$-\dfrac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)+C$（$C$ は積分定数）　　(2)　$\dfrac{2}{5}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)^2$

解説

(1)　$\displaystyle\int e^{-x}\sin2x\,dx=\int\sin2x(-e^{-x})'dx=-e^{-x}\sin2x+2\int\cos2x(-e^{-x})'dx$

$$=-e^{-x}\sin2x-2e^{-x}\cos2x-4\int e^{-x}\sin2x\,dx$$

よって　　$\displaystyle5\int e^{-x}\sin2x\,dx=-e^{-x}\sin2x-2e^{-x}\cos2x$

積分定数を考えて

$$\int e^{-x}\sin2x\,dx=-\frac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

別解　$(e^{-x}\sin2x)'=-e^{-x}\sin2x+2e^{-x}\cos2x$　……①

$(e^{-x}\cos2x)'=-e^{-x}\cos2x-2e^{-x}\sin2x$　……②

①＋②×2 から　　$(e^{-x}\sin2x)'+2(e^{-x}\cos2x)'=-5e^{-x}\sin2x$

よって　　$e^{-x}\sin2x=-\dfrac{1}{5}\{(e^{-x}\sin2x)'+2(e^{-x}\cos2x)'\}$

ゆえに　　$\displaystyle\int e^{-x}\sin2x\,dx=-\frac{1}{5}(e^{-x}\sin2x+2e^{-x}\cos2x)+C$

$$=-\frac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-x}|\sin2x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-x}\sin2x\,dx$

$$=\left[-\frac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-\frac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\left\{-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}\times(-2)\right\}\times2-\left(-\frac{1}{5}\times2\right)-\left(-\frac{e^{-\pi}}{5}\times2\right)$$

$$=\frac{2}{5}\left(e^{-\pi}+2e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)=\frac{2}{5}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)^2$$

3

解答　(1)　2π　　(2)　0　　(3)　$m=n$ のとき π，$m\neq n$ のとき 0　　(4)　2013π

解説

(1)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}x(-\cos x)'dx=\Big[-x\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx$

$$=2\pi+\Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi}=2\pi$$

(2)　$\sin2x\sin3x=-\dfrac{1}{2}(\cos5x-\cos x)$ であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin2x\sin3x\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos5x-\cos x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin5x}{5}-\sin x\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

(3)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}dx$

[1]　$m=n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos2mx-1)dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin2mx}{2m}-x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot(-2\pi)=\pi$$

[2]　$m\neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}-\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

(4)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+\sin2x+\cdots\cdots+\sin2013x)^2dx$

(3) より，自然数 m，n について，$m\neq n$ のとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0$ であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+\sin2x+\cdots\cdots+\sin2013x)^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2x+\sin^22x+\cdots\cdots+\sin^22013x)dx$$

また，$m=n$ のとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\pi$ であるから　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2mx\,dx=\pi$

したがって　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2x+\sin^22x+\cdots\cdots+\sin^22013x)dx$

$=\pi+\pi+\cdots\cdots+\pi$　（2013 個の π の和）

$=2013\pi$

以上から　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2dx=2013\pi$

4

解答　（ア）0　　（イ）$\dfrac{\pi}{4}$

解説

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx=\Big[\log|\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\overset{ア}{=}0\quad\cdots\cdots①$$

また　$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots②$$

①，② から　　$2I=\dfrac{\pi}{2}$　　　したがって　$I\overset{イ}{=}\dfrac{\pi}{4}$

参考　$I-J=0$ は，次のようにおき換えて導くこともできる。

$\displaystyle J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ において，$x=\dfrac{\pi}{2}-y$ とおくと

$dx=-dy$

x	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{2}$
y	$\dfrac{\pi}{2}\ \to\ 0$

よって　$$J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\cdot(-dy)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos y}{\cos y+\sin y}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sin y+\cos y}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=I$$

ゆえに　　$I-J=0$

5

解答　証明略，$\dfrac{\pi^2}{4}$

解説

(前半)　$\displaystyle I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$ とする。

x	$0\ \to\ \pi$
t	$\pi\ \to\ 0$

$x=\pi-t$ とおくと　　$dx=-dt$

$$I=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\cdot(-1)dt=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-I$$

よって　　$\displaystyle2I=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

すなわち　　$\displaystyle\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

(後半)

$\dfrac{\sin x}{1+\cos^2x}=\dfrac{\sin x}{2-\sin^2x}$ と変形できるから

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx$$

x	$0\ \to\ \pi$
t	$1\ \to\ -1$

$\cos x=t$ とおくと　　$-\sin x\,dx=dt$

よって　与式 $=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}$

$=\pi\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$

$t=\tan\theta$ とおくと　$dt=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

t	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

ゆえに　与式 $=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\pi\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{4}$

6

解答　(1) $\log\sqrt{2}$　(2) $\frac{1}{n}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n}{2}\pi\right)$　(3) $\log\sqrt{2}-\frac{8}{15}$

解説

(1) $I_0=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\left[\log|\sin x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\log\sqrt{2}$

(2) $I_n-I_{n-1}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x}{\sin x}dx$

ここで　$\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x$

$=-2\sin\frac{(2n+1)x+(2n-1)x}{2}\sin\frac{(2n+1)x-(2n-1)x}{2}=-2\sin 2nx\sin x$

であるから　$I_n-I_{n-1}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin 2nx)dx=\left[\frac{\cos 2nx}{n}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n}{2}\pi\right)$

(3) $I_5=(I_5-I_4)+(I_4-I_3)+(I_3-I_2)+(I_2-I_1)+(I_1-I_0)+I_0$

(2)から　$I_5-I_4=\frac{1}{5}\left(\cos 5\pi-\cos\frac{5}{2}\pi\right)=-\frac{1}{5}$

同様にして　$I_4-I_3=0$，$I_3-I_2=-\frac{1}{3}$，$I_2-I_1=1$，$I_1-I_0=-1$

よって　$I_5=-\frac{1}{5}+0-\frac{1}{3}+1-1+\log\sqrt{2}=\log\sqrt{2}-\frac{8}{15}$

7

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1) $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと　$dx=(-1)\cdot dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

よって　$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-1)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx=I_{n,m}$

(2) $n\geqq 2$ のとき

$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int(\sin^m x\cos x)\cos^{n-1}x\,dx=\int\left(\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\right)'\cos^{n-1}x\,dx$

$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}-\int\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\cdot(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)dx$

$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx$ ……①

また　$\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx=\int\sin^m x\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$

$=\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx-\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ ……②

①，②から　$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$

ゆえに　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx=\left[\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$

したがって　$I_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$

8

解答　$x=0$，1 で最大値 $2\log 2-1$；$x=\frac{1}{2}$ で最小値 $3\log\frac{3}{2}-1$

解説

$0\leqq t\leqq x$ で $|t-x|=x-t$，$x\leqq t\leqq 1$ で $|t-x|=t-x$ であるから

$f(x)=\int_0^x\log(-t+x+1)dt+\int_x^1\log(t-x+1)dt$

ここで，$s=-t+x+1$ とおくと　$ds=-dt$

t	$0 \longrightarrow x$
s	$x+1 \longrightarrow 1$

このとき　$\int_0^x\log(-t+x+1)dt=\int_{x+1}^{1}\log s\cdot(-ds)$

$=\int_1^{x+1}\log s\,ds$

$=\left[s\log s-s\right]_1^{x+1}=(x+1)\log(x+1)-(x+1)+1$

$=(x+1)\log(x+1)-x$

また，$u=t-x+1$ とおくと　$du=dt$

t	$x \longrightarrow 1$
u	$1 \longrightarrow 2-x$

このとき　$\int_x^1\log(t-x+1)dt=\int_1^{2-x}\log u\,du$

$=\left[u\log u-u\right]_1^{2-x}$

$=(2-x)\log(2-x)-(2-x)+1$

$=(2-x)\log(2-x)+x-1$

よって　$f(x)=(x+1)\log(x+1)+(2-x)\log(2-x)-1$

ゆえに　$f'(x)=\log(x+1)+(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}-\log(2-x)+(2-x)\left(-\frac{1}{2-x}\right)$

$=\log(x+1)-\log(2-x)=\log\frac{x+1}{2-x}$

$0<x<1$ で $f'(x)=0$ とすると　$x=\frac{1}{2}$

$f(0)=f(1)=2\log 2-1$ であるから，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2\log 2-1$	↘	極小	↗	$2\log 2-1$

よって，$f(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ で極小かつ最小となる。

$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\log\frac{3}{2}-1$ であるから，求める最大値，最小値は

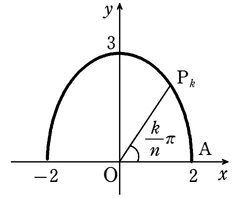
$x=0$，1 で最大値　$2\log 2-1$，　$x=\frac{1}{2}$ で最小値　$3\log\frac{3}{2}-1$

9

解答　$\frac{13}{72}$

解説

点 P_k の座標は次のように表すことができる。



$\left(OP_k\cos\frac{k}{n}\pi,\ OP_k\sin\frac{k}{n}\pi\right)$

点 P_k は楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 上にあるから

$OP_k^2\left(\frac{1}{4}\cos^2\frac{k}{n}\pi+\frac{1}{9}\sin^2\frac{k}{n}\pi\right)=1$

よって　$\frac{1}{OP_k^2}=\frac{1}{4}\cos^2\frac{k}{n}\pi+\frac{1}{9}\sin^2\frac{k}{n}\pi$

したがって　(与式) $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{OP_k^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}\pi+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k}{n}\pi\right)$

$=\frac{1}{4}\int_0^1\cos^2\pi x\,dx+\frac{1}{9}\int_0^1\sin^2\pi x\,dx$

$=\frac{1}{8}\int_0^1(1+\cos 2\pi x)dx+\frac{1}{18}\int_0^1(1-\cos 2\pi x)dx$

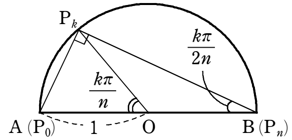
$=\frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1+\frac{1}{18}\left[x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1=\frac{13}{72}$

10

解答　(1) $l_n(k)=2\left(\sin\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{k\pi}{2n}+1\right)$　(2) $\alpha=2\left(\frac{4}{\pi}+1\right)$

解説

(1) 線分 AB の中点を O とすると



$\angle AOP_k=\frac{k}{n}\pi$

よって　$\angle ABP_k=\frac{1}{2}\angle AOP_k=\frac{k\pi}{2n}$

ゆえに　$AP_k=AB\sin\angle ABP_k=2\sin\frac{k\pi}{2n}$，

$P_kB=AB\cos\angle ABP_k=2\cos\frac{k\pi}{2n}$

したがって　$l_n(k)=2\left(\sin\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{k\pi}{2n}+1\right)$

(2) $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}l_n(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\left(\sin\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{k\pi}{2n}+1\right)$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)+1\right\}$$

$$=2\int_0^1\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}+1\right)dx=2\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}+x\right]_0^1$$

$$=2\left\{\left(\frac{2}{\pi}+1\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\right)\right\}=2\left(\frac{4}{\pi}+1\right)$$

11

解答　(1)　略　　(2)　$\frac{1}{2}$

解説

(1)　$f(x)=x-\log(x+1)$，$g(x)=\log(x+1)-x+\frac{1}{2}x^2$ とおくと

$$f'(x)=\frac{x}{x+1},\quad g'(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

$x>0$ のとき $f'(x)>0$，$g'(x)>0$ であるから，$x\geqq 0$ において $f(x)$，$g(x)$ はともに単調に増加する。

また　$f(0)=0$，$g(0)=0$

ゆえに，$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$，$g(x)\geqq 0$

よって　$x-\frac{1}{2}x^2\leqq\log(x+1)\leqq x$

(2)　(1) において，$x=\frac{k}{n^2}$ とすると　$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\leqq\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqq\frac{k}{n^2}$

$k=1$，2，……，n として辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$

また　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$

$$=\int_0^1 x\,dx-0\cdot\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{2}$$

したがって　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

12

解答　(1)　$\log 2-2+\frac{\pi}{2}$　　(2)　$2e^{-2+\frac{\pi}{2}}$

解説

(1)　$\int_0^1\log(1+x^2)dx=\int_0^1(x)'\log(1+x^2)dx=\Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$=\log 2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\log 2-2\int_0^1 dx+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\log 2-2+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\quad\cdots\cdots①$$

$x=\tan\theta$　とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに，① から　$\int_0^1\log(1+x^2)dx=\log 2-2+\frac{\pi}{2}$

(2)　$\sqrt[n]{a_n}>0$ であるから，$\sqrt[n]{a_n}$ の自然対数をとると

$$\log\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{n}\log a_n=\frac{1}{n}\log(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdots\cdots(n^2+n^2)$$

$$=\frac{1}{n}\{\log(n^2+1^2)+\log(n^2+2^2)+\cdots\cdots+\log(n^2+n^2)\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)$$

したがって　$\log\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}=\log\sqrt[n]{a_n}-\log n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)-\log n^2$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)-n\log n^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)-\sum_{k=1}^{n}\log n^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(n^2+k^2)-\log n^2\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n^2+k^2}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

よって　$\lim_{n\to\infty}\log\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\int_0^1\log(1+x^2)dx$

(1) より，$\int_0^1\log(1+x^2)dx=\log 2-2+\frac{\pi}{2}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}=\log 2-2+\frac{\pi}{2}$$

すなわち　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}=e^{\log 2-2+\frac{\pi}{2}}=2e^{-2+\frac{\pi}{2}}$

13

解答　(1)　(ア)　略　　(イ)　略　　(2)　略

解説

(1)　(ア)　$f(x)=e^x-(x+1)$ とおくと　$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x=0$ のとき最小値 0 をとる。

したがって，すべての実数 x に対して　$f(x)\geqq 0$

よって　$1+x\leqq e^x$

(イ)　(ア)から，すべての実数 t に対して　$1+t\leqq e^t$

$t=-x^2$ とおくと　$1-x^2\leqq e^{-x^2}$　……①

また，$t=x^2$ とおくと　$0<1+x^2\leqq e^{x^2}$

したがって　$e^{-x^2}\leqq\frac{1}{1+x^2}$　……②

①，② から　$1-x^2\leqq e^{-x^2}\leqq\frac{1}{1+x^2}$

(2)　(1) の (イ) の不等式において，等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1(1-x^2)dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\quad\cdots\cdots③$$

ここで　$\int_0^1(1-x^2)dx=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

また，$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ について，$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

したがって　$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

よって，③ から　$\frac{2}{3}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\frac{\pi}{4}$

14

解答　18

解説

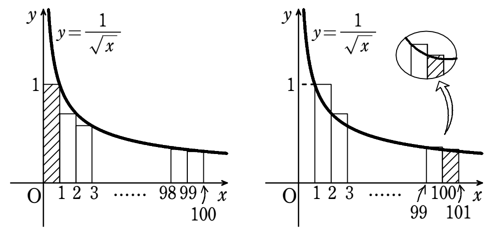
まず，下左図より

$S<1+\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100}=1+20-2=19$

下右図より

$S>\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{\sqrt{100}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100}+\frac{1}{10}=20-2+\frac{1}{10}=18+\frac{1}{10}>18$

ゆえに　$18<S<18+1$ より　$n=18$



15

解答　(1)　$\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}$　　(2)　$\frac{\pi}{4}$　　(3)　略　　(4)　$\frac{\pi}{4}$

解説

(1)　和 $1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ は初項 1，公比 $-x^2$，項数 n の等比数列の和であるから，$-x^2\neq 1$ より

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}\quad\cdots\cdots①$$

(2)　$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ で $\dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1$ であるから，$0 \leqq x \leqq 1$ で　$\dfrac{x^{2n}}{1+x^2} \leqq x^{2n}$

両辺を 0 から 1 まで x について積分すると　$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leqq \int_0^1 x^{2n}dx$

$$\int_0^1 x^{2n}dx = \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

であるから，不等式 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leqq \frac{1}{2n+1}$ が成り立つ。

(4)　$1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}$ であるから，① の両辺を

0 から 1 まで x について積分すると　$\displaystyle\int_0^1 \left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}\right\}dx = \int_0^1 \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}dx$

ここで　$\displaystyle\int_0^1 \left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}\right\}dx = \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (-1)^{k-1}x^{2k-2}dx = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1}\right]_0^1$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

$$\int_0^1 \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}dx \leqq \int_0^1 \frac{1+x^{2n}}{1+x^2}dx$$

$$\int_0^1 \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}dx \geqq \int_0^1 \frac{1-x^{2n}}{1+x^2}dx$$

であるから　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^{2n}}{1+x^2}dx \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \leqq \int_0^1 \frac{1+x^{2n}}{1+x^2}dx$

(2)，(3) から　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \geqq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+1}$

$$\int_0^1 \frac{1+x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leqq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+1}$$

ゆえに　$\displaystyle\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+1} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \leqq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

解説

$3\cos 2x + 7\cos x = 3(2\cos^2 x - 1) + 7\cos x = 6\cos^2 x + 7\cos x - 3$

$\cos x = t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq \pi$ では $-1 \leqq t \leqq 1$ であり，

$$f(x) = 6t^2 + 7t - 3 = (2t+3)(3t-1)$$

$-1 \leqq t \leqq 1$ では $2t+3>0$ であるから

$-1 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　$f(x) \leqq 0$，　$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq 1$ のとき　$f(x) \geqq 0$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ とおくと，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ……① であり，

$0 \leqq x \leqq \alpha$ のとき　$f(x) \geqq 0$，　$\alpha \leqq x \leqq \pi$ のとき　$f(x) \leqq 0$

したがって　$\displaystyle\int_0^\pi |f(x)|dx = \int_0^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\pi \{-f(x)\}dx$

ここで　$\displaystyle\int f(x)dx = \int (3\cos 2x + 7\cos x)dx = \frac{3}{2}\sin 2x + 7\sin x + C$

$= 3\sin x\cos x + 7\sin x + C$　(C は積分定数)

また，① から　$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\displaystyle\int_0^\pi |f(x)|dx = \Big[3\sin x\cos x + 7\sin x\Big]_0^\alpha - \Big[3\sin x\cos x + 7\sin x\Big]_\alpha^\pi$

$= 2(3\sin\alpha\cos\alpha + 7\sin\alpha)$

$= 2\left(3\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{3} + 7\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

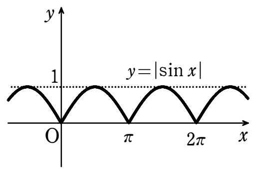
$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{1+e^\pi}{2e^{n\pi}}$

解説

n を自然数とすると，$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ のとき

$|\sin x| = (-1)^{n+1}\sin x$



よって　$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx$

$\displaystyle = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}(-1)^{n+1}\sin x\,dx$

$\displaystyle = (-1)^{n+1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

ここで　$(e^{-x}\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$，

$(e^{-x}\cos x)' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$

よって　$e^{-x}\sin x = -\dfrac{1}{2}\{(e^{-x}\sin x)' + (e^{-x}\cos x)'\}$

この両辺を積分すると　$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$　(C は積分定数)

よって　$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$

$= -\dfrac{e^{-n\pi}}{2}\cdot\cos n\pi + \dfrac{e^{-(n-1)\pi}}{2}\cdot\cos(n-1)\pi$

$= -\dfrac{e^{-n\pi}}{2}\cdot(-1)^n + \dfrac{e^{-(n-1)\pi}}{2}\cdot(-1)^{n-1}$

$= \dfrac{(-1)^{n+1}}{2}e^{-n\pi}(1+e^\pi)$

したがって　$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx = (-1)^{n+1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2}e^{-n\pi}(1+e^\pi) = \frac{1+e^\pi}{2e^{n\pi}}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$m \neq \pm n$ のとき 0，$m = \pm n$ $(\neq 0)$ のとき π，$m=n=0$ のとき 2π

(2)　$\dfrac{n(n+1)}{2}\pi$

解説

(1)　与式の右辺を変形して

$$I_{m,\ n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}dx$$

[1]　$m+n \neq 0$ かつ $m-n \neq 0$ すなわち $m \neq \pm n$ のとき

$$I_{m,\ n} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0$$

[2]　$m+n \neq 0$ かつ $m-n=0$ すなわち $m=n \neq 0$ のとき

$$I_{m,\ n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x + 1\}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + x\right]_0^{2\pi} = \pi$$

[3]　$m+n=0$ かつ $m-n \neq 0$ すなわち $m=-n \neq 0$ のとき

$$I_{m,\ n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{1 + \cos(m-n)x\}dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

[4]　$m+n=0$ かつ $m-n=0$ すなわち $m=n=0$ のとき

$$I_{m,\ n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+1)dx = \int_0^{2\pi}dx = \Big[x\Big]_0^{2\pi} = 2\pi$$

以上から　$m \neq \pm n$ のとき　$I_{m,\ n}=0$，　$m=\pm n$ $(\neq 0)$ のとき　$I_{m,\ n}=\pi$，

$m=n=0$ のとき　$I_{m,\ n}=2\pi$

(2)　(1) [1] から

$$J_n = \int_0^{2\pi}(\cos x + \sqrt{2}\cos 2x + \cdots\cdots + \sqrt{n}\cos nx)^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos^2 x + 2\cos^2 2x + \cdots\cdots + n\cos^2 nx)dx$$

ここで，(1) [2] から，k が自然数のとき　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 kx\,dx = \pi$

よって　$J_n = \pi + 2\pi + \cdots\cdots + n\pi = (1+2+\cdots\cdots+n)\pi = \dfrac{n(n+1)}{2}\pi$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{2}$　(2)　$\log|3\sin x + \cos x| + C$　(C は積分定数)

(3)　$I = \dfrac{3}{20}\pi - \dfrac{1}{10}\log 3$，$J = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{3}{10}\log 3$

解説

(1)　$3I+J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x + \cos x}{3\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}dx = \Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

(2)　$\displaystyle\int\frac{3\cos x - \sin x}{3\sin x + \cos x}dx = \int\frac{(3\sin x + \cos x)'}{3\sin x + \cos x}dx$

$= \log|3\sin x + \cos x| + C$　(C は積分定数)

(3)　(2) から　$3J-I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x - \sin x}{3\sin x + \cos x}dx = \Big[\log|3\sin x + \cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log 3$

$3I+J=\dfrac{\pi}{2}$，$3J-I=\log 3$ から　　$I=\dfrac{3}{20}\pi-\dfrac{1}{10}\log 3$，$J=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{3}{10}\log 3$

5

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{\pi}{4}\log 3$

解説

(1)　$x=\pi-t$ とおくと　　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\pi$
t	$\pi\longrightarrow 0$

証明する等式の左辺を I とすると

$$I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\cdot(-1)dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-I$$

よって　　$I=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

(2)　$J=\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$ とすると，(1) から

$$J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$$

$\cos x=u$ とおくと　　$-\sin x\,dx=du$

x と u の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\pi$
u	$1\longrightarrow -1$

よって　　$J=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_1^{-1}\dfrac{-1}{4-u^2}du=\dfrac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{4-u^2}du$

$$=\pi\int_0^1\frac{1}{4-u^2}du=\frac{\pi}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)du$$

$$=\frac{\pi}{4}\Big[\log(2+u)-\log(2-u)\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}\log 3$$

6

解答　(1)　$I_n=\dfrac{2n}{n+5}I_{n-1}$　$(n\geqq 1)$　　(2)　$I_n=\dfrac{3\cdot n!\cdot 2^{n+8}}{(n+5)!}$

解説

(1)　$n\geqq 1$ のとき

$$I_n=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{(x-1)^5}{5}\right\}'(x+1)^n dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^5}{5}(x+1)^n\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)^5}{5}\cdot n(x+1)^{n-1}dx$$

$$=0-\frac{n}{5}\int_{-1}^{1}(x-1)^5(x+1)^{n-1}dx=-\frac{n}{5}\int_{-1}^{1}(x-1)^4\{(x+1)-2\}(x+1)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{5}\int_{-1}^{1}(x-1)^4(x+1)^n dx+\frac{2}{5}n\int_{-1}^{1}(x-1)^4(x+1)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{5}I_n+\frac{2}{5}nI_{n-1}$$

よって　　$\dfrac{n+5}{5}I_n=\dfrac{2}{5}nI_{n-1}$

$n+5>0$ であるから　　$I_n=\dfrac{2n}{n+5}I_{n-1}$ $(n\geqq 1)$

(2)　$I_n=\dfrac{2n}{n+5}I_{n-1}=\dfrac{2n}{n+5}\cdot\dfrac{2(n-1)}{(n-1)+5}I_{n-2}$

$$=\frac{2n}{n+5}\cdot\frac{2(n-1)}{n+4}\cdot\frac{2(n-2)}{n+3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2\cdot 1}{6}I_0$$

$$=\frac{2^n\{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdots\cdot 2\cdot 1\}}{(n+5)(n+4)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 6}I_0=\frac{2^n\cdot n!\,5!}{(n+5)!}I_0$$

ここで　　$I_0=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-1)^4dx=\left[\dfrac{(x-1)^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\dfrac{2^5}{5}$

よって　　$I_n=\dfrac{2^n\cdot n!\,5!}{(n+5)!}\cdot\dfrac{2^5}{5}=\dfrac{3\cdot n!\cdot 2^{n+8}}{(n+5)!}$

7

解答　(1)　順に $\dfrac{(b-a)^{m+1}}{m+1}$，$-\dfrac{(b-a)^3}{6}$　　(2)　$I(m,\ n)=-\dfrac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$

(3)　$-\dfrac{(b-a)^{11}}{2772}$

解説

(1)　$I(m,\ 0)=\displaystyle\int_a^b(x-a)^m dx=\left[\dfrac{(x-a)^{m+1}}{m+1}\right]_a^b=\dfrac{(b-a)^{m+1}}{m+1}$

$I(1,\ 1)=\displaystyle\int_a^b(x-a)(x-b)dx=\int_a^b\left\{\dfrac{(x-a)^2}{2}\right\}'(x-b)dx$

$$=\left[\frac{(x-a)^2}{2}\cdot(x-b)\right]_a^b-\int_a^b\frac{(x-a)^2}{2}dx=-\left[\frac{(x-a)^3}{6}\right]_a^b=-\frac{(b-a)^3}{6}$$

(2)　$I(m,\ n)=\displaystyle\int_a^b(x-a)^m(x-b)^n dx=\int_a^b\left\{\dfrac{(x-a)^{m+1}}{m+1}\right\}'(x-b)^n dx$

$$=\left[\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}\cdot(x-b)^n\right]_a^b-\frac{n}{m+1}\int_a^b(x-a)^{m+1}(x-b)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$$

(3)　$I(5,\ 5)=-\dfrac{5}{6}I(6,\ 4)=-\dfrac{5}{6}\cdot\left(-\dfrac{4}{7}\right)I(7,\ 3)=\dfrac{5\cdot 4}{6\cdot 7}\cdot\left(-\dfrac{3}{8}\right)I(8,\ 2)$

$$=-\frac{5\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 7\cdot 8}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)I(9,\ 1)=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)I(10,\ 0)$$

$$=-\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\cdot\frac{(b-a)^{11}}{11}=-\frac{(b-a)^{11}}{2772}$$

8

解答　(1)　$1<a<e$　　(2)　$a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

解説

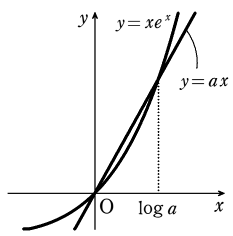
(1)　$y=xe^x$，$y=ax$ から y を消去すると　　$xe^x=ax$

すなわち　$x(e^x-a)=0$

よって　　$x=0$，$\log a$

ゆえに，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが $0<x<1$ の範囲で交点をもつための条件は　　$0<\log a<1$

すなわち　　$1<a<e$



(2)　$f(x)-g(x)=xe^x-ax=x(e^x-a)$

[1]　$0<a\leqq 1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において　　$f(x)-g(x)\geqq 0$

よって　　$h(a)=\displaystyle\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^1 xe^x dx-\int_0^1 ax\,dx$

$$=\int_0^1 x(e^x)'dx-\int_0^1 ax\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx-\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\Big[e^x\Big]_0^1-\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\left[(x-1)e^x-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{a}{2}+1$$

よって，$0<a\leqq 1$ のとき，$h(a)$ は $a=1$ で最小値をとる。

[2]　$1<a<e$ のとき

(1) から，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは $0<x<1$ の範囲で交点をもち，交点の x 座標は　　$\log a$

よって　　$h(a)=\displaystyle\int_0^{\log a}(ax-xe^x)dx+\int_{\log a}^{1}(xe^x-ax)dx$

$$=\left[-(x-1)e^x+\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\log a}+\left[(x-1)e^x-\frac{a}{2}x^2\right]_{\log a}^{1}$$

$$=\left\{-(\log a-1)a+\frac{a}{2}(\log a)^2-1\right\}+\left\{-\frac{a}{2}-(\log a-1)a+\frac{a}{2}(\log a)^2\right\}$$

$$=a(\log a)^2-2a\log a+\frac{3}{2}a-1$$

$$h'(a)=\left\{(\log a)^2+a\cdot(2\log a)\cdot\frac{1}{a}\right\}-2\left(\log a+a\cdot\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{2}=(\log a)^2-\frac{1}{2}$$

$h'(a)=0$ とすると　　$(\log a)^2=\dfrac{1}{2}$　　　すなわち　　$\log a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$1<a<e$ から　　$a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$1<a<e$ における $h(a)$ の増減表は右のようになる。

a	1	$\cdots$	$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\cdots$	e
$h'(a)$	／	$-$	0	$+$	／
$h(a)$	／	↘	極小	↗	／

よって，$1<a<e$ のとき，$h(a)$ は $a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ で最小値をとる。

[3]　$e\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において　　$f(x)-g(x)\leqq 0$

よって　　$h(a)=-\displaystyle\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=\dfrac{a}{2}-1$

ゆえに，$e\leqq a$ のとき，$h(a)$ は $a=e$ で最小値をとる。

[1]～[3] から，$h(a)$ は $a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ で最小値をとる。

よって，求める a の値は　　$a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

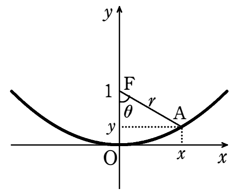
9

解答　(1)　$r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$　　(2)　$\dfrac{4}{\pi}$

解説

(1)　$x=r\sin\theta$，　$y=1-r\cos\theta$

これを $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると



$$1-r\cos\theta=\frac{1}{4}r^2\sin^2\theta$$

$$(\sin^2\theta)r^2+(4\cos\theta)r-4=0$$

$$(1-\cos^2\theta)r^2+(4\cos\theta)r-4=0$$

$$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)r^2+(4\cos\theta)r-4=0$$

$$\{(1+\cos\theta)r-2\}\{(1-\cos\theta)r+2\}=0$$

$r>0$ であるから　$r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}=\int_0^1\frac{2}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx$

$$=\int_0^1\frac{2}{2\cos^2\frac{\pi}{4}x}dx=\int_0^1\frac{dx}{\cos^2\frac{\pi}{4}x}$$

$$=\left[\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}x\right]_0^1=\frac{4}{\pi}$$

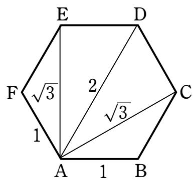
$\boxed{10}$

解答　(1) $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi$　(2) 8

解説

(1) 右の図の正六角形について

$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=\sqrt{3},\ \mathrm{AD}=2,\ \mathrm{AE}=\sqrt{3},\ \mathrm{AF}=1$



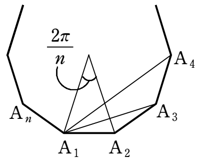
また，正六角形の１つの外角の大きさは $\dfrac{\pi}{3}$ である。

よって　$L(6)=\dfrac{\pi}{3}(1+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+1)$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi$$

(2) 右の図の正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_n$ について

$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k=2\sin\dfrac{k-1}{n}\pi$　$(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$



また，正 n 角形の１つの外角の大きさは $\dfrac{2\pi}{n}$ である。

$\sin\pi=0$ であるから

$$L(n)=\frac{2\pi}{n}\sum_{k=2}^{n}2\sin\frac{k-1}{n}\pi$$

$$=\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k}{n}\pi=\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=4\pi\int_0^1\sin\pi x\,dx=4\Big[-\cos\pi x\Big]_0^1=8$

$\boxed{11}$

解答　(1) 略　(2) $\dfrac{1}{a+1}$

解説

(1) $f(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}$

$x\geqq 0$ であるから　$f'(x)\geqq 0$

よって，$f(x)$ は単調に増加する。

ゆえに，$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq f(0)=0$

したがって　$\log(1+x)\geqq x-\dfrac{x^2}{2}$

また，$g(x)=x-\log(1+x)$ とおくと　$g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$

$x\geqq 0$ であるから　$g'(x)\geqq 0$

よって，$g(x)$ は単調に増加する。

ゆえに，$x\geqq 0$ のとき　$g(x)\geqq g(0)=0$

したがって　$x\geqq\log(1+x)$

以上から　$x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)\leqq x$

(2) $\displaystyle\left\{\sum_{k=1}^{n}\log(n^{a+1}+k^a)\right\}-(a+1)n\log n=\sum_{k=1}^{n}\log(n^{a+1}+k^a)-\sum_{k=1}^{n}\log n^{a+1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n^{a+1}+k^a}{n^{a+1}}=\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a\right\}$$

(1) において，$x=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^a$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ として辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\left(\frac{k}{n}\right)^{2a}\right\}\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a\right\}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a$$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a-\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2a}\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a\right\}\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a=\int_0^1x^a dx=\frac{1}{a+1}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2a}=0\times\int_0^1x^{2a}dx=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a\right\}=\frac{1}{a+1}$

したがって，求める極限は　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\sum_{k=1}^{n}\log(n^{a+1}+k^a)\right\}-(a+1)n\log n\right]=\frac{1}{a+1}$

$\boxed{12}$

解答　(1) 略　(2) e　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{1-k}$

解説

(1) $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}\leqq 1\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdots\cdot1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

よって，$0<a_n\leqq\dfrac{1}{n}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(2) $\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

(3) $\displaystyle\log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log\frac{a_{kn}}{a_n}=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\times\frac{n^n}{n!}\right\}$

$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{kn\cdot(kn-1)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+1)\cdot n!}{k^{kn}\cdot n^{kn}}\times\frac{n^n}{n!}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot kn}{k^{kn}\cdot n^{(k-1)n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{k^{kn}}\times\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{kn}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\log\left[\frac{1}{k^{kn}}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left\{1+\frac{(k-1)n}{n}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\frac{1}{k^{kn}}+\sum_{l=1}^{(k-1)n}\log\left(1+\frac{l}{n}\right)\right\}=-k\log k+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{(k-1)n}\log\left(1+\frac{l}{n}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{(k-1)n}\log\left(1+\frac{l}{n}\right)\right\}=\int_0^{k-1}\log(1+x)\,dx$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=-k\log k+\int_0^{k-1}\log(1+x)dx$$

$$=-k\log k+\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^{k-1}$$

$$=-k\log k+k\log k-k+1=1-k$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{1-k}$

$\boxed{13}$

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1) $f(t)=e^t-(1+t)$ とおくと　$f'(t)=e^t-1$

$t\geqq 0$ のとき $f'(t)\geqq 0$ であるから，$f(t)$ は単調に増加する。

また，$f(0)=0$ であるから　$f(t)\geqq 0$

よって，$t\geqq 0$ のとき　$e^t\geqq 1+t$

すべての実数 x に対して，$x^2\geqq 0$ であるから　$e^{x^2}\geqq 1+x^2>0$

したがって　$e^{-x^2}\leqq\dfrac{1}{1+x^2}$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において，$x\geqq x^2$ であるから　$e^{-x}\leqq e^{-x^2}$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，(1) から

$$e^{-x}\leqq e^{-x^2}\leqq\frac{1}{1+x^2}\quad\cdots\cdots①$$

$0\leqq x\leqq 1$ において，① の等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1e^{-x}dx<\int_0^1e^{-x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで　$\displaystyle\int_0^1e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=-\frac{1}{e}+1=\frac{e-1}{e}$

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$

したがって

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

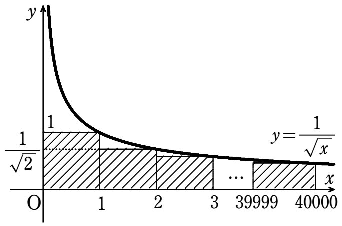
ゆえに　$\displaystyle\frac{e-1}{e}<\int_0^1e^{-x^2}dx<\frac{\pi}{4}$

$\boxed{14}$

解答　398

解説

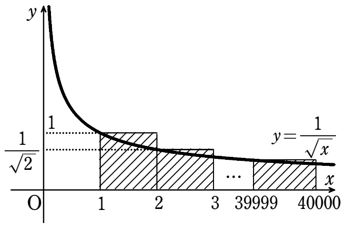
$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}$ は，次の図の斜線部分の面積の和に等しい。



図から　$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}<\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

よって　$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\left[2\sqrt{x}\right]_1^{40000}=399$　……①

また，次の図から　$\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{39999}}$



ゆえに　$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}>\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{\sqrt{40000}}=398+\frac{1}{200}$　……②

①，②から　$398+\frac{1}{200}<\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<399$

したがって，$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は　398

15

解答　(1) $\frac{\pi}{4}$　(2) 略　(3) $\frac{\pi}{4}$

解説

(1)　$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

よって　$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(2)　$\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}=\frac{1-(-x^2)^{k+1}}{1-(-x^2)}=\frac{1-(-x^2)^{k+1}}{1+x^2}$

よって　$\frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}=\frac{1-\{1-(-x^2)^{k+1}\}}{1+x^2}=\frac{(-x^2)^{k+1}}{1+x^2}=\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}$

$x^2\geqq0$ であるから　$1+x^2\geqq1$　　よって　$0<\frac{1}{1+x^2}\leqq1$

$x^{2k+2}=(x^2)^{k+1}\geqq0$ であるから　$0<\frac{x^{2k+2}}{1+x^2}\leqq x^{2k+2}$

k が偶数のとき，$(-1)^{k+1}=-1$ であるから　$-x^{2k+2}\leqq\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}<0$

k が奇数のとき，$(-1)^{k+1}=1$ であるから　$0<\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}\leqq x^{2k+2}$

よって　$-x^{2k+2}\leqq\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}\leqq x^{2k+2}$

ゆえに　$-x^{2k+2}\leqq\frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}\leqq x^{2k+2}$

(3)　(2) の不等式は $0\leqq x\leqq1$ においても成り立ち，等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1(-x^{2k+2})dx<\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}\right\}dx<\int_0^1x^{2k+2}dx$$

ここで　$\int_0^1x^{2k+2}dx=\left[\frac{x^{2k+3}}{2k+3}\right]_0^1=\frac{1}{2k+3}$

(1) より　$\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}\right\}dx=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

よって　$-\frac{1}{2k+3}<\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}<\frac{1}{2k+3}$

ゆえに　$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2k+3}<\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2k+3}$

$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2k+3}\right)=\frac{\pi}{4}$，$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2k+3}\right)=\frac{\pi}{4}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

注意　$(-x^2)^{n-1}$ は $n=1$ のとき 1 として考えた。