

1

解答 (1) 2 (2) 2 (3) 3 (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{5}$

解説

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 4) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} \left(2 - \frac{10}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} \cdot \frac{2x-10}{x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} \cdot \frac{2(x-5)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{x} = \frac{2}{5}$

2

解答 (1) 12 (2) 12

解説

(1) 求める平均変化率は

$$\frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{(3 \cdot 5^2 - 5) - (3 \cdot (-1)^2 - 5)}{6} = \frac{72}{6} = 12$$

(2) $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 5}{h} - (3 \cdot 2^2 - 5)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4h+h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h(4+h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} 3(4+h) = 12$

3

解答 (1) -3 (2) $2x-3$ (3) $3x^2-3$

解説

(1) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-3(x+h) + 4\} - \{-3x + 4\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-3) = -3$

(2) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2 - 3(x+h) + 5\} - \{x^2 - 3x + 5\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x-3)h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x-3+h) = 2x-3$

(3) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^3 - 3(x+h)\} - \{x^3 - 3x\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2-3)h + 3xh^2 + h^3}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2-3+3xh+h^2) = 3x^2-3$

4

解答 (1) $f'(x) = 6x - 5$ (2) $f'(x) = 3x^2 - 8x$ (3) $f'(x) = 4x^3 - 4x + 7$
 (4) $f'(x) = 9x^2 + 6x - 2$ (5) $f'(x) = 72x^2 + 72x + 18$

解説

(1) $f'(x) = 3(x^2)' - 5(x) + (6)' = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x - 5$

(2) $f'(x) = (x^3)' - 4(x^2)' - (1)' = 3x^2 - 4 \cdot 2x - 0 = 3x^2 - 8x$

(3) $f'(x) = (x^4)' - 2(x^2)' + 7(x)' - (3)' = 4x^3 - 2 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 = 4x^3 - 4x + 7$

(4) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ であるから
 $f'(x) = 3(x^3)' + 3(x^2)' - 2(x)' - (2)' = 3 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 - 0 = 9x^2 + 6x - 2$

(5) $f(x) = 3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) = 24x^3 + 36x^2 + 18x + 3$ であるから
 $f'(x) = 24(x^3)' + 36(x^2)' + 18(x)' + (3)' = 24 \cdot 3x^2 + 36 \cdot 2x + 18 \cdot 1 + 0 = 72x^2 + 72x + 18$

別解 積や累乗の形の関数の微分の公式を利用すると

(4) $f'(x) = (x+1)'(3x^2-2) + (x+1)(3x^2-2)'$
 $= 1 \cdot (3x^2-2) + (x+1) \cdot 6x = 9x^2 + 6x - 2$

(5) $f'(x) = 3 \cdot 3(2x+1)^{3-1} \cdot (2x+1)'$
 $= 9(2x+1)^2 \cdot 2 = 18(2x+1)^2$

5

解答 $f(x) = -3x^2 + 2x + 15$

解説

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと $f'(x) = 2ax + b$

$f'(1) = -4$ より $2a + b = -4$ ……①

$f'(-1) = 8$ より $-2a + b = 8$ ……②

$f(3) = -6$ より $9a + 3b + c = -6$ ……③

①, ② を解くと $a = -3, b = 2$

$a = -3, b = 2$ を③に代入して $-27 + 6 + c = -6$ よって $c = 15$

したがって $f(x) = -3x^2 + 2x + 15$

6

解答 $f(x) = -2x^2 + 2x - 5$

解説

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると $f'(x) = 2ax + b$

与えられた等式に代入すると

$$2(ax^2 + bx + c) + x(2ax + b) = -8x^2 + 6x - 10$$

整理して $4ax^2 + 3bx + 2c = -8x^2 + 6x - 10$

これが x についての恒等式であるから、両辺の係数を比較して

$$4a = -8, 3b = 6, 2c = -10$$

よって $a = -2, b = 2, c = -5$

したがって $f(x) = -2x^2 + 2x - 5$

1

解答 (1) 3 (2) 4 (3) 3 (4) $\frac{7}{5}$ (5) $\frac{1}{6}$ (6) $-\frac{1}{3}$

解説

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x}{x + 2} = \frac{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)}{-1 + 2} = 4$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

(4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x+2} = \frac{3+4}{3+2} = \frac{7}{5}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x-9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$

(6) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \left(\frac{12}{x-3} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \cdot \frac{2(x+3)}{x-3}$
 $= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{x-3} = \frac{2}{-3-3} = -\frac{1}{3}$

2

解答 (1) 4 (2) ① 2 ② 10

解説

(1) $\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{\{4(1+h) - 1\} - (4 \cdot 1 - 1)}{h} = \frac{4h}{h} = 4$

(2) ① $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h) + 3 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2$

② $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2(2+h) - (2^3 - 2 \cdot 2)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 10h}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 6h + 10) = 10$

3

解答 (1) $y' = 0$ (2) $y' = 3x^2 + 2$ (3) $y' = -\frac{1}{x^2}$ (4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

解説

(1) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5-5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$

(2) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^3 + 2(x+h)\} - \{x^3 + 2x\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2) = 3x^2 + 2$

(3) $\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} = \frac{-h}{(x+h)x}$ であるから

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

4

解答 (1) $y' = x^2 - x$ (2) $y' = -5x^4 + 3x^2$ (3) $y' = 4x + 8$

(4) $y' = 6x^2 + 2x$ (5) $y' = 3x^2 + 12x + 12$

解説

(1) $y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x = x^2 - x$

(2) $y' = -5x^4 + 3x^2$

(3) $y = 2x^2 + 8x - 10$ であるから $y' = 2 \cdot 2x + 8 = 4x + 8$

(4) $y = 2x^3 + x^2 + 1$ であるから $y' = 2 \cdot 3x^2 + 2x = 6x^2 + 2x$

(5) $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ であるから $y' = 3x^2 + 6 \cdot 2x + 12 = 3x^2 + 12x + 12$

5

解答 (1) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ (2) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

解説

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とすると $f'(x) = 2ax + b$

$f'(0) = 2$ より $b = 2$

$f'(1) = 4$ より $2a + b = 4$

$f(2) = 6$ より $4a + 2b + c = 6$

よって $a = 1, b = 2, c = -2$ (これは $a \neq 0$ を満たす)

したがって $f(x) = x^2 + 2x - 2$

(2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とすると $f'(x) = 2ax + b$

$f'(2) = -5$ より $4a + b = -5$

$f'(-1) = 7$ より $-2a + b = 7$

$f(1) = 3$ より $a + b + c = 3$

よって $a = -2, b = 3, c = 2$ (これは $a \neq 0$ を満たす)

したがって $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

6

解答 $f(x) = x^2 + x$

解説

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと $f'(x) = 2ax + b$

これらを与えられた等式に代入して

$$x(2ax + b) + x^2 + 2x = 3(ax^2 + bx + c)$$

整理すると $(a-1)x^2 + 2(b-1)x + 3c = 0$

これが x についての恒等式であるから $a-1=0, 2(b-1)=0, 3c=0$

よって $a=1, b=1, c=0$ したがって $f(x) = x^2 + x$

1

解答 (ア) 14 (イ) $\frac{2}{3}$

解説

$f(2) = 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 7 = 47,$

$f(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 7 = 5$

よって, $x = -1$ から $x = 2$ までの平均変化率は

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{47 - 5}{3} = \frac{42}{3} = 14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また $f'(x) = 3x^2 + 10x + 6$

ゆえに, $x = a$ ($-1 < a < 2$) における微分係数 $f'(a)$ が $\textcircled{1}$ の値に等しいとすると

$$3a^2 + 10a + 6 = 14$$

整理して $3a^2 + 10a - 8 = 0$ よって $(a+4)(3a-2) = 0$

$-1 < a < 2$ であるから $a = \frac{2}{3}$

2

解答 (1) $\frac{dy}{dt} = 4t$ (2) $\frac{dS}{dr} = 2\pi r$ (3) $\frac{dV}{dt} = 0.02V_0$ (4) $\frac{dt}{dx} = k(1-12x)$

解説

(1) $\frac{dy}{dt} = 2 \cdot 2t = 4t$

(2) $\frac{dS}{dr} = \pi \cdot 2r = 2\pi r$

(3) $\frac{dV}{dt} = 0.02V_0$

(4) $t = k(2+x-6x^2)$

よって $\frac{dt}{dx} = k(1-6 \cdot 2x) = k(1-12x)$

3

解答 (1) $y' = 9x^2 - 2x$ (2) $y' = 3x^2 - 5$ (3) $y' = 3x^2 + 12x + 12$

(4) $y' = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2$ (5) $y' = 6x^5 - 16x^3 + 8x$

(6) $y' = 27x^2 + 42x + 16$

解説

(1) $y = 3x^3 - x^2$ よって $y' = 9x^2 - 2x$

(2) $y = x^3 - 5x + 4$ よって $y' = 3x^2 - 5$

(3) $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ よって $y' = 3x^2 + 12x + 12$

(4) $y = (x^2)^2 + x^2 + 1^2 + 2x^2 \cdot (-x) + 2(-x) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot x^2$
 $= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

よって $y' = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2$

(5) $y = (x^3)^2 - 2x^3 \cdot 2x + (2x)^2 = x^6 - 4x^4 + 4x^2$

よって $y' = 6x^5 - 16x^3 + 8x$

(6) $y = (9x^2 + 12x + 4)(x+1) = 9x^3 + 21x^2 + 16x + 4$

よって $y' = 27x^2 + 42x + 16$

別解 (1) $y' = (x^2)'(3x-1) + x^2(3x-1)'$
 $= 2x(3x-1) + x^2 \cdot 3 = 9x^2 - 2x$

(2) $y' = (x-1)'(x^2+x-4) + (x-1)'(x^2+x-4)'$
 $= x^2 + x - 4 + (x-1)(2x+1) = x^2 + x - 4 + 2x^2 - x - 1 = 3x^2 - 5$

(3) $y' = \{(x+2)^3\}' = 3(x+2)^2 \cdot 1 = 3(x+2)^2$

(4) $y' = \{(x^2-x+1)^2\}' = 2(x^2-x+1)(x^2-x+1)'$
 $= 2(x^2-x+1)(2x-1)$

(5) $y' = \{(x^3-2x)^2\}' = 2(x^3-2x)(x^3-2x)' = 2(x^3-2x)(3x^2-2) = 2x(x^2-2)(3x^2-2)$

(6) $y' = \{(3x+2)^2\}'(x+1) + (3x+2)^2(x+1)'$
 $= \{2(3x+2) \cdot 3\}'(x+1) + (3x+2)^2$
 $= (3x+2)\{6(x+1) + (3x+2)\} = (3x+2)(9x+8)$

4

解答 (1) $n = 2$ (2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$

解説

(1) $k \neq 0$ から, 右辺の次数は 3
 $n = 0$ のとき, 左辺の次数は 0 となり, 右辺の次数 3 と一致しないから不適。
 $n \geq 1$ のとき, $f'(x)$ は $(n-1)$ 次式であるから, $x^2 f'(x)$ は $(n+1)$ 次式である。

よって, 左辺の次数は $n+1$

ゆえに, $n+1 = 3$ から $n = 2$

(2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とすると $f'(x) = 2ax + b$

与えられた等式に代入すると

$$(ax^2 + bx + c) + x^2(2ax + b) = kx^3 + k^2x + 1$$

整理して $2ax^3 + (a+b)x^2 + bx + c = kx^3 + k^2x + 1$

この等式が常に成り立つとき

$$2a = k \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}, \quad b = k^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}, \quad c = 1$$

$\textcircled{1}, \textcircled{3}$ から $b = 4a^2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$

$\textcircled{2}, \textcircled{4}$ から $a + 4a^2 = 0$ すなわち $a(4a+1) = 0$

$a \neq 0$ であるから $a = -\frac{1}{4}$ $\textcircled{2}$ から $b = \frac{1}{4}$

よって $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$

1

解答 $a=2, b=-7$

解説

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x - 3) = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 3} (ax^2 + bx + 3) = 0$$

ゆえに $3a + b + 1 = 0$ よって $b = -3a - 1$ ……①

ゆえに $ax^2 + bx + 3 = ax^2 - (3a + 1)x + 3 = (x - 3)(ax - 1)$

このとき $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 + bx + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(ax - 1)}{(x - 3)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax - 1}{x + 1} = \frac{3a - 1}{4}$

$\frac{3a - 1}{4} = \frac{5}{4}$ から $a = 2$ ① から $b = -7$

2

解答 (1) $2f'(a)$ (2) $5f'(a)$

解説

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{f(a + 2h) - f(a)}{2h} = 2f'(a)$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 3h) - f(a - 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 3h) - f(a) - [f(a - 2h) - f(a)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[3 \cdot \frac{f(a + 3h) - f(a)}{3h} + 2 \cdot \frac{f(a - 2h) - f(a)}{-2h} \right] = 3f'(a) + 2f'(a) = 5f'(a)$

3

解答 $nx - n$

解説

$x^n - 1$ を $(x - 1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $px + q$ とすると、次の恒等式が成り立つ。

$$x^n - 1 = (x - 1)^2 Q(x) + px + q \text{ ……①}$$

両辺を x で微分すると

$$nx^{n-1} = 2(x - 1)Q(x) + (x - 1)^2 Q'(x) + p \text{ ……②}$$

①, ② に $x = 1$ を代入すると $0 = p + q, n = p$

よって $p = n, q = -n$

したがって、求める余りは $nx - n$

別解 $x - 1 = X$ とおくと $x = X + 1$

二項定理により $x^n - 1 = (X + 1)^n - 1$

$$= X^n + {}_n C_1 X^{n-1} + \dots + {}_n C_{n-2} X^2 + {}_n C_{n-1} X + 1 - 1$$

これを $(x - 1)^2$ すなわち X^2 で割ると、余りは ${}_n C_{n-1} X = n(x - 1)$

1

解答 (1) $y = 2x + 2$ (2) $y = -4x + 6\sqrt{3}, y = -4x - 6\sqrt{3}$

解説

$f(x) = -x^3 + 5x$ とすると $f'(x) = -3x^2 + 5$

(1) $f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 5 = 2$ であるから、求める接線の方程式は $y - 4 = 2(x - 1)$ すなわち $y = 2x + 2$

(2) 接点の座標を $(a, -a^3 + 5a)$ とすると、傾きが -4 であるから $f'(a) = -4$ すなわち $-3a^2 + 5 = -4$ これを解くと $a = \pm\sqrt{3}$

よって、接点の座標は $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

したがって、求める接線の方程式は

$$y - 2\sqrt{3} = -4(x - \sqrt{3}), y + 2\sqrt{3} = -4(x + \sqrt{3})$$

すなわち $y = -4x + 6\sqrt{3}, y = -4x - 6\sqrt{3}$

2

解答 (1) $y = 2x - 2, y = -6x + 22$ (2) $y = 4, y = 9x - 14$

解説

(1) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ とすると $f'(x) = -2x + 4$

放物線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - (-a^2 + 4a - 3) = (-2a + 4)(x - a)$$

すなわち $y = -2(a - 2)x + a^2 - 3$ ……①

この直線が点 $(3, 4)$ を通るから $4 = -2(a - 2) \cdot 3 + a^2 - 3$

整理すると $a^2 - 6a + 5 = 0$

ゆえに $(a - 1)(a - 5) = 0$ よって $a = 1, 5$

求める接線の方程式は、 a の値を ① に代入して

$$a = 1 \text{ のとき } y = 2x - 2, a = 5 \text{ のとき } y = -6x + 22$$

(2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 3$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - (a^3 - 3a + 2) = (3a^2 - 3)(x - a)$$

すなわち $y = (3a^2 - 3)x - 2a^3 + 2$ ……①

この直線が点 $(2, 4)$ を通るから $4 = (3a^2 - 3) \cdot 2 - 2a^3 + 2$

整理すると $a^3 - 3a^2 + 4 = 0$ ゆえに $(a + 1)(a - 2)^2 = 0$

よって $a = -1, 2$

求める接線の方程式は、 a の値を ① に代入して

$$a = -1 \text{ のとき } y = 4, a = 2 \text{ のとき } y = 9x - 14$$

3

解答 $y = 2x + 1, y = -4x + 4$

解説

$y = -x^2$ に対して $y' = -2x$

よって、放物線 $y = -x^2$ 上の点 $(a, -a^2)$ における接線の方程式は

$$y - (-a^2) = -2a(x - a)$$

すなわち $y = -2ax + a^2$ ……①

この直線が放物線 $y = x^2 - 2x + 5$ にも接するための条件は、2次方程式

$$x^2 - 2x + 5 = -2ax + a^2 \text{ すなわち}$$

$$x^2 + 2(a - 1)x - a^2 + 5 = 0 \text{ ……②が重解をもつこと}$$

である。

ゆえに、②の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (a - 1)^2 - 1 \cdot (-a^2 + 5) = 2a^2 - 2a - 4 = 2(a + 1)(a - 2)$$

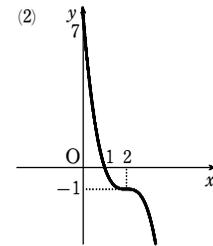
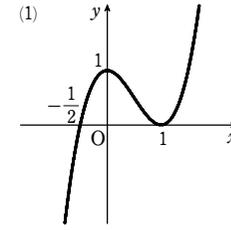
$D = 0$ から $(a + 1)(a - 2) = 0$ よって $a = -1, 2$

この値を ① に代入して、求める共通接線の方程式は $y = 2x + 1, y = -4x + 4$

4

解答 (1) $x = 0$ で極大値 1, $x = 1$ で極小値 0, [図]

(2) 極値をもたない, [図]



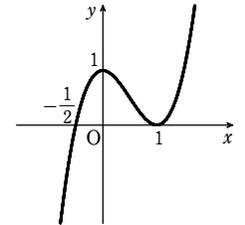
解説

(1) $y' = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$

$y' = 0$ とすると $x = 0, 1$

y の増減表は次のようになる。

x	……	0	……	1	……
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大	↘	極小	↗
		1		0	



よって、 y は $x = 0$ で極大値 1, $x = 1$ で極小値 0 をとる。

また、グラフは図のようになる。

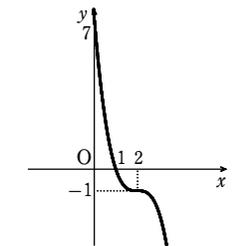
(2) $y' = -3x^2 + 12x - 12 = -3(x^2 - 4x + 4)$

$$= -3(x - 2)^2$$

$y' = 0$ とすると $x = 2$

y の増減表は次のようになる。

x	……	2	……
y'	-	0	-
y	↘	-1	↘



よって、 y は常に減少し、極値をもたない。

第2講 例題

第2講 例題演習

また、グラフは図のようになる。

5

解答 (1) $a < 3, 6 < a$ (2) $0 \leq k \leq 6$

解説

(1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3a - 6$

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は、 $f'(x)$ の符号が変化することである。

ゆえに、 $f'(x) = 0$ すなわち $3x^2 + 2ax + 3a - 6 = 0$ ……① が異なる2つの実数解をもつ。

①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(3a - 6) > 0 \quad \text{整理して} \quad (a - 3)(a - 6) > 0$$

これを解いて $a < 3, 6 < a$

(2) $f'(x) = 6x^2 + 2kx + k$

$f(x)$ が極値をもたないための必要十分条件は、 $f'(x)$ の符号が変化しないことである。

ゆえに、 $f'(x) = 0$ すなわち $6x^2 + 2kx + k = 0$ ……② が重解をもつか実数解をもたない。

②の判別式を D とすると $\frac{D}{4} = k^2 - 6k \leq 0$

ゆえに $k(k - 6) \leq 0$ これを解いて $0 \leq k \leq 6$

1

解答 (1) $y = 19x - 45$ (2) $y = 9x - 5, y = 9x + 27$

解説

(1) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$

ゆえに $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 2 = 19$

よって、点 (3, 12) における接線の方程式は

$$y - 12 = 19(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad y = 19x - 45$$

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2$ とすると $f'(x) = 3x^2 + 6x$

点 $(a, a^3 + 3a^2)$ における接線の方程式は

$$y - (a^3 + 3a^2) = (3a^2 + 6a)(x - a)$$

すなわち $y = (3a^2 + 6a)x - 2a^3 - 3a^2$ ……①

この直線の傾きが9であるとして $3a^2 + 6a = 9$

整理して $a^2 + 2a - 3 = 0$ ゆえに $(a - 1)(a + 3) = 0$

したがって $a = 1, -3$

①から $a = 1$ のとき $y = 9x - 5, a = -3$ のとき $y = 9x + 27$

よって、求める直線の方程式は $y = 9x - 5, y = 9x + 27$

2

解答 (1) $y = 7x, (2, 14); y = -x, (-2, 2)$

(2) $y = 5x - 6, (3, 9); y = -3x + 2, (-1, 5)$

(3) $y = 3x - 1, (1, 2); y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}, (-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$

(4) $y = 0, (-1, 0); y = 6x - 10, (3, 8)$

解説

(1) $y' = 2x + 3$

接点の座標を $(a, a^2 + 3a + 4)$ とすると、接線の方程式は

$$y - (a^2 + 3a + 4) = (2a + 3)(x - a)$$

すなわち $y = (2a + 3)x - a^2 + 4$ ……①

これが点 (0, 0) を通るから

$$0 = (2a + 3) \cdot 0 - a^2 + 4$$

これを解いて $a = \pm 2$

$a = 2$ のとき、接点の座標は (2, 14) また、①から、接線の方程式は $y = 7x$

$a = -2$ のとき、接点の座標は (-2, 2) また、①から、接線の方程式は $y = -x$

(2) $y' = 2x - 1$

接点の座標を $(a, a^2 - a + 3)$ とすると、接線の方程式は

$$y - (a^2 - a + 3) = (2a - 1)(x - a)$$

すなわち $y = (2a - 1)x - a^2 + 3$ ……①

これが点 (1, -1) を通るから

$$-1 = (2a - 1) \cdot 1 - a^2 + 3$$

よって $a^2 - 2a - 3 = 0$ これを解いて $a = 3, -1$

$a = 3$ のとき、接点の座標は (3, 9) また、①から、接線の方程式は $y = 5x - 6$

$a = -1$ のとき、接点の座標は (-1, 5) また、①から、接線の方程式は $y = -3x + 27$

(3) $y' = 3x^2$

接点の座標を $(a, a^3 + 1)$ とすると、接線の方程式は

$$y - (a^3 + 1) = 3a^2(x - a)$$

すなわち $y = 3a^2x - 2a^3 + 1$ ……①

これが点 (1, 2) を通るから

$$2 = 3a^2 \cdot 1 - 2a^3 + 1$$

よって $2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$

左辺を因数分解すると $(a - 1)^2(2a + 1) = 0$

したがって $a = 1, -\frac{1}{2}$

$a = 1$ のとき、接点の座標は (1, 2) また、①から、接線の方程式は $y = 3x - 1$

$a = -\frac{1}{2}$ のとき、接点の座標は $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$

また、①から、接線の方程式は $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

(4) $y' = \frac{3}{8}(x + 1)^2$

接点の座標を $(a, \frac{1}{8}(a + 1)^3)$ とすると、接線の方程式は

$$y - \frac{1}{8}(a + 1)^3 = \frac{3}{8}(a + 1)^2(x - a)$$

すなわち $y = \frac{3}{8}(a + 1)^2x + \frac{1}{8}(a + 1)^2(-2a + 1)$ ……①

これが点 $(\frac{5}{3}, 0)$ を通るから

$$0 = \frac{3}{8}(a + 1)^2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{8}(a + 1)^2(-2a + 1)$$

よって $5(a + 1)^2 + (a + 1)^2(-2a + 1) = 0$

ゆえに $(a + 1)^2(a - 3) = 0$ したがって $a = -1, 3$

$a = -1$ のとき、接点の座標は (-1, 0) また、①から、接線の方程式は $y = 0$

$a = 3$ のとき、接点の座標は (3, 8) また、①から、接線の方程式は $y = 6x - 10$

3

解答 $y = 2x - 1, y = 4x - 4$

解説

$y = x^2$ から $y' = 2x$

$y = -x^2 + 6x - 5$ から $y' = -2x + 6$

放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 \quad \dots\dots \text{①}$$

また、放物線 $y = -x^2 + 6x - 5$ 上の点 $(b, -b^2 + 6b - 5)$ における接線の方程式は

$$y - (-b^2 + 6b - 5) = (-2b + 6)(x - b)$$

すなわち $y = (-2b + 6)x + b^2 - 5 \quad \dots\dots \text{②}$

①, ②が一致するとき $2a = -2b + 6 \quad \dots\dots \text{③}, -a^2 = b^2 - 5 \quad \dots\dots \text{④}$

③から $a = -b + 3 \quad \dots\dots \text{⑤}$

これを④に代入して $-(-b + 3)^2 = b^2 - 5$

整理すると $b^2 - 3b + 2 = 0$ これを解いて $b = 1, 2$

⑤から $b = 1$ のとき $a = 2, b = 2$ のとき $a = 1$

求める共通接線の方程式は、①から、 $a = 1$ のとき $y = 2x - 1$

$$a = 2 \text{ のとき } y = 4x - 4$$

別解 $y = x^2$ から $y' = 2x$

放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式は

$y - a^2 = 2a(x - a)$ すなわち $y = 2ax - a^2$ ……⑥

これが放物線 $y = -x^2 + 6x - 5$ にも接するとき、方程式

$2ax - a^2 = -x^2 + 6x - 5$ すなわち $x^2 + 2(a-3)x - a^2 + 5 = 0$

の判別式 D について、 $D=0$ が成り立つ。

すなわち $\frac{D}{4} = (a-3)^2 - (-a^2 + 5) = 0$

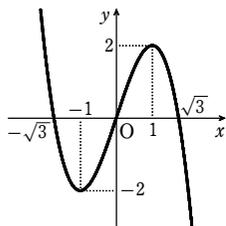
よって $a^2 - 3a + 2 = 0$ これを解いて $a = 1, 2$

求める共通接線の方程式は、⑥から、 $a=1$ のとき $y = 2x - 1$

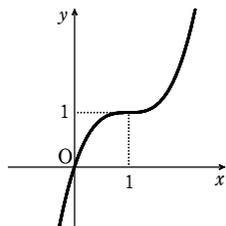
$a=2$ のとき $y = 4x - 4$

4

解答 (1)



(2)



解説

(1) $y' = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = \pm 1$

y の増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	1	…
y'	-	0	+	0	-
y	↘	-2	↗	2	↘

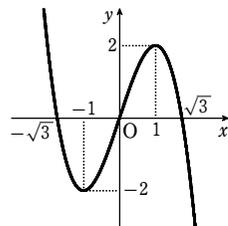
よって、区間 $-1 \leq x \leq 1$ で単調に増加し、

区間 $x \leq -1, 1 \leq x$ で単調に減少する。

また、 $x=1$ で極大値 2 をとり、

$x=-1$ で極小値 -2 をとる。

ゆえに、グラフは[図]のようになる。



(2) $y' = 3x^2 - 6x + 3$

$y' = 0$ とすると $x = 1$

y の増減表は次のようになる。

x	…	1	…
y'	+	0	+
y	↗	1	↗

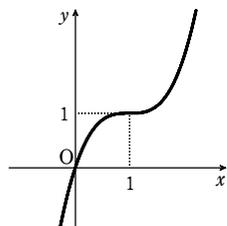
よって、すべての実数の範囲で

$y' \geq 0$ であるから、

y は単調に減少する。

よって、極値はない。

ゆえに、グラフは[図]のようになる。



5

解答 (1) $a < -1, 2 < a$ (2) $-9 \leq a \leq 0$

解説

(1) $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3(a+2)$

$f(x)$ が極値をもつための条件は、2次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつことである。すなわち、 $f'(x) = 0$ の判別式 D について $D > 0$

よって $\frac{D}{4} = (3a)^2 - 3 \cdot 3(a+2) > 0$ ゆえに $a^2 - a - 2 > 0$

これを解いて $a < -1, 2 < a$

(2) $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 3a$

$f(x)$ が単調に増加するための条件は、 $f'(x) \geq 0$

すなわち、2次方程式 $f'(x) = 0$ が実数解をもたないか、重解をもつことである。

よって、 $f'(x) = 0$ の判別式 D について $D \leq 0$

ゆえに $\frac{D}{4} = a^2 - 3 \cdot (-3a) \leq 0$ よって $a^2 + 9a \leq 0$

これを解いて $-9 \leq a \leq 0$

1

解答 (1) $y = x$ (2) $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$

解説

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

よって、点 (1, 1) における接線の傾きは

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -1$

ゆえに、法線の傾きは1である。

したがって、求める法線の方程式は

$y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$ すなわち $y = x$

(2) 求める共有点の x 座標は、次の方程式の $x=1$ 以外の実数解である。

$x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = x$

整理して $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

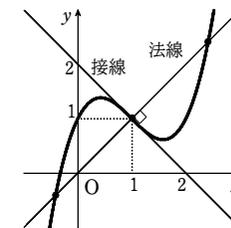
よって $(x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

したがって、求める点の x 座標は、

$x^2 - 2x - 1 = 0$ を解いて $x = 1 \pm \sqrt{2}$

ゆえに、求める共有点の座標は

$(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$



2

解答 $a = \pm 2$

解説

$f(x) = x^2 + 2, g(x) = x^2 + ax + 3$ とおくと

$f'(x) = 2x, g'(x) = 2x + a$

P の x 座標を p とすると、条件から

$f(p) = g(p), f'(p)g'(p) = -1$

$f(p) = g(p)$ から

$p^2 + 2 = p^2 + ap + 3$ すなわち $ap = -1$ ……①

$f'(p)g'(p) = -1$ から

$2p(2p+a) = -1$ すなわち $4p^2 + 2ap = -1$ ……②

①を②に代入して $4p^2 + 2 \cdot (-1) = -1$

よって $p^2 = \frac{1}{4}$ ゆえに $p = \pm \frac{1}{2}$

①から $p = \frac{1}{2}$ のとき $a = -2, p = -\frac{1}{2}$ のとき $a = 2$

したがって $a = \pm 2$

3

解答 $a = 2, b = 3, c = -8, d = -1$

解説

$f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = x^3 + dx$ とおくと $f'(x) = 2ax + b, g'(x) = 3x^2 + d$

放物線 $y = f(x)$ が点 (1, -3) を通るから $f(1) = -3$

放物線 $y = f(x)$ が点 (2, 6) で曲線 $y = g(x)$ と共通の接線をもつから

$f(2) = 6, g(2) = 6, f'(2) = g'(2)$

$f(1) = -3$ から $a + b + c = -3$ ……①

$f(2) = 6$ から $4a + 2b + c = 6$ ……②

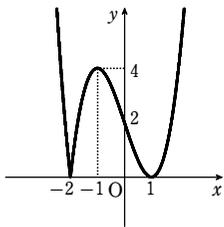
$g(2) = 6$ から $8 + 2d = 6$ ……③

第2講 レベルA

$f'(2) = g'(2)$ から $4a + b = 12 + d$ ……④
 ③から $d = -1$ これを④に代入すると $4a + b = 11$ ……⑤
 ②-①から $3a + b = 9$ ……⑥
 ⑤, ⑥を連立して解くと $a = 2, b = 3$
 $a = 2, b = 3$ を①に代入して c の値を求めると $c = -8$
 以上から $a = 2, b = 3, c = -8, d = -1$

4

【解答】

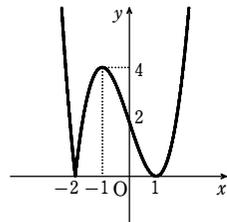


【解説】

[1] $x < -2$ のとき $y = -(x+2)(x-1)^2 = -x^3 + 3x - 2$
 ゆえに $y' = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$
 $x < -2$ では、常に $y' < 0$ であるから、 y は単調に減少する。
 [2] $x \geq -2$ のとき $y = (x+2)(x-1)^2 = x^3 - 3x + 2$
 ゆえに $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$
 $y' = 0$ とすると $x = \pm 1$
 $x \geq -2$ における y の増減表は次のようになる。

x	-2	…	-1	…	1	…
y'		+	0	-	0	+
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

以上から、グラフは右の図のようになる。



第2講 レベルB

1

【解答】 $y = -x + 2$

【解説】

$y = \frac{1}{4}x^2$ から $y' = \frac{1}{2}x$

放物線上の点 $(t, \frac{1}{4}t^2)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2}tx - \frac{1}{4}t^2$$

これが点 $(-2, -2)$ を通るとき $-2 = \frac{1}{2}t \cdot (-2) - \frac{1}{4}t^2$

よって $t^2 + 4t - 8 = 0$ ……①

2次方程式①の2つの解を α, β とすると、 α, β は2本の接線の接点の x 座標である。
 解と係数の関係から $\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -8$ ……②

ゆえに、2接点 $(\alpha, \frac{1}{4}\alpha^2), (\beta, \frac{1}{4}\beta^2)$ を結ぶ直線の方程式は

$$y - \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{\frac{1}{4}\beta^2 - \frac{1}{4}\alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$

すなわち $y = \frac{1}{4}(\alpha + \beta)x - \frac{1}{4}\alpha\beta$

②を代入して $y = -x + 2$

2

【解答】 $y = -4x - 4$

【解説】

曲線 C と直線 $y = mx + n$ が $x = a, x = b$ ($a \neq b$)の点で接するとすると、次の x の恒等式が成り立つ。

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - (mx + n) = (x - a)^2(x - b)^2$$

$$\text{(左辺)} = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - mx - n$$

$$\text{(右辺)} = [(x - a)(x - b)]^2 = [x^2 - (a + b)x + ab]^2$$

$$= x^4 + (a + b)^2x^2 + a^2b^2 - 2(a + b)x^3$$

$$- 2(a + b)abx + 2abx^2$$

$$= x^4 - 2(a + b)x^3 + [(a + b)^2 + 2ab]x^2$$

$$- 2(a + b)abx + a^2b^2$$

両辺の係数を比較して

$$-2 = -2(a + b) \quad \text{……①}, \quad -3 = (a + b)^2 + 2ab \quad \text{……②},$$

$$-m = -2(a + b)ab \quad \text{……③}, \quad -n = a^2b^2 \quad \text{……④}$$

①から $a + b = 1$ これと②から $ab = -2$

③から $m = -4$ ④から $n = -4$

a, b は $t^2 - t - 2 = 0$ の解で、これを解くと $t = -1, 2$

よって、曲線 C と $x = -1, x = 2$ の点で接する直線があり、その方程式は

$$y = -4x - 4$$

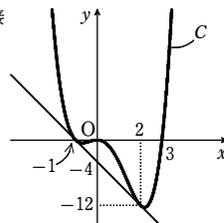
【別解】 $y = x^4 - 2x^3 - 3x^2$ から $y' = 4x^3 - 6x^2 - 6x$

点 $(a, a^4 - 2a^3 - 3a^2)$ における接線の方程式は

$$y - (a^4 - 2a^3 - 3a^2) = (4a^3 - 6a^2 - 6a)(x - a)$$

すなわち $y = (4a^3 - 6a^2 - 6a)x - 3a^4 + 4a^3 + 3a^2$ ……①

この直線が $x = b$ ($b \neq a$)の点で曲線 C と接するための条件は、方程式



$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = (4a^3 - 6a^2 - 6a)x - 3a^4 + 4a^3 + 3a^2 \quad \text{……②}$$

が a と異なる重解 b をもつことである。②を変形すると

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - (4a^3 - 6a^2 - 6a)x + 3a^4 - 4a^3 - 3a^2 = 0$$

$$(x - a)^2[x^2 + 2(a - 1)x + 3a^2 - 4a - 3] = 0$$

ゆえに、2次方程式 $x^2 + 2(a - 1)x + 3a^2 - 4a - 3 = 0$ ……③

が a と異なる重解 b をもてばよい。

よって、③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (a - 1)^2 - (3a^2 - 4a - 3) = -2(a^2 - a - 2)$$

$D = 0$ のとき、 $a^2 - a - 2 = 0$ を解いて $a = -1, 2$

$a = -1$ のとき、③の重解は $b = 2$

$a = 2$ のとき、③の重解は $b = -1$

したがって、 $b \neq a$ である。

①から、接線の方程式は $y = -4x - 4$

3

【解答】 (1) $x > 1$ (2) $0 < a < 1$

【解説】

$y = x^3 - 3x^2 + 3ax$ ……① とする。

(1) $y' = 3(x^2 - 2x + a)$

①が極値をもつから、方程式 $y' = 0$ すなわち

$$x^2 - 2x + a = 0 \quad \text{……②}$$

が異なる2つの実数解をもつ。

よって、②の判別式を D とすると $\frac{D}{4} = 1 - a > 0$

ゆえに $a < 1$ ……③

このとき、②の異なる2つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$)

とすると、①の増減表は右のようになる。

よって、①は $x = \alpha$ で極大値、 $x = \beta$ で極小値をと

る。

$f(x) = x^2 - 2x + a$ とすると、放物線 $y = f(x)$ の軸は直線 $x = 1$ であり、点 $(\alpha, 0)$ と点 $(\beta, 0)$ は軸に関して対称で $\alpha < 1 < \beta$

したがって、極小値を与える x の値の範囲は $x > 1$

(2) 方程式②の解と係数の関係から $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = a$

求める条件は $D > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$

すなわち $a < 1$ かつ $a > 0$

したがって $0 < a < 1$

【別解】 $f(x)$ の x^2 の係数は正であるから、求める条件は

$D > 0$ かつ $f(0) > 0$ すなわち $a < 1$ かつ $a > 0$

したがって $0 < a < 1$

4

【解答】 (1) $a > -1$ (2) $a = -\frac{1}{2}$

【解説】

(1) $f'(x) = x^2 - 2(a + 1)x + a(a + 1)$

$f(x)$ が極値をもつための条件は、2次方程式 $f'(x) = 0$ すなわち

$$x^2 - 2(a+1)x + a(a+1) = 0 \dots\dots ①$$

が異なる2つの実数解をもつことである。

ゆえに、2次方程式①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = \{-(a+1)\}^2 - a(a+1) = a+1 > 0$$

したがって $a > -1$

(2) $a > -1$ のとき、①の異なる2つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって、 $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大、 $x = \beta$ で極小となるから

$$f(\alpha) - f(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{3} \dots\dots ②$$

ここで、 $f(\alpha) - f(\beta)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \frac{1}{3}(\alpha^3 - \beta^3) - (a+1)(\alpha^2 - \beta^2) + a(a+1)(\alpha - \beta) \\ &= \frac{1}{3}(\alpha - \beta)\{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3(a+1)(\alpha + \beta) + 3a(a+1)\} \dots\dots ③ \end{aligned}$$

①において、解と係数の関係により $\alpha + \beta = 2(a+1)$ 、 $\alpha\beta = a(a+1)$

$$\text{ゆえに } (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4(a+1)^2 - 4a(a+1) = 4(a+1)$$

$\alpha < \beta$ であるから $\alpha - \beta = -2\sqrt{a+1}$

$$\text{また } \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 4(a+1)^2 - a(a+1) = (a+1)(3a+4)$$

したがって、③から

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \frac{1}{3}(-2\sqrt{a+1})\{(a+1)(3a+4) - 3(a+1) \cdot 2(a+1) + 3a(a+1)\} \\ &= \frac{4}{3}(a+1)\sqrt{a+1} \end{aligned}$$

$$\text{これと②から } 4(a+1)\sqrt{a+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{両辺は正であるから、平方して整理すると } (a+1)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{ゆえに } a+1 = \frac{1}{2} \quad \text{よって } a = -\frac{1}{2}$$

これは $a > -1$ を満たす。

1

解答 $b = -1, c = -1$

解説

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$x=1 \text{ で極値 } 0 \text{ をとるから } f'(1) = 0, f(1) = 0$$

$$\text{よって } 3+2b+c=0, 1+b+c+1=0$$

$$\text{ゆえに } 2b+c=-3, b+c=-2 \quad \text{これを解いて } b=-1, c=-1$$

$$\text{このとき } f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -\frac{1}{3}, 1$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

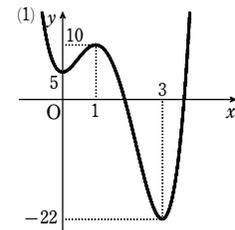
よって、 $f(x)$ は $x=1$ で極値0をとり、条件を満たす。

したがって $b = -1, c = -1$

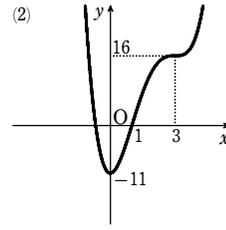
x	...	$-\frac{1}{3}$...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗
		$\frac{32}{27}$		0	

2

解答 (1) $x=0$ で極小値5、 $x=1$ で極大値10、 $x=3$ で極小値-22；[図]



(2) $x=0$ で極小値-11；[図]



解説

$$(1) y' = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3) = 12x(x-1)(x-3)$$

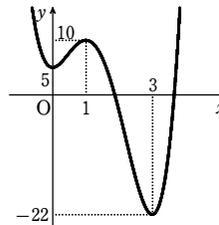
$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, 1, 3$$

y の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	1	...	3	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗
		5		10		-22	

よって $x=0$ で極小値5、 $x=1$ で極大値10、 $x=3$ で極小値-22をとる。

また、グラフは右の図のようになる。



(2) $y' = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x-3)^2$

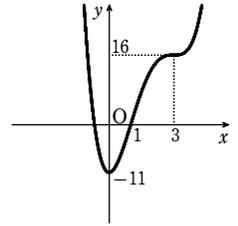
$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, 3$$

y の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	3	...
y'	-	0	+	0	+
y	↘	極小	↗	16	↗
		-11		16	

よって $x=0$ で極小値-11をとる。

また、グラフは右の図のようになる。



3

解答 $x=0, 1$ のとき最大値0、 $x=-1$ のとき最小値-2

解説

$$y' = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, \frac{2}{3}$$

$-1 \leq x \leq 1$ における y の増減表は、右のようになる。

よって、 $x=0, 1$ のとき最大値0、 $x=-1$ のとき最小値-2をとる。

x	-1	...	0	...	$\frac{2}{3}$...	1
y'		+	0	-	0	+	
y	-2	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	0

4

解答 $x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ で最大値3； $x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ で最小値1

解説

$$\begin{aligned} y &= 2\sin x \cdot 2\sin x \cos x - \cos x + 2 \\ &= 4\sin^2 x \cos x - \cos x + 2 = 4(1 - \cos^2 x)\cos x - \cos x + 2 \\ &= -4\cos^3 x + 3\cos x + 2 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ とおくと、 $0 \leq x < 2\pi$ であるから $-1 \leq t \leq 1$

y を t の式で表すと、 $y = -4t^3 + 3t + 2$ であり

$$\begin{aligned} y' &= -12t^2 + 3 = -3(4t^2 - 1) \\ &= -3(2t+1)(2t-1) \end{aligned}$$

$$y' = 0 \text{ とすると } t = \pm \frac{1}{2}$$

$-1 \leq t \leq 1$ における y の増減表は右のようになる。

よって $t = -1, \frac{1}{2}$ のとき最大値3

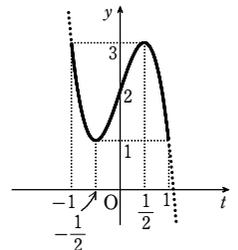
$$t = -\frac{1}{2}, 1 \text{ のとき最小値1}$$

$$t = -1 \text{ のとき } x = \pi; \quad t = \frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi;$$

$$t = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi; \quad t = 1 \text{ のとき } x = 0$$

したがって $x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ で最大値3

$$x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \text{ で最小値1}$$



5

- 【解答】 (1) $0 < a < 1$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^3$,
 $1 \leq a$ のとき $x=1$ で最小値 $1-3a^2$
 (2) $0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $x=1$ で最大値 $1-3a^2$,
 $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $x=0, 1$ で最大値 0 ,
 $\frac{1}{\sqrt{3}} < a$ のとき $x=0$ で最大値 0

【解説】

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$
 $f'(x) = 0$ とすると $x = \pm a$
 また $f(0) = 0, f(1) = 1-3a^2, f(a) = -2a^3$

(1) [1] $0 < a < 1$ のとき

$0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は、右
 のようになる。

よって、 $f(x)$ は $x=a$ で最小値 $-2a^3$
 をとる。

[2] $1 \leq a$ のとき

$0 \leq x \leq 1$ において、 $f'(x) = 3(x+a)(x-a) \leq 0$ であるから、 $f(x)$ は単調に減少する。

よって、 $f(x)$ は $x=1$ で最小値 $1-3a^2$ をとる。

(2) $x \geq 0$ における $f(x)$ の増減表は、右のようになる。
 よって、 $0 \leq x \leq 1$ において、最大値は $f(0)$ または
 $f(1)$ である。

$$f(0) - f(1) = 0 - (1 - 3a^2) = 3a^2 - 1 = 3\left(a + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

[1] $0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(0) < f(1)$

よって、 $f(x)$ は $x=1$ で最大値 $1-3a^2$ をとる。

[2] $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(0) = f(1)$

よって、 $f(x)$ は $x=0, 1$ で最大値 0 をとる。

[3] $\frac{1}{\sqrt{3}} < a$ のとき $f(0) > f(1)$

よって、 $f(x)$ は $x=0$ で最大値 0 をとる。

x	0	...	a	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗	$1-3a^2$

x	0	...	a	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗

1

【解答】 $a = -6, b = 9, c = -5$

【解説】

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f(x)$ が $x=1$ で極大値をとるとき $f'(1) = 0$

よって $3 + 2a + b = 0$ ①

また、 $f(x)$ が $x=3$ で極小値 -5 をとるとき $f'(3) = 0, f(3) = -5$

よって $27 + 6a + b = 0$ ②, $27 + 9a + 3b + c = -5$ ③

①, ②, ③ を解くと $a = -6, b = 9, c = -5$

このとき $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

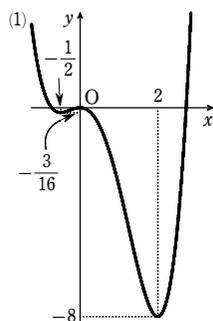
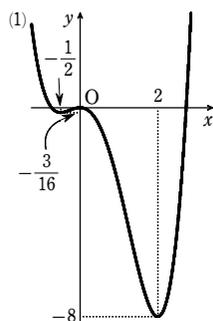
したがって、右の増減表が得られ、条件を満たす。

よって $a = -6, b = 9, c = -5$

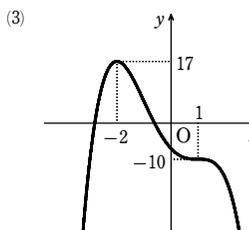
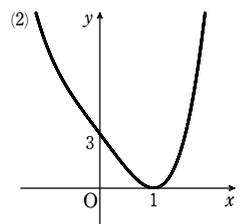
x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 -1	↘	極小 -5	↗

2

【解答】 (1) $x = -\frac{1}{2}$ で極小値 $-\frac{3}{16}$, $x=0$ で極大値 0 , $x=2$ で極小値 -8 , [図]



(3) $x = -2$ で極大値 17 ; [図]



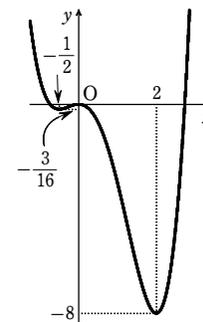
【解説】

$$\begin{aligned} (1) \quad y' &= 4x^3 - 6x^2 - 4x \\ &= 2x(2x^2 - 3x - 2) \\ &= 2x(2x+1)(x-2) \end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると $x = -\frac{1}{2}, 0, 2$

y の増減表は次のようになる。

x	...	$-\frac{1}{2}$...	0	...	2	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	極小 $-\frac{3}{16}$	↗	極大 0	↘	極小 -8	↗



よって、 y は $x = -\frac{1}{2}$ で極小値 $-\frac{3}{16}$, $x=0$ で極大値 0 ,
 $x=2$ で極小値 -8 をとる。

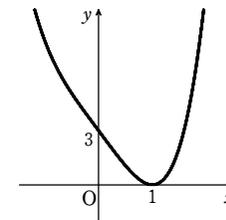
また、グラフは図のようになる。

$$(2) \quad y' = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x-1)(x^2+x+1)$$

$y' = 0$ とすると $x = 1$

y の増減表は次のようになる。

x	...	1	...
y'	-	0	+
y	↘	極小 0	↗



よって、 y は $x=1$ で極小値 0 をとる。

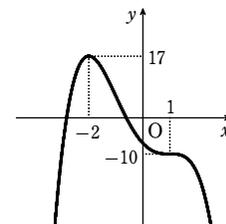
また、グラフは図のようになる。

$$(3) \quad y' = -4x^3 + 12x - 8 = -4(x^3 - 3x + 2) = -4(x-1)^2(x+2)$$

$y' = 0$ とすると $x = 1, -2$

y の増減表は次のようになる。

x	...	-2	...	1	...
y'	+	0	-	0	-
y	↗	極大 17	↘	-10	↘



よって、 $x = -2$ で極大値 17 をとる。

したがって、グラフは [図]

【注意】 $x=1$ のとき極値をとらないことに注意。

グラフ上の点 $(1, -10)$ における接線の傾きは 0 である。

3

【解答】 (1) $x = -4$ で最大値 21 , $x = 2$ で最小値 -15

(2) $x = 0$ で最大値 4 , $x = -2$ で最小値 -16

【解説】

$$(1) \quad y' = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$$

$y' = 0$ とすると $x = 0, -2$

$-4 \leq x \leq 2$ において、 y の増減表は、次のようになる。

x	-4	...	-2	...	0	...	2
y'		-	0	+	0	-	
y	21	↘	1	↗	5	↘	-15

よって、 $x = -4$ で最大値 21, $x = 2$ で最小値 -15 をとる。

(2) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$y' = 0$ とすると $x = 0, 2$

$-2 \leq x \leq 2$ における y の増減表は、右ようになる。

よって、 $x = 0$ で最大値 4,

$x = -2$ で最小値 -16 をとる。

[4]

解答 $\theta = \frac{3}{2}\pi$ で最大値 14; $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ で最小値 $\frac{1}{2}$

解説

$$f(\theta) = 8\sin^3\theta - 3\cos 2\theta - 12\sin\theta + 7$$

$$= 8\sin^3\theta - 3(1 - 2\sin^2\theta) - 12\sin\theta + 7$$

$$= 8\sin^3\theta + 6\sin^2\theta - 12\sin\theta + 4$$

$\sin\theta = t$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ であるから $-1 \leq t \leq 1$

$g(t) = 8t^3 + 6t^2 - 12t + 4$ とすると

$$g'(t) = 24t^2 + 12t - 12$$

$$= 12(t+1)(2t-1)$$

$g'(t) = 0$ とすると $t = -1, \frac{1}{2}$

$-1 \leq t \leq 1$ における $g(t)$ の増減表は右ようになる。

よって、 $g(t)$ は $t = -1$ で最大値 14,

$t = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ であるから

$t = -1$ のとき $\theta = \frac{3}{2}\pi$; $t = \frac{1}{2}$ のとき $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

したがって、 $f(\theta)$ は $\theta = \frac{3}{2}\pi$ で最大値 14;

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

[5]

解答 $0 < a < \frac{3}{4}, 3 < a$ のとき $M(a) = a^2 - 2a + 1$

$\frac{3}{4} \leq a \leq 3$ のとき $M(a) = \frac{4}{27}a^3$

解説

x	-2	...	0	...	2
y'		+	0	-	0
y	-16	↗	4	↘	0

t	-1	...	$\frac{1}{2}$...	1
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	14	↘	$\frac{1}{2}$	↗	6

$$f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2$$

$$= (3x - a)(x - a)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \frac{a}{3}, a$

$a > 0$ であるから、 $f(x)$ の増減表は右ようになる。

ここで、 $x = \frac{a}{3}$ 以外に $f(x) = \frac{4}{27}a^3$ を満たす

x の値を求めると、 $f(x) = \frac{4}{27}a^3$ から $x^3 - 2ax^2 + a^2x - \frac{4}{27}a^3 = 0$

ゆえに $(x - \frac{a}{3})^2(x - \frac{4}{3}a) = 0$ $x \neq \frac{a}{3}$ であるから $x = \frac{4}{3}a$

したがって、 $f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値 $M(a)$ は

[1] $1 < \frac{a}{3}$ すなわち $a > 3$ のとき

$M(a) = f(1)$

[2] $\frac{a}{3} \leq 1 \leq \frac{4}{3}a$ すなわち $\frac{3}{4} \leq a \leq 3$ のとき

$M(a) = f(\frac{a}{3})$

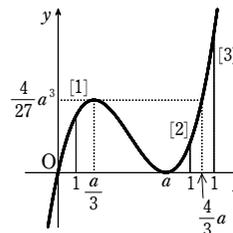
[3] $0 < \frac{4}{3}a < 1$ すなわち $0 < a < \frac{3}{4}$ のとき

$M(a) = f(1)$

以上から $0 < a < \frac{3}{4}, 3 < a$ のとき $M(a) = a^2 - 2a + 1$

$\frac{3}{4} \leq a \leq 3$ のとき $M(a) = \frac{4}{27}a^3$

x	...	$\frac{a}{3}$...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 $\frac{4}{27}a^3$	↘	極小 0	↗



[1]

解答 $a = 1, x = -1$ で極小値 0

解説

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + a(a+4)$

$f(x)$ は $x = -1$ で極値をとるから $f'(-1) = 0$

よって $-3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + a(a+4) = 0$

ゆえに $a^2 + 2a - 3 = 0$ よって $(a+3)(a-1) = 0$

したがって $a = -3, 1$

[1] $a = -3$ のとき

$f'(x) = -3x^2 - 6x - 3$

$$= -3(x+1)^2$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = -1$

$f(x)$ の増減表は右のようになり、 $x = -1$ で極小とはならない。

[2] $a = 1$ のとき

$f'(x) = -3x^2 + 2x + 5$

$$= -(x+1)(3x-5)$$

$f'(x) = 0$ とすると

$x = -1, \frac{5}{3}$

$f(x)$ の増減表は右のようになり、 $x = -1$ で極小値 0 をとる。

以上から $a = 1, x = -1$ で極小値 0

[2]

解答 $(a, b) = (3, 5), (-3, -7)$

解説

$f(x) = ax^2(x-3) + b = ax^3 - 3ax^2 + b$ であるから

$f'(x) = 3ax^2 - 6ax = 3ax(x-2)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, 2$

また $f(-1) = -4a + b, f(0) = b, f(1) = -2a + b$

[1] $a > 0$ のとき

$-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-4a + b$	↗	極大 b	↘	$-2a + b$

最小値の候補として、 $f(-1)$ と $f(1)$ を比較すると、 $a > 0$ であるから

$-4a + b < -2a + b$

よって、最小値は $f(-1) = -4a + b$

また、最大値は $f(0) = b$

ゆえに $b = 5$ ①, $-4a + b = -7$ ②

①を②に代入して $-4a + 5 = -7$

したがって $a = 3$ これは $a > 0$ を満たす。

[2] $a < 0$ のとき

第3講 レベルA

$-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	……	0	……	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-4a+b$	↘	極小 b	↗	$-2a+b$

最大値の候補として、 $f(-1)$ と $f(1)$ を比較すると、 $a < 0$ であるから

$$-4a+b > -2a+b$$

よって、最大値は $f(-1) = -4a+b$

また、最小値は $f(0) = b$

ゆえに $-4a+b=5$ ……③、 $b=-7$ ……④

④を③に代入して $-4a-7=5$

したがって $a=-3$ これは $a < 0$ を満たす。

以上から $(a, b) = (3, 5), (-3, -7)$

3

【解答】 底面の半径 4, 高さ 6

【解説】

直円錐を、頂点と底面の直径を通る平面で切断すると、右の図ようになる。

直円柱の底面の半径を r , 高さを h とすると、図より

$$6 : r = 18 : (18-h) \quad \text{よって} \quad 18r = 6(18-h)$$

ゆえに $h = 18 - 3r$ ……①

また $0 < r < 6$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (18 - 3r) = 3\pi(-r^3 + 6r^2)$$

$$\text{よって} \quad V' = 3\pi(-3r^2 + 12r) = -9\pi r(r-4)$$

$$V' = 0 \text{ とすると} \quad r = 0, 4$$

$0 < r < 6$ における V の増減表は、次のようになる。

r	0	…	4	…	6
V'		+	0	-	
V		↗	極大	↘	

よって、 V は $r=4$ のとき極大かつ最大となる。

①から、 $r=4$ のとき $h=6$

したがって、 V が最大となるとき直円柱の底面の半径は 4, 高さは 6 である。

4

【解答】 (1) $1 < a < 2$ のとき $x=a$ で最小値 $2a^3 - 9a^2 + 12a$,

$2 \leq a$ のとき $x=2$ で最小値 4

(2) $1 < a < \frac{5}{2}$ のとき $x=1$ で最大値 5; $a = \frac{5}{2}$ のとき $x=1, \frac{5}{2}$ で最大値 5;

$\frac{5}{2} < a$ のとき $x=a$ で最大値 $2a^3 - 9a^2 + 12a$

【解説】

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

$$= 6(x-1)(x-2)$$

$$y' = 0 \text{ とすると} \quad x = 1, 2$$

y の増減表は右のようになる。

x	…	1	…	2	…
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 5	↘	極小 4	↗

(1) [1] $1 < a < 2$ のとき グラフは図①のようになる。

よって $x=a$ で最小値 $2a^3 - 9a^2 + 12a$

[2] $2 \leq a$ のとき グラフは図②, ③, ④のようになる。

よって $x=2$ で最小値 4

(2) $2x^3 - 9x^2 + 12x = 5$ とすると

$$2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (x-1)^2(2x-5) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 1, \frac{5}{2}$$

[1] $1 < a < \frac{5}{2}$ のとき

グラフは図①, ②のようになる。

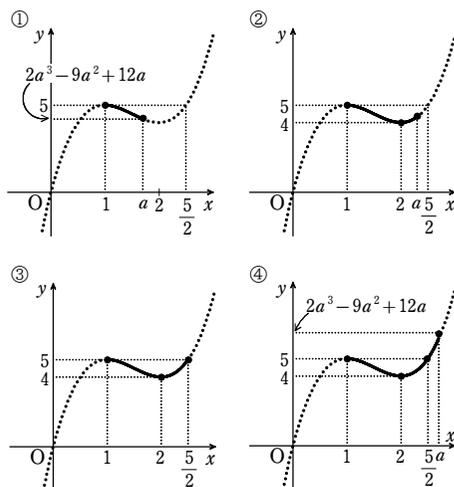
よって $x=1$ で最大値 5

[2] $a = \frac{5}{2}$ のとき グラフは図③のようになる。

よって $x=1, \frac{5}{2}$ で最大値 5

[3] $\frac{5}{2} < a$ のとき グラフは図④のようになる。

よって $x=a$ で最大値 $2a^3 - 9a^2 + 12a$



5

【解答】 (ア) 0 (イ) 2 (ウ) $-1 + \log_2(3 \pm \sqrt{5})$ (エ) -10

【解説】

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$f(x) = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

よって、 $f(x)$ は $x=0$ のとき最小値 2 ととる。

ゆえに、 $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと $t \geq 2$

$$\text{また} \quad g(x) = 8^x + 8^{-x} - 4(4^x + 4^{-x}) = (2^x + 2^{-x})^3 - 3(2^x + 2^{-x}) - 4((2^x + 2^{-x})^2 - 2)$$

$g(x)$ を t で表した式を $h(t)$ とおくと

$$h(t) = t^3 - 3t - 4(t^2 - 2) = t^3 - 4t^2 - 3t + 8$$

よって $h'(t) = 3t^2 - 8t - 3 = (3t+1)(t-3)$

$$h'(t) = 0 \text{ とすると} \quad t = -\frac{1}{3}, 3$$

$t \geq 2$ における $h(t)$ の増減表は右のようになる。

したがって、 $h(t)$ すなわち $g(x)$ は $t=3$ のとき

最小値 -10 ととる。

このとき、 $2^x + 2^{-x} = 3$ であるから

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$\text{よって} \quad 2^x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad x = -1 + \log_2(3 \pm \sqrt{5})$$

t	2	…	3	…
$h'(t)$	↘	-	0	+
$h(t)$	-6	↘	-10	↗

第3講 レベルB

1

解答 $0 \leq a < 1$ のとき $x = -2$ で極小値 $-16a$, $x = 0$ で極小値 0
 $a = 1$ のとき $x = -2$ で極小値 -16
 $a > 1$ のとき $x = -2$ で極小値 $-16a$, $x = a-1$ で極小値 $-(a-1)^3(a+3)$

解説

$$f'(x) = 12x^3 + 12(3-a)x^2 + 24(1-a)x = 12x\{x^2 + (3-a)x + 2(1-a)\}$$

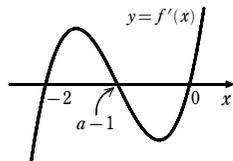
$$= 12x(x+2)(x+1-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -2, 0, a-1$$

[1] $0 \leq a < 1$ のとき $-1 \leq a-1 < 0$

増減表は次のようになる。

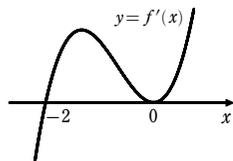
x	...	-2	...	a-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小



[2] $a = 1$ のとき $a-1 = 0$

増減表は次のようになる。

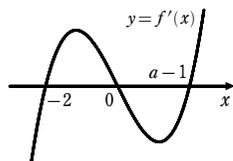
x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗	0



[3] $1 < a$ のとき $0 < a-1$

増減表は次のようになる。

x	...	-2	...	0	...	a-1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小



$$f(x) = x^2\{3x^2 + 4(3-a)x + 12(1-a)\}$$

$$= x^2\{3(x+2)^2 - 4a(x+3)\} \text{ であるから}$$

$$f(-2) = (-2)^2 \cdot (-4a \cdot 1) = -16a, \quad f(0) = 0$$

$$f(a-1) = (a-1)^2\{3(a+1)^2 - 4a(a+2)\} = -(a-1)^2(a^2 + 2a - 3)$$

$$= -(a-1)^3(a+3)$$

以上から

$$0 \leq a < 1 \text{ のとき } x = -2 \text{ で極小値 } -16a, x = 0 \text{ で極小値 } 0$$

$$a = 1 \text{ のとき } x = -2 \text{ で極小値 } -16$$

$$a > 1 \text{ のとき } x = -2 \text{ で極小値 } -16a, x = a-1 \text{ で極小値 } -(a-1)^3(a+3)$$

2

解答 $a = -6, b = 9, c = -1$

解説

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f(1) = 1 + a + b + c \text{ である。}$$

点(2, 1)に関して点(1, a+b+c+1)と対称な点の座標を(X, Y)とすると

$$\frac{1+X}{2} = 2, \quad \frac{a+b+c+1+Y}{2} = 1$$

よって $X = 3, Y = -a - b - c + 1 \dots\dots ①$

点(X, Y)は $y = f(x)$ のグラフ上にあるから

$$Y = X^3 + aX^2 + bX + c$$

①を代入して $-a - b - c + 1 = 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$

整理して $5a + 2b + c + 13 = 0 \dots\dots ②$

また、点(2, 1)は $y = f(x)$ のグラフ上にあり、 $x = 1$ で極大値をとるから

$$f(2) = 1, \quad f'(1) = 0$$

ゆえに $8 + 4a + 2b + c = 1 \dots\dots ③$

$$3 + 2a + b = 0 \dots\dots ④$$

②, ③, ④を解いて $a = -6, b = 9, c = -1$

逆に、このとき

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f(x)$ の増減表は右のようになり、 $x = 1$ で

極大値をとるから、条件に適する。

したがって $a = -6, b = 9, c = -1$

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

3

解答 (1) $-3 \leq x \leq 3$ (2) $x = 3, y = -6, z = -6$ のとき最小値 18

解説

(1) 条件から $y + z = -4x, yz = 6x^2 - 18$

よって、 y, z は t についての2次方程式 $t^2 + 4xt + 6x^2 - 18 = 0 \dots\dots ①$ の2つの解である。①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (2x)^2 - (6x^2 - 18) = -2(x+3)(x-3)$$

y, z は実数であるから、 $D \geq 0$ より $-3 \leq x \leq 3$

(2) $-2x^3 + y^2 + z^2 = -2x^3 + (y+z)^2 - 2yz$

$$= -2x^3 + (-4x)^2 - 2(6x^2 - 18) = -2x^3 + 4x^2 + 36$$

この式を $f(x)$ とすると $f'(x) = -6x^2 + 8x = -2x(3x-4)$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, \frac{4}{3}$$

$-3 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の増減

表は右のようになる。

x	-3	...	0	...	$\frac{4}{3}$...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	36	↗	極大	↘	18

したがって、 $x = 3$ のとき最小値 18 をとる。

このとき、①は $t^2 + 12t + 36 = 0$ すなわち $(t+6)^2 = 0$

y, z はこの方程式の解であるから $y = -6, z = -6$

以上から、 $x = 3, y = -6, z = -6$ のとき最小値 18 をとる。

4

解答 $a < -2$ のとき $g(a) = a^3 - a^2 - 16a + 32, -2 \leq a < 1$ のとき $g(a) = 52$

$$1 \leq a < 4 \text{ のとき } g(a) = a^3 - 10a^2 + 17a + 44,$$

$$4 \leq a \text{ のとき } g(a) = a^3 - a^2 - 16a + 32$$

解説

$$f'(x) = 3x^2 - 20x + 17$$

$$= (x-1)(3x-17)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 1, \frac{17}{3}$$

増減表から、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

x	...	1	...	$\frac{17}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

[1] $a + 3 < 1$ すなわち $a < -2$ のとき

$$g(a) = f(a+3) = (a+3)^3 - 10(a+3)^2 + 17(a+3) + 44$$

$$= a^3 - a^2 - 16a + 32$$

[2] $a + 3 \geq 1$ かつ $a < 1$ すなわち $-2 \leq a < 1$ のとき

$$g(a) = f(1) = 52$$

$a \geq 1$ のとき、 $f(a) = f(a+3)$ とすると

$$a^3 - 10a^2 + 17a + 44 = a^3 - a^2 - 16a + 32 \text{ から}$$

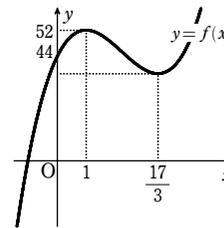
$$9a^2 - 33a - 12 = 0$$

よって $(3a+1)(a-4) = 0$ ゆえに $a = -\frac{1}{3}, 4$

$a \geq 1$ から $a = 4$

[3] $1 \leq a < 4$ のとき $g(a) = f(a) = a^3 - 10a^2 + 17a + 44$

[4] $4 \leq a$ のとき $g(a) = f(a+3) = a^3 - a^2 - 16a + 32$



1

解答 (1) 3個 (2) 1個

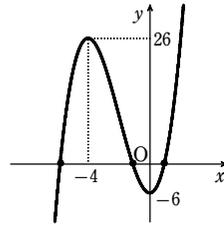
解説

(1) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$ とおくと $f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, -4$

$f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	...	-4	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	26	↘	-6	↗



よって、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり、

このグラフと x 軸の共有点の個数は 3 個

ゆえに、方程式の異なる実数解の個数は 3 個

(2) $f(x) = 2x^3 + 6x + 1$ とおくと $f'(x) = 6x^2 + 6 = 6(x^2 + 1)$

$f'(x) > 0$ であるから、 $f(x)$ は単調に増加する。

また $f(-1) = -7, f(0) = 1$

よって、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は 1 個

ゆえに、方程式の異なる実数解の個数は 1 個

2

解答 $a < -3, 24 < a$ のとき 1; $a = -3, 24$ のとき 2; $-3 < a < 24$ のとき 3

解説

方程式を変形すると $2x^3 + 9x^2 - 3 = a$

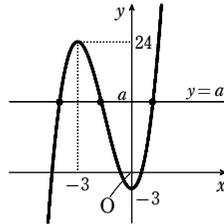
よって、 $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 3$ とおくと、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数が、方程式の異なる実数の解の個数に一致する。

$$f'(x) = 6x^2 + 18x = 6x(x+3)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, -3$

$f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	...	-3	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	24	↘	-3	↗



よって、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり、

したがって、右のグラフから、求める解の個数は

$a < -3, 24 < a$ のとき 1(個)

$a = -3, 24$ のとき 2(個)

$-3 < a < 24$ のとき 3(個)

3

解答 略

解説

$f(x) = (x^3 + 12) - 9x$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3) = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \pm\sqrt{3}$

$x \geq 0$ における $f(x)$ の増減表は、右のようになる。

よって、 $x \geq 0$ における $f(x)$ の最小値は

x	0	...	$\sqrt{3}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	12	↘	$12 - 6\sqrt{3}$	↗

$$f(\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3} = 6(2 - \sqrt{3}) > 0$$

ゆえに、 $x \geq 0$ のとき $f(x) > 0$ したがって $x^3 + 12 > 9x$

4

解答 $-3 < a < 5$

解説

$y' = 3x^2 + 6x + 1$ であるから、曲線 C 上の点 $(t, t^3 + 3t^2 + t)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 + 3t^2 + t) = (3t^2 + 6t + 1)(x - t)$$

すなわち $y = (3t^2 + 6t + 1)x - 2t^3 - 3t^2$

この接線が点 $(1, a)$ を通るとすると

$$-2t^3 + 6t + 1 = a \quad \text{..... ①}$$

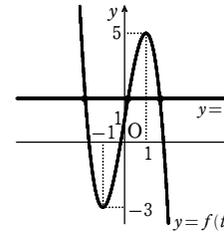
$f(t) = -2t^3 + 6t + 1$ とすると

$$f'(t) = -6t^2 + 6 = -6(t+1)(t-1)$$

$f'(t) = 0$ とすると $t = \pm 1$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	...	-1	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↘	極小 -3	↗	極大 5	↘



3次関数のグラフでは、接点の異なる接線が異なるから、 t の3次方程式①が異なる3個の実数解をもつとき、点 A から曲線 C に3本の接線が引ける。

したがって、曲線 $y = f(t)$ と直線 $y = a$ が異なる3点で交わる条件を求めて

$$-3 < a < 5$$

5

解答 $a < 0, 2 < a$

解説

$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 2a$ とおく。

方程式 $f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつための必要十分条件は、 $f(x)$ が極値をもち、更に極大値と極小値が異符号であること、すなわち

$$(\text{極大値}) \times (\text{極小値}) < 0$$

となることである。

$$f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a = 6\{x^2 - (a+1)x + a\} = 6(x-1)(x-a)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 1, a$

よって、 $f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつのは

$$a \neq 1 \quad \text{..... ①} \quad \text{かつ} \quad f(1)f(a) < 0$$

のときである。

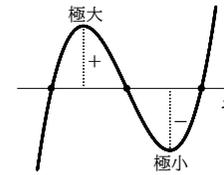
$f(1)f(a) < 0$ から $(a-1)(-a^3 + 3a^2 - 2a) < 0$

よって $a(a-1)(a^2 - 3a + 2) > 0$ すなわち $a(a-1)^2(a-2) > 0$

①より $(a-1)^2 > 0$ であるから $a(a-2) > 0$

ゆえに $a < 0, 2 < a$ (これは①を満たす)

したがって、求める a の値の範囲は $a < 0, 2 < a$



1

解答 (1) 2個 (2) 1個

解説

(1) $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ ① とすると

$$y' = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$$

$y' = 0$ とすると $x = 0, -2$

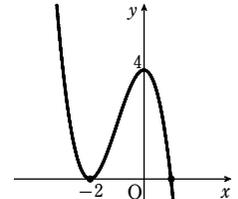
y の増減表は右のようになる。

よって、関数①のグラフは右の図のようになり、

グラフと x 軸の共有点は2個である。

したがって、方程式 $-x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ の実数解は2個である。

x	...	-2	...	0	...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	極小 0	↗	極大 4	↘



(2) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ ① とすると

$$y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$$

$y' = 0$ とすると $x = 0, -1$

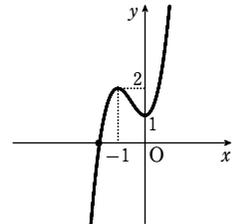
y の増減表は右のようになる。

よって、関数①のグラフは右の図のようになり、

グラフと x 軸の共有点は1個である。

したがって、方程式 $2x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ の実数解は1個である。

x	...	-1	...	0	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 2	↘	極小 1	↗



2

解答 $a < -2, 2 < a$ のとき 1個; $a = \pm 2$ のとき 2個; $-2 < a < 2$ のとき 3個

解説

方程式を変形すると $-x^3 + 3x = a$

$f(x) = -x^3 + 3x$ とおくと $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \pm 1$

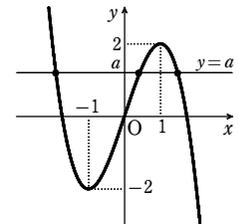
$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘

関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数が、方程式の異なる実数解の個数に一致する。

よって、右の図より $a < -2, 2 < a$ のとき 1個;

$a = \pm 2$ のとき 2個; $-2 < a < 2$ のとき 3個



3

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $f(x) = (2x^3 + \frac{1}{27}) - x^2$ とすると $f'(x) = 6x^2 - 2x = 2x(3x - 1)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, \frac{1}{3}$

$x \geq 0$ において、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{3}$...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	↘	0	↗

よって、 $x \geq 0$ において、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{3}$ で最小値 0 をとる。

したがって、 $x \geq 0$ のとき、 $f(x) \geq 0$ であるから

$(2x^3 + \frac{1}{27}) - x^2 \geq 0$ すなわち $2x^3 + \frac{1}{27} \geq x^2$

【参考】 等号が成り立つのは、 $x = \frac{1}{3}$ のときである。

(2) $f(x) = (x^3 + 16) - 12x$ とすると

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \pm 2$

$x \geq 2$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって、 $x > 2$ のとき $f(x) > 0$

したがって $x^3 + 16 > 12x$

x	2	...
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	↗

【別解】 $x > 2$ のとき $f'(x) > 0$

ゆえに、 $x > 2$ のとき $f(x)$ は単調に増加する。

よって、 $x > 2$ のとき $f(x) > f(2) = 0$ すなわち $f(x) > 0$

$x = 2$ で最小値 0

をとる。

よって、 $x \geq 0$ のとき $f(x) \geq 0$

したがって $x^4 - 16 \geq 32(x-2)$

4

【解答】 $k < -1, 0 < k$ のとき 1 本; $k = -1, 0$ のとき 2 本; $-1 < k < 0$ のとき 3 本

【解説】

$y' = -3x^2 + 6x$ であるから、曲線 C 上の点 $(t, -t^3 + 3t^2)$ における接線の方程式は

$y - (-t^3 + 3t^2) = (-3t^2 + 6t)(x - t)$

この直線が点 $(0, k)$ を通るとき $k + t^3 - 3t^2 = 3t^3 - 6t^2$

よって $2t^3 - 3t^2 = k$ …… ①

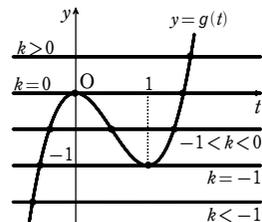
3 次関数のグラフでは、接点と異なる点で接線が異なるから、 t の 3 次方程式 ① の実数解の個数が、求める接線の本数に等しい。

つまり、 $g(t) = 2t^3 - 3t^2$ のグラフと直線 $y = k$ との共有点の個数が接線の本数に等しい。

$g'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$

$g(t)$ の増減表は、次のようになる。

t	...	0	...	1	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	極大	↘	極小	↗
		0		-1	



よって、 $y = g(t)$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の個数を調べると、求める接線の本数は

$k < -1, 0 < k$ のとき 1 本

$k = -1, 0$ のとき 2 本

$-1 < k < 0$ のとき 3 本

5

【解答】 $p > \frac{1}{4}$

【解説】

$f(x) = x^3 - 3px + p$ とおく。

方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は、

$f(x)$ が極値をもち、さらに、極大値と極小値が異符号であること

すなわち (極大値) × (極小値) < 0

となることである。

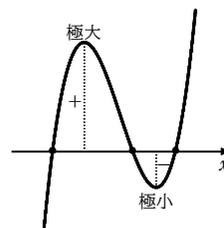
$f'(x) = 3x^2 - 3p = 3(x^2 - p)$

$f(x)$ が極値をもつ条件は $p > 0$

このとき、 $f'(x) = 0$ から $x = \pm\sqrt{p}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$-\sqrt{p}$...	\sqrt{p}	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



よって $f(-\sqrt{p}) \cdot f(\sqrt{p}) < 0$

すなわち $p(2\sqrt{p} + 1) \cdot p(-2\sqrt{p} + 1) < 0$

ゆえに $p^2(1 - 4p) < 0$

$p > 0$ より $p^2 > 0$ であるから $1 - 4p < 0$

したがって $p > \frac{1}{4}$

1

【解答】 1 個

【解説】

$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ とおくと $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = 0, 1$

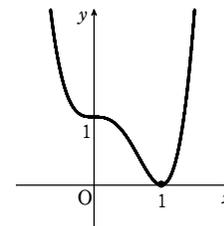
y の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	1	...
y'	-	0	-	0	+
y	↘	1	↘	0	↗

よって、この関数のグラフは右の図のようになり、

グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個

ゆえに、方程式の異なる実数解の個数は 1 個



2

【解答】 略

【解説】

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$ とおくと $f(0) = 1, f(1) = -1$

よって $f(0)f(1) < 0$

ゆえに、方程式 $f(x) = 0$ は区間 $0 < x < 1$ に実数解をもつ。

3

【解答】 (1) $-1 < k < 3$ (2) $0 < c < 4\sqrt{2}$

【解説】

(1) $x^3 - 2x + 1 = x + k$ とすると $x^3 - 3x + 1 = k$

曲線 $y = x^3 - 2x + 1$ と直線 $y = x + k$ が異なる 3 点を共有するための条件は、曲線

$y = x^3 - 3x + 1$ …… ① と直線 $y = k$ が異なる 3 点を共有することである。

① から $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = \pm 1$

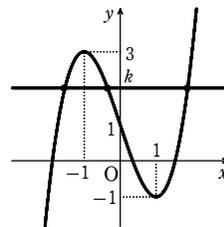
$y = x^3 - 3x + 1$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大	↘	極小	↗
		3		-1	

よって、曲線 ① の概形は図のようになる。

曲線 ① と直線 $y = k$ が異なる 3 つの共有点をもつよ

うな k の値の範囲は、図から $-1 < k < 3$



(2) 方程式を変形して $-x^3 + 6x = c$ …… ①

$y = -x^3 + 6x$ とすると

$y' = -3x^2 + 6 = -3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

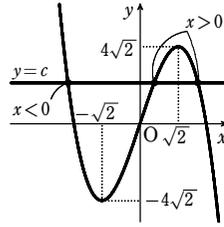
$y' = 0$ とすると $x = \pm\sqrt{2}$

y の増減表は右のようになり、更に $x = 0$ の

x	...	$-\sqrt{2}$...	$\sqrt{2}$...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	極小	↗	極大	↘
		$-4\sqrt{2}$		$4\sqrt{2}$	

とき $y=0$ であるから、 $y=-x^3+6x$ のグラフは右図のようになる。

方程式①が、2つの異なる正の解と1つの負の解をもつための条件は、このグラフと直線 $y=c$ が、 $x>0$ の範囲で2個、 $x<0$ の範囲で1個の共有点をもつことである。よって、図から $0<c<4\sqrt{2}$

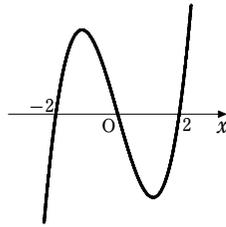


4

【解答】 (1) $-2<x<0, 2<x$ (2) $x=-1, 2\leq x$

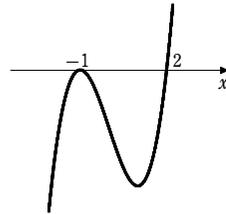
【解説】

(1) $y=x^3-4x$ ……①とおくと $y=x(x+2)(x-2)$
 $y=0$ の解から、 x 軸との共有点の x 座標は $x=-2, 0, 2$ で、 x^3 の係数が正。
 よって、①のグラフは右図のようになる。
 求める不等式の解は、①のグラフの $y>0$ となる x の値の範囲であるから $-2<x<0, 2<x$



(2) $y=x^3-3x-2$ ……①とおくと

$y=(x+1)^2(x-2)$
 $y=0$ の解から、 x 軸との共有点の x 座標は $x=-1, 2$ で、 x^3 の係数が正。
 よって、①のグラフは右図のようになる。
 求める不等式の解は、①のグラフの $y\geq 0$ となる x の値の範囲であるから $x=-1, 2\leq x$



5

【解答】 (ア) 2 (イ) $\frac{1}{2}$ (ウ) 4

【解説】

$\log_2 x = t$ とおくと、 t の値1つに対して、 x の値が必ず1つ対応する。

ゆえに、方程式 $t^3-3t=k$ がちょうど2つの異なる解をもつときを考える。

$f(t) = t^3-3t$ とすると $f'(t) = 3t^2-3 = 3(t+1)(t-1)$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	…	-1	…	1	…
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	2	↘	-2	↗

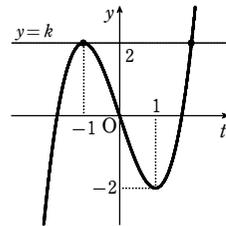
よって、 $y=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=k$ ($k>0$) がちょうど2つの共有点をもつような k の値は $k=7^2$

このとき、 t の方程式は $t^3-3t=2$

ゆえに $(t+1)^2(t-2)=0$ よって $t=-1, 2$

すなわち $\log_2 x = -1, 2$ したがって $x = \frac{1}{2}, 4$



1

【解答】 6

【解説】

$f(x) = x^3+32-px^2$ とおく。

$x\geq 0$ のとき $f(x)\geq 0$ が成り立つような定数 p の条件を求める。

$f(x) = x^3-px^2+32$ から $f'(x) = 3x^2-2px = x(3x-2p)$

$f'(x)=0$ となる x の値は $x=0, \frac{2}{3}p$

[1] $p\leq 0$ のとき

$x\geq 0$ において $f'(x)\geq 0$ であるから、 $f(x)$ は $x\geq 0$ で単調に増加する。

$f(0)=32$ より、 $x\geq 0$ のとき $f(x)\geq 0$ が成り立つ。

[2] $p>0$ のとき

$x\geq 0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって、 $x\geq 0$ のとき $f(x)\geq 0$ が成り立つ

条件は $-\frac{4}{27}p^3+32\geq 0$

整理すると $p^3\leq 8\cdot 27$

$p>0$ であるから $0<p\leq 6$

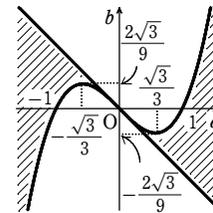
[1], [2] から、 $x\geq 0$ のとき $f(x)\geq 0$ が成り立つような p の条件は $p\leq 6$

ゆえに、求める p の最大値は 6

2

【解答】 (図) 境界線を含まない。

x	0	…	$\frac{2}{3}p$	…
$f'(x)$	↗	-	0	+
$f(x)$	32	↘	$-\frac{4}{27}p^3+32$	↗



【解説】

$y=x^3-x$ から $y'=3x^2-1$

よって、曲線上の点 (t, t^3-t) における接線の方程式は

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

すなわち $y=(3t^2-1)x-2t^3$

この直線が点 (a, b) を通るとき $b=(3t^2-1)a-2t^3$

整理して $2t^3-3at^2+a+b=0$ ……①

3次関数のグラフでは、接点と異なる接線も異なるから、点 (a, b) から3本の相異なる接線が引けるための必要十分条件は、 t の3次方程式①が異なる3つの実数解をもつことである。

よって、 $f(t) = 2t^3-3at^2+a+b$ とすると、 $f(t)$ は極値をもち、極大値と極小値の積が負となる。

$f'(t) = 6t(t-a)$ であるから、求める条件は

$a\neq 0$ かつ $f(0)f(a)<0$

すなわち $(a+b)(b-a^3+a)<0$ ……②

②で $a=0$ とすると $b^2<0$ となり、これを満たす実数 b は存在しない。ゆえに、条件

$a\neq 0$ は②に含まれるから、求める条件は②である。

②から

$$\begin{cases} a+b>0 \\ b-a^3+a<0 \end{cases}$$

または $\begin{cases} a+b<0 \\ b-a^3+a>0 \end{cases}$

すなわち

$$\begin{cases} b>-a \\ b<a^3-a \end{cases}$$

または $\begin{cases} b<-a \\ b>a^3-a \end{cases}$

よって、求める範囲は図の斜線部分。

ただし、境界線を含まない。

3

【解答】 (1) $-4<c<\frac{17}{27}$

(2) $-4<c<-1, \frac{-5-\sqrt{33}}{4}<\alpha<-2, \frac{-5+\sqrt{33}}{4}<\gamma<\frac{1}{2}$

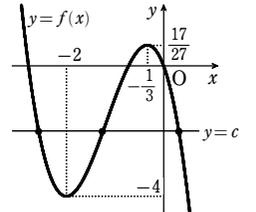
【解説】

(1) $2x^3+7x^2+4x+c=0$ から $-2x^3-7x^2-4x=c$

$f(x) = -2x^3-7x^2-4x$ とおくと $f'(x) = -6x^2-14x-4 = -2(3x+1)(x+2)$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	-2	…	$-\frac{1}{3}$	…
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-4	↗	$\frac{17}{27}$	↘



ゆえに、 $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

求める条件は、 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=c$

が異なる3個の共有点をもつことであるから $-4<c<\frac{17}{27}$

(2) $f(-1) = -1$ であるから、 $\alpha<\beta<\gamma$ に注意すると、右の図より、 $\beta<-1$ となる c の

値の範囲は $-4<c<-1$

また、 $c=-1$ とすると

$$2x^3+7x^2+4x-1=0$$

すなわち $(x+1)(2x^2+5x-1)=0$

よって $x=-1, \frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

さらに、 $c=-4$ とすると

$$2x^3+7x^2+4x-4=0$$

すなわち $(x+2)^2(2x-1)=0$ よって $x=-2, \frac{1}{2}$

したがって、図より、 α, γ の値の範囲は

$$\frac{-5-\sqrt{33}}{4}<\alpha<-2, \frac{-5+\sqrt{33}}{4}<\gamma<\frac{1}{2}$$

