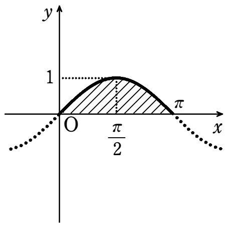
$\boxed{1}$

解答　2

解説

求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=-(-1)-(-1)=2$$



$\boxed{2}$

解答　$\sqrt{2}$

解説

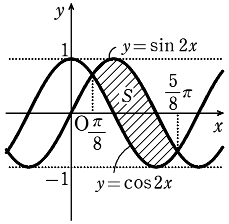
2 つの曲線の共有点の x 座標は，方程式 $\sin 2x=\cos 2x$ の解である。

$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で解くと　　$x=\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{5}{8}\pi$

$\dfrac{\pi}{8}\leqq x\leqq\dfrac{5}{8}\pi$ では，$\sin 2x\geqq\cos 2x$ であるから

$$S=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi}(\sin 2x-\cos 2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi}=\sqrt{2}$$



$\boxed{3}$

解答　$\dfrac{4}{e^4}$

解説

$y=f(x)$ とおく。

$f'(x)=(2x-6)\cdot e^{-x}+(x^2-6x+8)\cdot(-e^{-x})=-(x^2-8x+14)e^{-x}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x^2-8x+14=0$　　これを解いて　$x=4\pm\sqrt{2}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$4-\sqrt{2}$	$\cdots$	$4+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$f(x)=0$ とすると

$(x^2-6x+8)e^{-x}=0$

よって　　$(x-2)(x-4)=0$

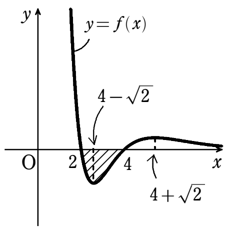
ゆえに　　$x=2,\ 4$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は，右の図のようになる。

求める面積を S とすると，S は右の図の斜線部分の面積であるから

$$S=-\int_2^4(x^2-6x+8)e^{-x}dx$$

$$=\int_2^4(x^2-6x+8)\cdot(e^{-x})'dx$$



$$=\Big[(x^2-6x+8)e^{-x}\Big]_2^4-\int_2^4(2x-6)\cdot e^{-x}dx$$

$$=\int_2^4(2x-6)\cdot(e^{-x})'dx=\Big[(2x-6)e^{-x}\Big]_2^4-\int_2^4 2\cdot e^{-x}dx=2e^{-4}+2e^{-2}+\Big[2e^{-x}\Big]_2^4$$

$$=4e^{-4}=\frac{4}{e^4}$$

$\boxed{4}$

解答　$\dfrac{e}{2}-1$

解説

$ex=xe^x$ とすると　$x(e-e^x)=0$

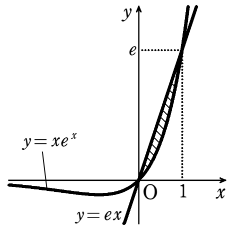
ゆえに　$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で　$ex\geqq xe^x$

直線と曲線の概形は右のようになる.

$$S=\int_0^1(ex-xe^x)dx=\int_0^1\{ex-x(e^x)'\}dx$$

$$=\left[\frac{e}{2}x^2\right]_0^1-\Big[xe^x\Big]_0^1+\int_0^1 e^x dx=\frac{e}{2}-1$$　答



$\boxed{5}$

解答　$\dfrac{4}{3}$

解説

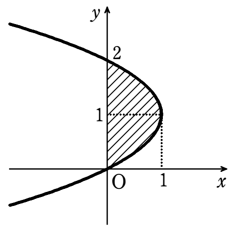
$x=0$ とすると　　$y=0,\ 2$

$0\leqq y\leqq 2$ では　　$x=-y^2+2y\geqq 0$

であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^2 x\,dy=\int_0^2(-y^2+2y)dy$$

$$=\left[-\frac{y^3}{3}+y^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$



$\boxed{6}$

解答　$a=\dfrac{3}{4}$

解説

$y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ ……①，　$y=a\cos x$ ……② とおく。

$a<0$ のとき，② は $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ で常に x 軸より下側にあるから，条件を満たさない。

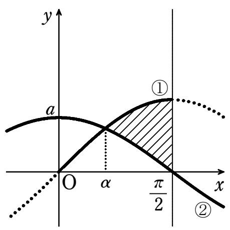
よって　　$a\geqq 0$

曲線 ② が，曲線 ① と x 軸と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積を 2 等分するとき，①，② の交点の x 座標を α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\sin\alpha=a\cos\alpha$$

これを $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に代入して

$$(a^2+1)\cos^2\alpha=1$$



$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha>0$ であるから　　$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

よって　　$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

条件から　　$2\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$　……③

ここで　　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)dx=\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}=-a+\cos\alpha+a\sin\alpha$

$$=-a+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}-a$$

一方　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

よって，③ から　　$2(\sqrt{a^2+1}-a)=1$　　　ゆえに　　$\sqrt{a^2+1}=a+\dfrac{1}{2}$

両辺を 2 乗して　　$a^2+1=a^2+a+\dfrac{1}{4}$

したがって　　$a=\dfrac{3}{4}$　　（これは $a\geqq 0$ を満たす）

$\boxed{7}$

解答　(1)　$a=2e$　　(2)　$\dfrac{4}{3}e^{\frac{3}{2}}-2e$

解説

(1)　$f(x)=x^2,\ g(x)=a\log x$ とすると

$$f'(x)=2x,\ g'(x)=\frac{a}{x}$$

$x=t$ で $y=x^2$ と $y=a\log x$ のグラフが接するとすると

$t^2=a\log t$ ……①，$2t=\dfrac{a}{t}$ ……②

② から　$t^2=\dfrac{a}{2}$　　① から　$\dfrac{a}{2}=a\log t$

よって，$a>0$ より　$\log t=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$　　$a=2t^2=2e$

(2)　求める面積を S とおくと

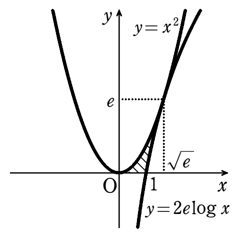
$$S=\int_0^e\left(e^{\frac{y}{2e}}-\sqrt{y}\right)dy$$

$$=\left[2e\cdot e^{\frac{y}{2e}}-\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right]_0^e$$

$$=2e\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)-\frac{2}{3}\sqrt{e^3}$$

$$=2e^{\frac{3}{2}}-2e-\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}}-2e$$



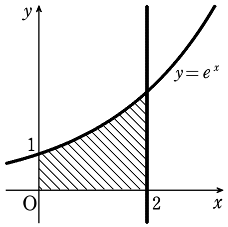
1

解答　(1)　e^2-1　　(2)　$3+6\log 2$　　(3)　$\frac{45}{4}$　　(4)　$\log 2$

解説

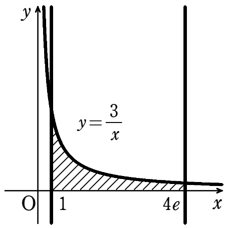
(1)　$0\leqq x\leqq 2$ では，$e^x>0$ であるから

$$S=\int_0^2 e^x dx=\left[e^x\right]_0^2=e^2-1$$



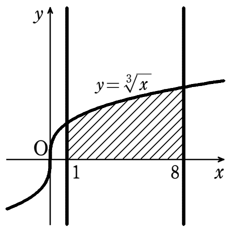
(2)　$1\leqq x\leqq 4e$ では，$\frac{3}{x}>0$ であるから

$$S=\int_1^{4e}\frac{3}{x}dx=\left[3\log|x|\right]_1^{4e}$$
$$=3\log 4e=3+6\log 2$$



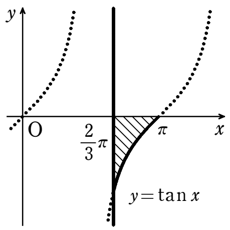
(3)　$1\leqq x\leqq 8$ では，$\sqrt[3]{x}>0$ であるから

$$S=\int_1^8\sqrt[3]{x}\,dx=\left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_1^8=\frac{45}{4}$$



(4)　$\frac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi$ では，$\tan x<0$ であるから

$$S=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(-\tan x)dx=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$
$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=\left[\log|\cos x|\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$
$$=\log 1-\log\frac{1}{2}=\log 2$$



2

解答　(1)　$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\frac{5}{2}$

解説

(1)　方程式 $\sin x=\cos 2x$ を解くと　$\sin x=1-2\sin^2 x$

よって　$2\sin^2 x+\sin x-1=0$　　ゆえに　$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$0\leqq x\leqq\pi$ から　$\sin x=\frac{1}{2}$　　これを解いて　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

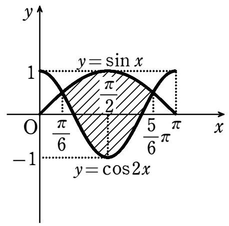
よって，2 曲線の位置関係は，右図のようになり，

$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi$ のとき

$\sin x\geqq\cos 2x$

したがって，求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\sin x-\cos 2x)dx$$
$$=\left[-\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$



(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ における 2 曲線の共有点の x 座標は

$\sin x=\sin 2x$ を解くと

$\sin x-2\sin x\cos x=0$

$\sin x(1-2\cos x)=0$

$\sin x=0$　から　　$x=0,\ \pi$

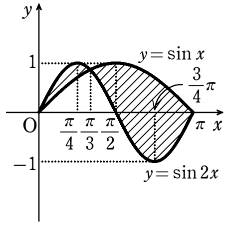
$\cos x=\frac{1}{2}$ から　　$x=\frac{\pi}{3}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ では　　$\sin x\leqq\sin 2x$

$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi$ では　　$\sin x\geqq\sin 2x$

であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{5}{2}$$



3

解答　$e(7-e\sqrt{e})$

解説

$f(x)=(2x^2-7x+5)e^x$ とおく。

$f'(x)=(4x-7)e^x+(2x^2-7x+5)e^x$

$=(2x^2-3x-2)e^x$

$=(2x+1)(x-2)e^x$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-\frac{1}{2},\ 2$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{9}{\sqrt{e}}$	↘	極小 $-e^2$	↗

$f(x)=(x-1)(2x-5)e^x$

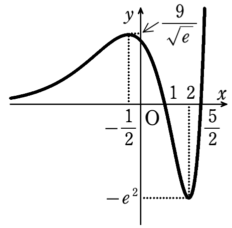
$f(x)=0$ とすると　　$x=1,\ \frac{5}{2}$

また　$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x^2-7x+5)e^x$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}\left(2+\frac{7}{t}+\frac{5}{t^2}\right)=0$$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

以上から，グラフは右の図のようになる。



よって，求める面積は

$$\int_1^{\frac{5}{2}}\{-(2x^2-7x+5)e^x\}dx=-\left[(2x^2-7x+5)e^x\right]_1^{\frac{5}{2}}+\int_1^{\frac{5}{2}}(4x-7)e^x dx$$
$$=-0+\left[(4x-7)e^x\right]_1^{\frac{5}{2}}-\int_1^{\frac{5}{2}}4e^x dx$$
$$=3e^{\frac{5}{2}}-(-3e)-\left[4e^x\right]_1^{\frac{5}{2}}=3e^{\frac{5}{2}}+3e-4e^{\frac{5}{2}}+4e$$
$$=7e-e^{\frac{5}{2}}=e(7-e\sqrt{e})$$

4

解答　(1)　$e-\frac{5}{2}$　　(2)　$\frac{12\sqrt{3}-18}{5}$　　(3)　$\log 2-\frac{1}{3}$

解説

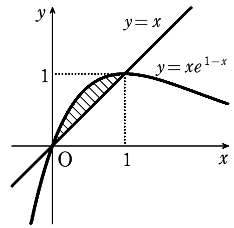
(1)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式　$xe^{1-x}=x$

すなわち　$x(e^{1-x}-1)=0$ を解いて

$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ では，$xe^{1-x}\geqq x$ であるから

$$S=\int_0^1(xe^{1-x}-x)dx=\int_0^1 x(-e^{1-x})'dx-\int_0^1 x\,dx$$
$$=\left[x(-e^{1-x})\right]_0^1-\int_0^1(-e^{1-x})dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$=-1+\left[-e^{1-x}\right]_0^1-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}$$



(2)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式 $x\sqrt{3-x}=x$　すなわち　$x(\sqrt{3-x}-1)=0$ を解いて　　$x=0,\ 2$

$0\leqq x\leqq 2$ では，$x\sqrt{3-x}\geqq x$ であるから

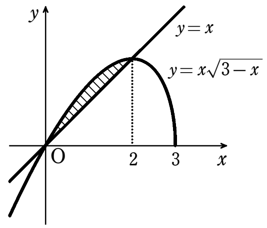
$$S=\int_0^2(x\sqrt{3-x}-x)dx=\int_0^2 x\sqrt{3-x}\,dx-\int_0^2 x\,dx$$

$\sqrt{3-x}=t$ とおくと　　$x=3-t^2,\ dx=-2t\,dt$

x	$0\longrightarrow 2$
t	$\sqrt{3}\longrightarrow 1$

したがって

$$S=\int_{\sqrt{3}}^1(3-t^2)t\cdot(-2t)dt-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$=\left[-\frac{2}{5}t^5+2t^3\right]_1^{\sqrt{3}}-2=\frac{12\sqrt{3}-18}{5}$$



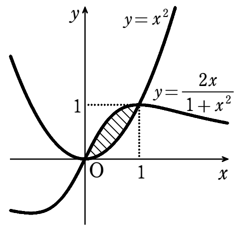
(3)　2 曲線の共有点の x 座標は，方程式 $x^2=\dfrac{2x}{1+x^2}$ の解である。方程式を変形すると

$$x^2(1+x^2)=2x$$
$$x(x^3+x-2)=0$$
$$x(x-1)(x^2+x+2)=0$$

よって　$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ で $x^2\leqq\dfrac{2x}{1+x^2}$ であるから

$$S=\int_0^1\left(\frac{2x}{1+x^2}-x^2\right)dx=\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1-\frac{1}{3}=\log 2-\frac{1}{3}$$



5

解答　(1)　$\dfrac{9}{2}$　(2)　$3e^2-3$

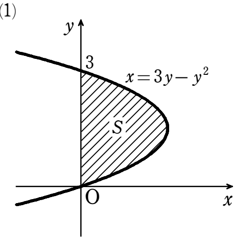
解説

(1)　$3y-y^2=0$ とすると　$y=0,\ 3$

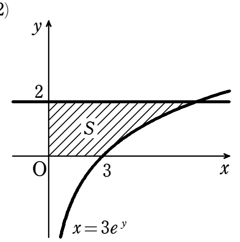
$0\leqq y\leqq 3$ では，$3y-y^2\geqq 0$ であるから　$S=\displaystyle\int_0^3(3y-y^2)dy=\left[\frac{3}{2}y^2-\frac{y^3}{3}\right]_0^3=\frac{9}{2}$

(2)　$0\leqq y\leqq 2$ では，$3e^y>0$ であるから　$S=\displaystyle\int_0^2 3e^y dy=\Big[3e^y\Big]_0^2=3e^2-3$

(1)



(2)



6

解答　$a=2-\sqrt{2}$

解説

$y=\sin 2x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ ……①，$y=a\sin x$ ……② とおく。

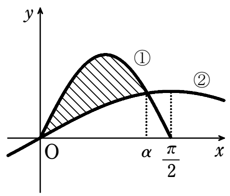
曲線 ② が，曲線 ① と x 軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するとき，①，② の原点以外の交点の x 座標を α とすると $\sin 2\alpha=a\sin\alpha$ から

$$2\sin\alpha\cos\alpha=a\sin\alpha$$

$\sin\alpha>0$ であるから　$\cos\alpha=\dfrac{a}{2}$

ここで，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$0<\dfrac{a}{2}<1$

すなわち　$0<a<2$ ……③



題意から　$\displaystyle\int_0^{\alpha}(\sin 2x-a\sin x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\alpha}(\sin 2x-a\sin x)dx=\left[-\frac{\cos 2x}{2}+a\cos x\right]_0^{\alpha}$

$$=-\frac{\cos 2\alpha-1}{2}+a(\cos\alpha-1)=-\frac{(2\cos^2\alpha-1)-1}{2}+a\cos\alpha-a$$
$$=\frac{a^2}{4}-a+1\quad\left(\cos\alpha=\frac{a}{2}\text{ から}\right)$$

一方　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

ゆえに　$\dfrac{a^2}{4}-a+1=\dfrac{1}{2}\times 1$　　よって　$a^2-4a+2=0$

これを解くと　$a=2\pm\sqrt{2}$

③ を満たすものは　$a=2-\sqrt{2}$

7

解答　$a=\dfrac{e}{2}$，面積は $\dfrac{1}{6}e^3-\dfrac{1}{2}e$

解説

$f(x)=\sqrt{x}-a\log x$ とおく．$x>0$ で　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-2a}{2x}$

$f(x)$ は $x<4a^2$ で減少，$x>4a^2$ で増加.

ゆえに，1 点のみを共有するための条件は　$f(4a^2)=0$

よって　$2a-a\log(4a^2)=2a(1-\log 2a)=0$

よって　$a=\dfrac{e}{2}$　答

2 曲線の共有点の x 座標は　$x=4a^2=e^2$

したがって，求める面積 S は

$$S=\int_0^{e^2}\sqrt{x}\,dx-\int_1^{e^2}\frac{e}{2}\log x\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{e^2}-\frac{e}{2}\Big[x\log x-x\Big]_1^{e^2}$$
$$=\frac{2}{3}e^3-\frac{e}{2}(2e^2-e^2+1)=\frac{1}{6}e^3-\frac{1}{2}e\quad\text{答}$$

1

解答　(1)　$\dfrac{24\sqrt{3}}{5}$　(2)　$20\log 3-16$　(3)　3　(4)　$\dfrac{9}{2}$

解説

(1)　定義域は $x-1\geqq 0$ から　$x\geqq 1$

$y=0$ とすると　$(-2x+8)\sqrt{x-1}=0$　　よって　$x=1,\ 4$

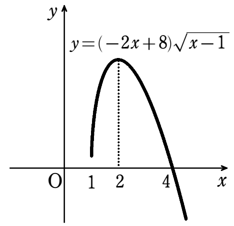
また　$y'=-2\sqrt{x-1}+(-2x+8)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$$=\frac{-2(x-1)-x+4}{\sqrt{x-1}}=\frac{-3(x-2)}{\sqrt{x-1}}$$

$y'=0$ とすると　$x=2$

y の増減表は次のようになる。

x	1	…	2	…
y'		+	0	−
y	0	↗	極大	↘



したがって，グラフは右の図のようになる。

$\sqrt{x-1}=t$ とおくと

$x=t^2+1,\ dx=2t\,dt$

x	1 → 4
t	0 → $\sqrt{3}$

求める面積 S は

$$S=-2\int_1^4(x-4)\sqrt{x-1}\,dx=-2\int_0^{\sqrt{3}}(t^2-3)t\cdot 2t\,dt$$
$$=-4\int_0^{\sqrt{3}}(t^4-3t^2)dt=-4\left[\frac{t^5}{5}-t^3\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{24\sqrt{3}}{5}$$

(2)　$y=0$ とすると　$10-9e^{-x}-e^x=0$

$10-9e^{-x}-e^x=0\iff(e^x)^2-10e^x+9=0\iff(e^x-1)(e^x-9)=0$

$\iff e^x=1,\ 9\iff x=\log 1,\ \log 9$

$\iff x=0,\ 2\log 3$

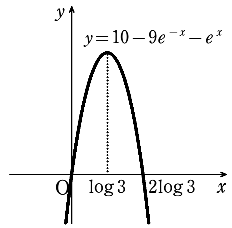
また　$y'=9e^{-x}-e^x=-e^{-x}(e^{2x}-9)$

$=-e^{-x}(e^x+3)(e^x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=\log 3$

y の増減表は右のようになる。よって，グラフは右の図のようになる。求める面積 S は

x	…	$\log 3$	…
y'	+	0	−
y	↗	極大	↘



$$S=\int_0^{2\log 3}(10-9e^{-x}-e^x)dx$$
$$=\Big[10x+9e^{-x}-e^x\Big]_0^{2\log 3}=20\log 3-16$$

(3)　$y=0$ とすると　$1+\cos x=0$ または $\sin 2x=0$

$0\leqq x\leqq\pi$ であるから　$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi$

$(1+\cos x)^2\geqq 0$ に注意して，$\sin 2x$ の符号を考えると

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y\geqq 0$，　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき $y\leqq 0$

また　$y=(1+\cos x)^2\cdot 2\sin x\cos x$

$=-2(\cos^3 x+2\cos^2 x+\cos x)(-\sin x)$

$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \longrightarrow 0$

x	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi$
t	$0 \longrightarrow -1$

求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\,dx$$

$$=-2\int_1^0 (t^3+2t^2+t)dt+2\int_0^{-1}(t^3+2t^2+t)dt$$

$$=-2\left[\frac{t^4}{4}+\frac{2}{3}t^3+\frac{t^2}{2}\right]_1^0+2\left[\frac{t^4}{4}+\frac{2}{3}t^3+\frac{t^2}{2}\right]_0^{-1}$$

$$=2\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=3$$

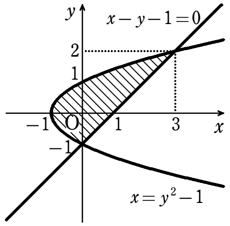
(4)　曲線 $x=y^2-1$ と直線 $x-y-1=0$ すなわち $x=y+1$ の交点の y 座標は，方程式 $y^2-1=y+1$ の解である。

よって　　$y^2-y-2=0$

これを解いて　$y=-1,\ 2$

グラフは右図のようになり，$-1\leqq y\leqq 2$ のとき

$y+1\geqq y^2-1$



ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(y+1)-(y^2-1)\}dy$$

$$=\int_{-1}^{2}(-y^2+y+2)dy$$

$$=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$$

別解　公式 $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いて

$$S=-\int_{-1}^{2}(y+1)(y-2)dy=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\frac{9}{2}$$

$\boxed{2}$

解答　$\frac{32}{3}$

解説

求める面積を S とする。

(1)　曲線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ の共有点の x 座標は

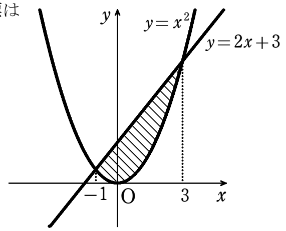
$x^2=2x+3$ から　$x=-1,\ 3$

また，$-1\leqq x\leqq 3$ のとき　$x^2\leqq 2x+3$

よって　$S=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx$

$$=\left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}$$

$$=\frac{32}{3}$$



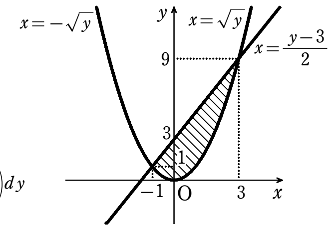
(2)　$x=-1$ のとき　$y=1$,

$x=3$　のとき　$y=9$

また，$y=x^2$ から　$x=\pm\sqrt{y}$

$y=2x+3$ から　$x=\frac{y-3}{2}$

よって，右の図から



$$S=\int_0^1\{\sqrt{y}-(-\sqrt{y})\}dy+\int_1^9\left(\sqrt{y}-\frac{y-3}{2}\right)dy$$

$$=\int_0^1 2y^{\frac{1}{2}}dy+\int_1^9\left(y^{\frac{1}{2}}-\frac{y}{2}+\frac{3}{2}\right)dy$$

$$=\frac{4}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{y^2}{4}+\frac{3}{2}y\right]_1^9$$

$$=\frac{4}{3}+\left(18-\frac{81}{4}+\frac{27}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{32}{3}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(0,\ 0)$，$\left(\log 2,\ \frac{1}{2}\log 2\right)$　　(2)　$\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{8}$

解説

(1)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は $xe^{-x}=2xe^{-2x}$ の解。

両辺に e^{2x} を掛けて整理すると　$x(e^x-2)=0$

よって，$x=0,\ \log 2$

これを $C_1:y=xe^{-x}$ に代入するとそれぞれ

$x=0$ のとき $y=0\cdot e^0=0$

$x=\log 2$ のとき $y=\log 2\cdot e^{-\log 2}=\log 2\cdot\frac{1}{e^{\log 2}}=\frac{1}{2}\log 2$

したがって，交点の座標は　$(0,\ 0)$，$\left(\log 2,\ \frac{1}{2}\log 2\right)$

(2)　$0\leqq x\leqq \log 2$ $(1\leqq e^x\leqq 2)$ のとき

$2xe^{-2x}-xe^{-x}=xe^{-2x}(2-e^x)\geqq 0$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\log 2}(2xe^{-2x}-xe^{-x})dx$$

$$=\left[2x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}2\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}dx-\left[x\cdot(-e^{-x})\right]_0^{\log 2}+\int_0^{\log 2}(-e^{-x})dx$$

$$=-\log 2\cdot e^{-2\log 2}+\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\log 2}+\log 2\cdot e^{-\log 2}+\left[e^{-x}\right]_0^{\log 2}$$

$$=-\frac{\log 2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)+\frac{\log 2}{2}+\frac{1}{2}-1$$

$$=\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{8}$$

$\boxed{4}$

解答　$a=\frac{e}{2}$

解説

2 曲線の交点の x 座標は，方程式 $\tan x=a\sin 2x$ ……① の解である。

$x=0$ は ① の解であり，$x=\frac{\pi}{2}$ は ① の解ではない。

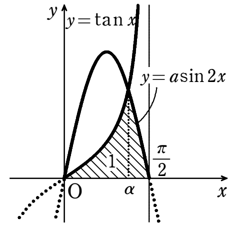
$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，① から　　$\frac{\sin x}{\cos x}=2a\sin x\cos x$

ゆえに　　$2a\cos^2 x=1$　　　よって　　$\cos^2 x=\frac{1}{2a}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$　……②

等式 ② を満たす x の値を $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

このとき，2 曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S は



$$S=\int_0^\alpha \tan x\,dx+\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}a\sin 2x\,dx$$

$$=\left[-\log(\cos x)\right]_0^\alpha-\frac{a}{2}\left[\cos 2x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\log(\cos\alpha)-\frac{a}{2}\{-1-(2\cos^2\alpha-1)\}$$

$$=-\log\frac{1}{\sqrt{2a}}+a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2=\frac{1}{2}\log 2a+\frac{1}{2}$$

$S=1$ となるための条件は　　$\frac{1}{2}\log 2a+\frac{1}{2}=1$　　　整理して　　$\log 2a=1$

ゆえに　　$2a=e$　　　　したがって　　$a=\frac{e}{2}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，$\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$　　(2)　$k=2\sqrt{6}$

解説

(1)　C_1，C_2 の 2 交点の x 座標は，方程式 $k\sin x=\cos x$ ……① の解である。

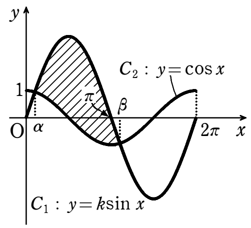
① から　　$k^2\sin^2 x=\cos^2 x$　　　よって　　$k^2\sin^2 x=1-\sin^2 x$

ゆえに　　$\sin^2 x=\frac{1}{k^2+1}$　　　したがって　　$\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

右の図から明らかに　　$\sin\alpha>0$，$\sin\beta<0$

したがって

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，$\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$



(2)　C_1，C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta(k\sin x-\cos x)dx$$

$$=\left[-k\cos x-\sin x\right]_\alpha^\beta$$

$$=k(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha-\sin\beta$$

α，β は ① の解であるから　　$\cos\alpha=k\sin\alpha$，$\cos\beta=k\sin\beta$

よって　　$S=k(k\sin\alpha-k\sin\beta)+(\sin\alpha-\sin\beta)=(k^2+1)(\sin\alpha-\sin\beta)$

$$=(k^2+1)\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)=2\sqrt{k^2+1}$$

$S=10$ から　　$\sqrt{k^2+1}=5$　　　ゆえに　　$k^2=24$

$k>0$ であるから　　$k=2\sqrt{6}$

6

解答　$a=\dfrac{1}{2e}$，面積 $\dfrac{2}{3}\sqrt{e}-1$

解説

$f(x)=\log x$，$g(x)=ax^2$ とすると　　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g'(x)=2ax$

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=c$ の点で接するための条件は

$$\log c=ac^2 \cdots\cdots ①,\quad \frac{1}{c}=2ac \cdots\cdots ②$$

② から　　$a=\dfrac{1}{2c^2}$　$\cdots\cdots$ ③　　　③ を ① に代入して　　$\log c=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$c=\sqrt{e}$　　　したがって　　$a=\dfrac{1}{2c^2}=\dfrac{1}{2e}$

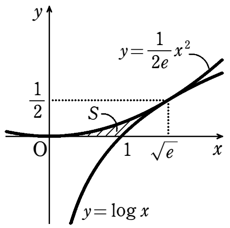
このとき，接点の座標は　　$\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\right)$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{2e}x^2dx-\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx$$

$$=\frac{1}{2e}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{e}}-\Big[x\log x-x\Big]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{e}-\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}+1\right)=\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$$



7

解答　$a=\dfrac{e-2}{2e}$

解説

$y=\log ax$　$\cdots\cdots$ ① を微分すると　　$y'=\dfrac{a}{ax}=\dfrac{1}{x}$

接点の x 座標を t とすると，接線の方程式は

$$y-\log at=\frac{1}{t}(x-t)\qquad すなわち\qquad y=\frac{1}{t}x+\log at-1\quad \cdots\cdots ②$$

これが原点を通るから　　$0=\log at-1$

よって　　$at=e$　　　$a>0$ から　　$t=\dfrac{e}{a}$

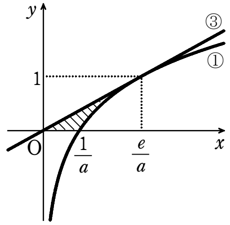
これを ② に代入して，接線の方程式は　　$y=\dfrac{a}{e}x$　$\cdots\cdots$ ③

また，接点の y 座標は　　$y=\log\left(a\cdot\dfrac{e}{a}\right)=1$

① から　$x=\dfrac{1}{a}e^y$　　　③ から　$x=\dfrac{e}{a}y$

よって，曲線 ① と接線 ③ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^1\left(\frac{1}{a}e^y-\frac{e}{a}y\right)dy=\frac{1}{a}\left[e^y-\frac{e}{2}y^2\right]_0^1=\frac{e-2}{2a}$$



この面積が e であるとき　　$\dfrac{e-2}{2a}=e$

したがって　　$a=\dfrac{e-2}{2e}$　　（これは $a>0$ を満たす）

1

解答　$t=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ で最小値 $\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+2-\sqrt{5}$

解説

[1]　$0<t<1$ のとき

$$S(t)=-\int_t^1\log x\,dx+\int_1^{t+1}\log x\,dx=-\Big[x\log x-x\Big]_t^1+\Big[x\log x-x\Big]_1^{t+1}$$

$$=(t+1)\log(t+1)+t\log t-2t+1$$

$$S'(t)=\log(t+1)+1+\log t+1-2=\log t(t+1)$$

$S'(t)=0$ とすると　　$t(t+1)=1$　　　よって　　$t^2+t-1=0$

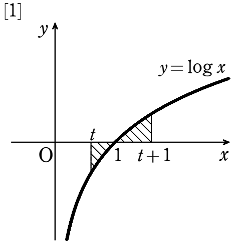
$0<t<1$ であるから　　$t=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

[2]　$1\leqq t$ のとき

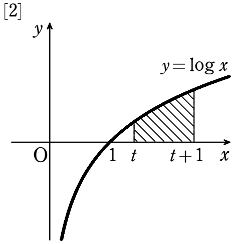
$$S(t)=\int_t^{t+1}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_t^{t+1}=(t+1)\log(t+1)-t\log t-1$$

$$S'(t)=\log(t+1)+1-\log t-1=\log\frac{t+1}{t}=\log\left(1+\frac{1}{t}\right)>0$$

[1]



[2]



[1]，[2] から，$t>0$ における $S(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$	／	$-$	0	$+$		$+$
$S(t)$	／	↘	極小	↗		↗

したがって，$S(t)$ は $t=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ で最小となり，最小値は

$$S\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2-\sqrt{5}$$

ここで，$\log\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\log\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=-\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ であるから

$$S\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}+2-\sqrt{5}$$

$$=\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}+2-\sqrt{5}$$

2

解答　$\dfrac{e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$

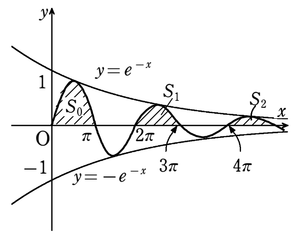
解説

$n=0$，1，2，$\cdots\cdots$ とする。

曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ と x 軸の交点の x 座標は，$e^{-x}\sin x=0$ から　　$\sin x=0$

ゆえに　　$x=n\pi$

また，$y\geqq 0$ となるのは，$e^{-x}>0$ であるから，$\sin x\geqq 0$ のときである。



よって　　$2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$

ゆえに　　$S_k=\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$

$$=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}-\left\{\Big[e^{-x}\sin x\Big]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}+\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\right\}$$

すなわち　　$S_k=e^{-(2k+1)\pi}+e^{-2k\pi}-S_k$

したがって　　$S_k=\dfrac{1}{2}\{e^{-(2k+1)\pi}+e^{-2k\pi}\}$

よって　　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}S_k=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n}e^{-(2k+1)\pi}+\sum_{k=0}^{n}e^{-2k\pi}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\pi}\{1-e^{-2(n+1)\pi}\}}{1-e^{-2\pi}}+\frac{1-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}\right)$$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\pi}+1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$

3

解答　(1)　$y=2x\log 2-\dfrac{4}{e}$　　(2)　$\dfrac{2}{e^2}-\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　$y=x\log x$ について

$$y'=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1,$$

$$y''=\frac{1}{x}>0$$

$y'=0$ とすると　　$x=\dfrac{1}{e}$

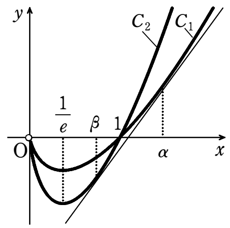
$y=x\log x$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	極小	↗

また

$$\lim_{x\to+0}x\log x=0\qquad \lim_{x\to\infty}x\log x=\infty$$

よって，2 つの曲線 C_1，C_2 の概形は右図のようになる。



C_1 上の点 $(\alpha,\ \alpha\log\alpha)$ における接線の方程式は

$$y-\alpha\log\alpha=(\log\alpha+1)(x-\alpha)$$

すなわち　$y=(\log\alpha+1)x-\alpha$　$\cdots\cdots$ ①

C_2 上の点 $(\beta,\ 2\beta\log\beta)$ における接線の方程式は

$$y-2\beta\log\beta=2(\log\beta+1)(x-\beta)$$

すなわち　$y=2(\log\beta+1)x-2\beta$　$\cdots\cdots$ ②

① と ② が一致するとき

$$\log\alpha+1=2(\log\beta+1)\quad \cdots\cdots ③$$

$$-\alpha=-2\beta\quad \cdots\cdots ④$$

④ から　$\alpha=2\beta$

これを ③ に代入して

$$\log 2\beta+1=2\log\beta+2$$

ゆえに　$\log 2+\log\beta=2\log\beta+1$

よって　$\log\beta=\log 2-1=\log\dfrac{2}{e}$

ゆえに　$\beta=\dfrac{2}{e}$　　よって　$\alpha=\dfrac{4}{e}$

これを ① に代入して ℓ の方程式は

$$y=\left(\log\frac{4}{e}+1\right)x-\frac{4}{e}$$

すなわち　$y=2x\log 2-\dfrac{4}{e}$

(2)　(1) の図から

$$S=\int_{\beta}^{1}\left(2x\log x-2x\log 2+\frac{4}{e}\right)dx+\int_{1}^{\alpha}\left(x\log x-2x\log 2+\frac{4}{e}\right)dx$$

$$=2\int_{\beta}^{1}x\log x\,dx+\int_{1}^{\alpha}x\log x\,dx+\int_{\beta}^{\alpha}\left(\frac{4}{e}-2x\log 2\right)dx$$

ここで

$$\int x\log x\,dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C\ \ (C\text{ は積分定数})$$

よって，$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2\log x-\dfrac{1}{4}x^2$ とおくと

$$S=2F(1)-2F(\beta)+F(\alpha)-F(1)+\left[\frac{4}{e}x-x^2\log 2\right]_{\beta}^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\alpha^2\log\alpha-\frac{1}{4}\alpha^2-\beta^2\log\beta+\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{4}$$

$$+\frac{4}{e}\alpha-\alpha^2\log 2-\frac{4}{e}\beta+\beta^2\log 2$$

$\alpha=\dfrac{4}{e}$，$\beta=\dfrac{2}{e}$ であるから

$$S=\frac{8}{e^2}\log\frac{4}{e}-\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}\log\frac{2}{e}+\frac{2}{e^2}-\frac{1}{4}$$

$$+\frac{16}{e^2}-\frac{16}{e^2}\log 2-\frac{8}{e^2}+\frac{4}{e^2}\log 2$$

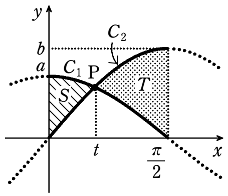
$$=\frac{2}{e^2}-\frac{1}{4}$$

4

解答　(1)　$\sin t=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos t=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　(2)　$\sqrt{a^2+b^2}-b$

(3)　$b=\dfrac{4}{3}a$

解説



(1)　条件から，t は $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ で，$a\cos t=b\sin t$ を満たす。$a>0$ から　$\cos t=\dfrac{b}{a}\sin t$　……①

① を $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ に代入すると

$$\sin^2 t+\frac{b^2}{a^2}\sin^2 t=1$$

よって　$\dfrac{a^2+b^2}{a^2}\sin^2 t=1$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin t>0$ であるから　$\sin t=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ゆえに，① から　$\cos t=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2)　(1) の図から

$$S=\int_0^t(a\cos x-b\sin x)dx=\Big[a\sin x+b\cos x\Big]_0^t$$

$$=a\sin t+b\cos t-b=a\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+b\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-b$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}-b$$

(3)　(1) の図から

$$T=\int_t^{\frac{\pi}{2}}(b\sin x-a\cos x)dx=\Big[-b\cos x-a\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-a+b\cos t+a\sin t=-a+b\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+a\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}-a$$

$T=2S$ とすると　$\sqrt{a^2+b^2}-a=2(\sqrt{a^2+b^2}-b)$

よって　$2b-a=\sqrt{a^2+b^2}$　……②

$\sqrt{a^2+b^2}>0$ であるから　$2b-a>0$　　ゆえに　$b>\dfrac{1}{2}a$　……③

③ のとき，② の両辺を平方すると　$(2b-a)^2=a^2+b^2$

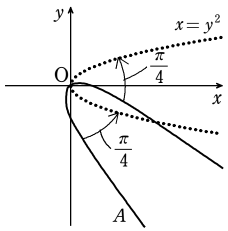
よって　$3b^2-4ab=0$　　$b\fallingdotseq 0$ であるから　$b=\dfrac{4}{3}a$　……④

$a>0$ より，④ は ③ を満たすから，④ が求める条件である。

5

解答　(1)　$x=y^2$　　(2)　$\dfrac{9}{2}$

解説



(1)　曲線 A 上の点 $(X,\ Y)$ を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点の座標を $(x,\ y)$ とする。

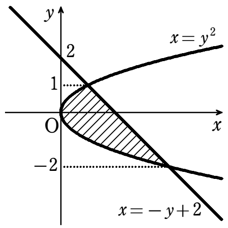
複素数平面上で，$\mathrm{P}(X+Yi)$，$\mathrm{Q}(x+yi)$ とすると，点 Q を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点が P であるから

$$X+Yi=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(x+yi)$$

これから　$X=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ ……①，$Y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$

これらを $\sqrt{2}(X-Y)=(X+Y)^2$ に代入すると　$2x=(\sqrt{2}\,y)^2$

すなわち　$x=y^2$　　これが求める曲線の方程式である。



(2)　① を $X=\sqrt{2}$ に代入して整理すると　$x=-y+2$

これは，直線 $x=\sqrt{2}$ を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した直線の方程式である。

直線 $x=-y+2$ と曲線 $x=y^2$ の交点の y 座標は，

$-y+2=y^2$ から　$(y+2)(y-1)=0$

ゆえに　$y=-2,\ 1$

よって，求める面積は

$$\int_{-2}^{1}(-y+2-y^2)dy=-\int_{-2}^{1}(y+2)(y-1)dy$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3=\frac{9}{2}$$

1

解答　$\sqrt{6}\pi$

解説

この楕円は x 軸および y 軸に関して対称である。

よって，求める面積 S は第１象限にある部分の面積の４倍である。

$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ から　　$y^2=\dfrac{3}{2}(2-x^2)$

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ での曲線の方程式は　　$y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2-x^2}$

また，$2-x^2\geqq 0$ であるから　　$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$

よって　　$S=4\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2-x^2}\,dx=2\sqrt{6}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$ は，半径 $\sqrt{2}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表すから

$$S=2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2=\sqrt{6}\pi$$

2

解答　$4\sqrt{3}$

解説

点 $(x,\ y)$ がこの曲線上にあるとすると，点 $(x,\ -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x,\ -y)$ も曲線上にあるから，この曲線は x 軸，y 軸，原点に関してそれぞれ対称である。

ゆえに，この曲線の $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の部分を考える。

$y^2\geqq 0$ であるから　　$x^2(3-x^2)\geqq 0$

よって　　$0\leqq x^2\leqq 3$　　　ゆえに　　$0\leqq x\leqq\sqrt{3}$

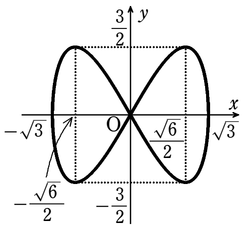
このとき　　$y=x\sqrt{3-x^2}$

$f(x)=x\sqrt{3-x^2}$ とおくと　　$f'(x)=\sqrt{3-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}}=\dfrac{3-2x^2}{\sqrt{3-x^2}}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x^2=\dfrac{3}{2}$　　　$0\leqq x\leqq\sqrt{3}$ であるから　　$x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$0\leqq x\leqq\sqrt{3}$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(x)$	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0



よって，対称性を考えると，曲線 $y^2=x^2(3-x^2)$ の概形は右の図のようになる。

したがって，

$-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{3}$，$-\dfrac{3}{2}\leqq y\leqq\dfrac{3}{2}$

この曲線で囲まれた部分は x 軸，y 軸，原点に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$S=4\int_0^{\sqrt{3}}x\sqrt{3-x^2}\,dx=4\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\sqrt{3}}(3-x^2)'\sqrt{3-x^2}\,dx$$

$$=-2\left[\frac{2}{3}(3-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{3}}=-2\left(-\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\right)=4\sqrt{3}$$

3

解答　(1)　$(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$　　(2)　$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

(1)　② から　　$y^2=4-3x^2$　……③

③ を ① に代入して整理すると　　$x^2=1$　　　よって　　$x=\pm 1$

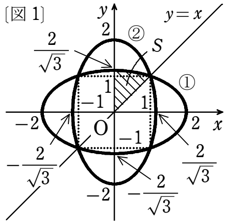
$x=\pm 1$ を ③ に代入して整理すると　　$y^2=1$　　　ゆえに　　$y=\pm 1$

よって，求める４つの交点の座標は　　$(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$

(2)　楕円の内部が重なった部分の図形を D とすると，図形 D は x 軸，y 軸，および直線 $y=x$ に関して対称である。

よって，[図１] の斜線部分の面積を S とすると，求める面積は $8S$ である。

[図１]

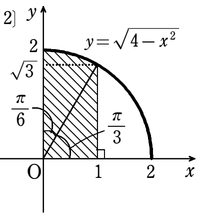


① より $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}$ であるから

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 1^2$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$ は [図２] の斜線部分の面積に等しいから，これを求めると

[図２]



$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに　　$S=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

よって，求める面積は

$$8S=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}\pi=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$$

4

解答　8π

解説

$5x^2+2xy+y^2=16$ から　　$y^2+2xy+5x^2-16=0$

これを y について解くと　　$y=-x\pm 2\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2\geqq 0$ から，曲線は $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲にある。

$f(x)=-x+2\sqrt{4-x^2}$

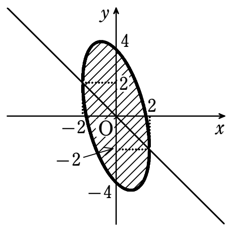
$g(x)=-x-2\sqrt{4-x^2}$

とすると，定義域内で　　$f(x)\geqq g(x)$

よって

$$S=\int_{-2}^{2}\{(-x+2\sqrt{4-x^2})-(-x-2\sqrt{4-x^2})\}dx$$

$$=4\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$



$\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ は，半径２の円の面積の $\dfrac{1}{2}$ を表すから　　$S=4\cdot\pi\cdot 2^2\cdot\dfrac{1}{2}=8\pi$

5

解答　$\dfrac{2}{3}$

解説

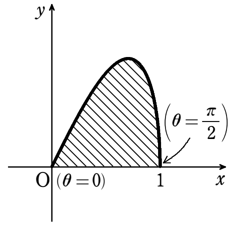
$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$y=0$ とすると　　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$

また，$y\geqq 0$ である。

x と θ の対応は右のようになる。

$x=\sin\theta$ から　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$



よって　　$S=\displaystyle\int_0^1 y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\cos\theta\,d\theta$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta)'\cos^2\theta\,d\theta=-2\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

6

解答　3π

解説

図から，$0\leqq t\leqq\pi$ では常に　　$y\geqq 0$

また，$y=2\sin t(1-\cos t)$ であるから，$y=0$ とすると　　$\sin t=0$ または $\cos t=1$

$0\leqq t\leqq\pi$ から　　$t=0,\ \pi$

更に　　$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t+2\sin 2t$

$=2\sin t(2\cos t-1)$

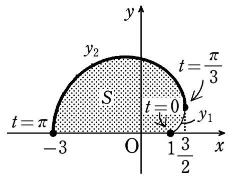
$0<t<\pi$ で $\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると，$\cos t=\dfrac{1}{2}$ から

$t=\dfrac{\pi}{3}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3

よって，x の値の増減は右上の表のようになる。

ゆえに，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{3}$ における y を y_1，$\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq\pi$ における y を y_2 とすると



$$S=\int_{-3}^{\frac{3}{2}}y_2\,dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_1\,dx=\int_\pi^{\frac{\pi}{3}}y\frac{dx}{dt}dt-\int_0^{\frac{\pi}{3}}y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_\pi^0 y\frac{dx}{dt}dt=\int_\pi^0(2\sin t-\sin 2t)(-2\sin t+2\sin 2t)dt$$

$$=2\int_0^\pi(2\sin^2 t-3\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)dt$$

$$=2\int_0^\pi\left(2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}-3\sin t\cdot 2\sin t\cos t+\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$=2\int_0^\pi\left(\frac{3}{2}-\cos 2t-\frac{1}{2}\cos 4t-6\sin^2 t\cos t\right)dt$$

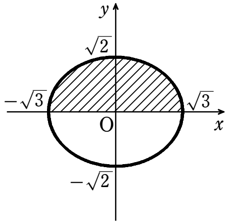
$$=2\left[\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{8}\sin 4t-2\sin^3 t\right]_0^\pi=3\pi$$

1

解答　(1) $\sqrt{6}\pi$　　(2) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

解説

(1) $2x^2+3y^2=6$ より　$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$



この曲線は楕円で，x 軸に関して対称であるから，求める面積 S は，図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい。

$y\geqq0$ のとき，方程式を y について解くと

$$y=\sqrt{2-\frac{2}{3}x^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3-x^2}$$

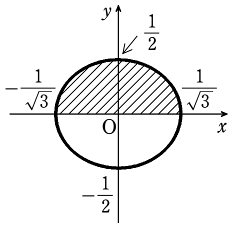
よって　$S=2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3-x^2}\,dx$

$$=2\sqrt{\frac{2}{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$$

ここで，$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$ は，半径 $\sqrt{3}$ の円の面積の半分で　$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\sqrt{3})^2=\frac{3}{2}\pi$

したがって　$S=2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}\pi=\sqrt{6}\pi$

(2) この曲線は楕円で，x 軸に関して対称であるから，求める面積 S は，図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい。



$y\geqq0$ のとき，方程式を y について解くと

$$y=\sqrt{\frac{1-3x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}$$

よって　$S=2\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\,dx$

$$=\sqrt{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\,dx$$

ここで，$\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\,dx$ は，半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の円の面積の半分で

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{6}$$

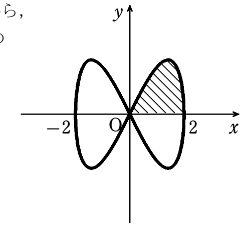
したがって　$S=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

2

解答　(1) $\frac{32}{3}$　　(2) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$

解説

(1) この曲線は，x 軸および y 軸に関して対称であるから，求める面積 S は，図の斜線部分の面積を 4 倍したものに等しい。



$x\geqq0$，$y\geqq0$ のとき　$y=x\sqrt{4-x^2}$

また，$x\geqq0$ での曲線と x 軸の共有点の x 座標は

$x=0,\ 2$

よって　$S=4\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

$4-x^2=t$ とおくと　$-2xdx=dt$

x と t の対応は次のようになる。

x	$0 \longrightarrow 2$
t	$4 \longrightarrow 0$

したがって　$S=4\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_4^0\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=2\int_0^4\sqrt{t}\,dt=2\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^4=\frac{32}{3}$

(2) 曲線の存在範囲は，$y^2=(x+3)x^2\geqq0$ から　$x\geqq-3$

このとき　$y=\pm x\sqrt{x+3}$　……①

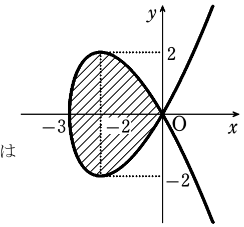
$f(x)=x\sqrt{x+3}$ とおくと

$$f'(x)=\sqrt{x+3}+\frac{x}{2\sqrt{x+3}}=\frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	-2	↗



$y=f(x)$ に $y=-f(x)$ をつけ加えて，曲線 ① の概形は右の図のようになる。

曲線で囲まれた部分は x 軸に関して対称である。

よって，求める面積 S は　$S=2\int_{-3}^0(-x\sqrt{x+3})dx$

$\sqrt{x+3}=t$ とおくと　$x=t^2-3$，$dx=2t\,dt$

x	$-3 \longrightarrow 0$
t	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$

$$S=2\int_0^{\sqrt{3}}(3-t^2)t\cdot2t\,dt=4\left[t^3-\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{24\sqrt{3}}{5}$$

3

解答　(1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

解説

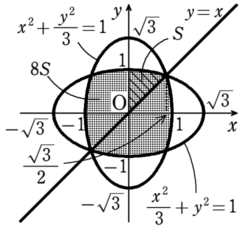
(1) $x^2+\frac{y^2}{3}=1$ から　$y^2=3-3x^2$ ……①

① を $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ に代入して　$x^2=\frac{3}{4}$

よって　$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　それぞれ，① に代入して 4 つの交点は

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) 図の斜線部分の面積を S とすると，求める面積は　$8S$



$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}xdx$$

ここで　$x=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\theta\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

よって　$S=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}+\frac{3}{8}-\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$

ゆえに　$8S=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}\pi=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

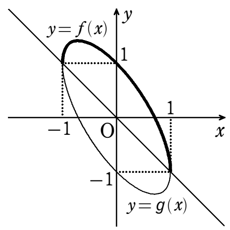
4

解答　π

解説

$2x^2+2xy+y^2=1$ から

$$y^2+2xy+2x^2-1=0$$



これを y について解くと

$$y=-x\pm\sqrt{1-x^2}$$

$1-x^2\geqq0$ から，曲線は $-1\leqq x\leqq1$ の範囲にある。

$f(x)=-x+\sqrt{1-x^2}$，$g(x)=-x-\sqrt{1-x^2}$ とすると，

定義域内で　$f(x)\geqq g(x)$

よって

$$S=\int_{-1}^1\{f(x)-g(x)\}dx=2\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は，半径 1 の円の面積の $\frac{1}{2}$ を表すから

$$S=2\cdot\pi\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}=\pi$$

参考　$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は $x=\sin\theta$ とおいて置換積分で求めることもできる。

5

解答　$\frac{8}{3}$

解説

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ ……① の範囲で $y=0$ となる t の値は　$t=0,\ \frac{\pi}{2}$

また，①の範囲においては，常に $y \geqq 0$ である。

$x=4\cos t$ から　$\frac{dx}{dt}=-4\sin t$，$dx=-4\sin t\,dt$

$y=\sin 2t$ から　$\frac{dy}{dt}=2\cos 2t$ であり，$\frac{dy}{dt}=0$

とすると　$t=\frac{\pi}{4}$

ゆえに，右のような表が得られる（↘は減少，↗は増加を表す）。

t	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	−	−	−	−
x	4	↘	$2\sqrt{2}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	−	−
y	0	↗	1	↘	0

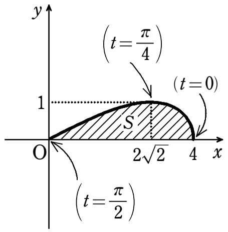
よって　$S=\int_0^4 y\,dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2t\cdot(-4\sin t)\,dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin t\,dt$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\,dt$$

$$=8\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}$$



6

解答　$\frac{3}{5}$

解説

θ を0から $\frac{\pi}{3}$ まで変化させると，

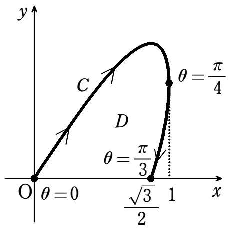
点$(\sin 2\theta,\ \sin 3\theta)$は$C$上を，原点から出発して

点$\left(1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$を通り，点$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$まで動く。

よって，求める面積は

$$S=\int_0^1 y\,dx\ \left(y\text{は}0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\text{の部分}\right)$$

$$-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 y\,dx\ \left(y\text{は}\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\text{の部分}\right)$$



$x=\sin 2\theta$ より $dx=2\cos 2\theta\,d\theta$ であるから

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3\theta\cdot 2\cos 2\theta\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 3\theta\cdot 2\cos 2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\sin 3\theta\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{\sin(3\theta+2\theta)+\sin(3\theta-2\theta)\}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 5\theta+\sin\theta)d\theta$$

$$=\left[-\frac{\cos 5\theta}{5}-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{10}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+1=\frac{3}{5}$$

1

解答　6π

解説

(1)　$\frac{(x-3)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$ から　$(y-2)^2=\frac{2^2}{3^2}\{9-(x-3)^2\}$

よって　$y=2\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-(x-3)^2}$

したがって　$S=\int_0^6(y_1-y_2)dx=\int_0^6\left[\left\{2+\frac{2}{3}\sqrt{9-(x-3)^2}\right\}-\left\{2-\frac{2}{3}\sqrt{9-(x-3)^2}\right\}\right]dx$

$$=\frac{4}{3}\int_0^6\sqrt{9-(x-3)^2}\,dx$$

ここで，$y=\sqrt{9-(x-3)^2}$ は，点$(3,\ 0)$を中心とする半径3の円の上側部分であるから　$S=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 3^2=6\pi$

別解　$x-3=3\sin t$ とおくと　$\frac{dx}{dt}=3\cos t$

x	$0\longrightarrow 6$
t	$-\frac{\pi}{2}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

よって　$S=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\cos t\cdot 3\cos t\,dt$$

$$=12\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=12\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=12\cdot\frac{\pi}{2}=6\pi$$

(2)　$S=\int_0^{2\pi}(2+2\sin\theta)\cdot 3\sin\theta\,d\theta=6\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\sin^2\theta)d\theta$

$$=6\int_0^{2\pi}\left(\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=6\left[-\cos\theta+\frac{1}{2}\theta-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$=6\{-1+\pi-(-1)\}=6\pi$$

2

解答　(1)　$\frac{8}{3}$　(2)　$\frac{24\sqrt{3}}{5}$　(3)　4π

解説

(1)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ から

$y=(2-\sqrt{x})^2\geqq 0$

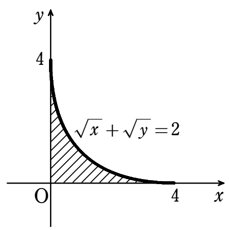
また，$\sqrt{y}=2-\sqrt{x}\geqq 0$ から

$0\leqq x\leqq 4$

曲線の概形は，右の図のようになるから

$$S=\int_0^4(2-\sqrt{x})^2dx=\int_0^4(4-4\sqrt{x}+x)dx$$

$$=\left[4x-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{8}{3}$$



(2)　曲線の式で$(x,\ y)$を$(x,\ -y)$におき換えても $y^2=(x+3)x^2$ は成り立つから，

この曲線はx軸に関して対称である。

$y^2=(x+3)x^2\geqq 0$ から　$x\geqq -3$

このとき　$y=\pm x\sqrt{x+3}$

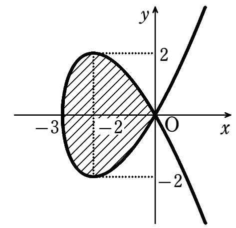
$f(x)=x\sqrt{x+3}$ とおくと　$f'(x)=\sqrt{x+3}+\frac{x}{2\sqrt{x+3}}=\frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	…	-2	…
$f'(x)$	／	−	0	+
$f(x)$	0	↘	-2	↗

$y=f(x)$ に $y=-f(x)$ をつけ加えて，曲線 $y^2=(x+3)x^2$ の概形は右の図のようになる。



よって，求める面積Sは　$S=2\int_{-3}^0(-x\sqrt{x+3})dx$

$\sqrt{x+3}=t$ とおくと　$x=t^2-3$，$dx=2t\,dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-3\longrightarrow 0$
t	$0\longrightarrow\sqrt{3}$

ゆえに　$S=2\int_0^{\sqrt{3}}(3-t^2)t\cdot 2t\,dt=4\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2-t^4)dt$

$$=4\left[t^3-\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{24\sqrt{3}}{5}$$

(3)　$2x^2-2xy+y^2=4$ から

$y^2-2xy+2x^2-4=0$

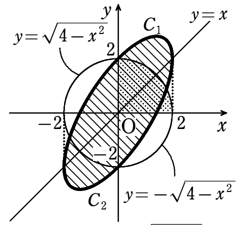
ゆえに　$y=x\pm\sqrt{4-x^2}$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

図から，面積は

$$S=\int_{-2}^2\{x+\sqrt{4-x^2}-(x-\sqrt{4-x^2})\}dx$$

$$=2\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=2\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=4\pi$$



C_1：$y=x+\sqrt{4-x^2}$

C_2：$y=x-\sqrt{4-x^2}$

3

解答　(1)　12π　(2)　$\pi-2$　(3)　$\frac{1}{6}$　(4)　$\frac{4}{5}$　(5)　$\frac{3}{8}\pi$

解説

(1)　与えられた曲線は楕円であり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，第1象限にある。

$x=4\cos\theta$ から　$dx=-4\sin\theta\,d\theta$

よって，求める面積は

$S=4\int_0^4 y\,dx$

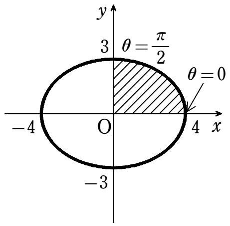
x	$0\longrightarrow 4$
θ	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}3\sin\theta\cdot(-4\sin\theta)d\theta$

$=48\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta$

$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\theta)d\theta$

$=24\left[\theta-\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=12\pi$



参考　曲線の概形は，図のようになる。

(2)　$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$y=0$ とすると　$\theta=-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}$

また，$y\geqq0$ である。

x と θ の対応は右のようになる。

x	$-1\longrightarrow1$
θ	$-\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$x=\tan\theta$ から　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

よって，求める面積は　$S=\int_{-1}^{1}y\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$

$=2\left[2\theta-\tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-2$

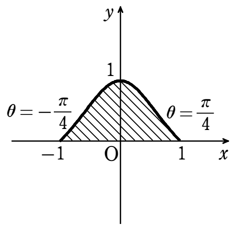
参考　$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1$ であるから

$y=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}$,

$y'=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$

$-1\leqq x\leqq1$ における増減表は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0



曲線の概形は，図のようになる。

(3)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ において，$y=0$ とすると　$\theta=0$

また，$y\geqq0$ である。

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow1$
θ	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow0$

$x=\cos^4\theta$ から　$dx=-4\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta$

したがって，求める面積は

$S=\int_0^1 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4\theta\cdot(-4\cos^3\theta\sin\theta)d\theta=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^5\theta\cos^3\theta\,d\theta$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\theta-\sin^7\theta)\cos\theta\,d\theta$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\theta-\sin^7\theta)(\sin\theta)'d\theta$

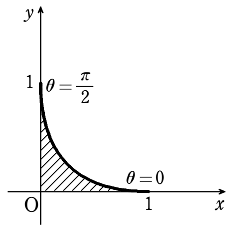
$=4\left[\frac{\sin^6\theta}{6}-\frac{\sin^8\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}$

参考　曲線の概形は，図のようになる。

また，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より，

$(\cos^4\theta)^{\frac{1}{2}}+(\sin^4\theta)^{\frac{1}{2}}=1$ であるから，

θ を消去すると　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$



(4)　$y=0$ とすると，$1-t^2=0$ から　$t=\pm1$

また，$-1\leqq t\leqq1$ で　$y\geqq0$

$t<-1$，$1<t$ で　$y<0$

よって，曲線と x 軸で囲まれるのは $-1\leqq t\leqq1$ の部分である。

x	$-1\longrightarrow1$
t	$-1\longrightarrow1$

$x=t^3$ から　$dx=3t^2dt$

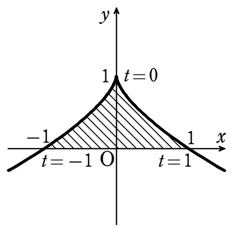
したがって　$S=\int_{-1}^{1}y\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(1-t^2)\cdot3t^2dt$

$=6\int_0^1(t^2-t^4)dt$

$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1$

$=\frac{4}{5}$

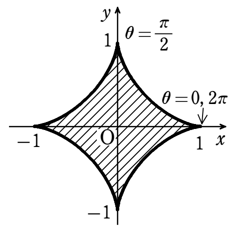


参考　曲線の概形は，図のようになる。

(5)　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

この曲線は x 軸と y 軸に関して対称で，概形は右の図のようになる。

よって，求める面積 S は第１象限の部分の面積の４倍である。



$x\geqq0$，$y\geqq0$ のとき　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

$x=\cos^3\theta$ から

$dx=3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)d\theta$

よって

x	$0\longrightarrow1$
θ	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow0$

$S=4\int_0^1 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3\theta\cdot(-3\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$

$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^2\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$

$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}\cdot\frac{1-\cos^22\theta}{4}d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}\cdot\frac{1-\cos4\theta}{8}d\theta$

$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\theta-\cos4\theta+\cos2\theta\cos4\theta)d\theta$

$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos2\theta-\cos4\theta+\frac{\cos6\theta+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$

$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\cos2\theta}{2}-\cos4\theta+\frac{\cos6\theta}{2}\right)d\theta$

$=\frac{3}{4}\left[\theta-\frac{\sin2\theta}{4}-\frac{\sin4\theta}{4}+\frac{\sin6\theta}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}\pi$

別解　［積分の計算］

$S=4\int_0^1 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3\theta\cdot(-3\cos^2\theta\sin\theta)d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)d\theta$

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$，$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ を用いると

$S=12(I_4-I_6)=12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi$

4

解答　(1)　$\frac{3}{2}\pi$　　(2)　$\frac{3}{8}\pi$

解説

(1)　$0\leqq t\leqq\pi$ ……①　の範囲で $y=0$ となる t の値は　$t=0$

また，① の範囲においては，常に $y\geqq0$ である。

$x=t-\sin t$ から　$dx=(1-\cos t)dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\pi$
t	$0\longrightarrow\pi$

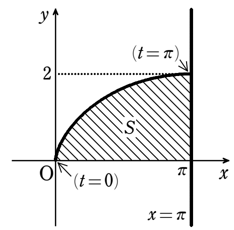
よって　$S=\int_0^{\pi}y\,dx=\int_0^{\pi}y\frac{dx}{dt}dt$

$=\int_0^{\pi}(1-\cos t)^2dt$

$=\int_0^{\pi}(1-2\cos t+\cos^2t)dt$

$=\int_0^{\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos2t}{2}\right)dt$

$=\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin2t\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi$



(2)　$\frac{dx}{dt}=-\sin t$，$\frac{dy}{dt}=6\sin^2t\cos t$

よって　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6\sin^2t\cos t}{-\sin t}=-3\sin2t$

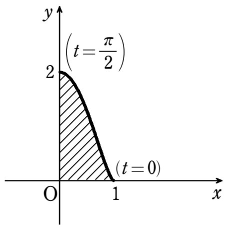
$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において　$\dfrac{dy}{dx} \leqq 0$

x	$0 \to 1$
t	$\dfrac{\pi}{2} \to 0$

$t=0$ のとき　$x=1,\ y=0$

$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$x=0,\ y=2$

よって，曲線 C の概形は右の図のようになる。



求める面積を S とおくと

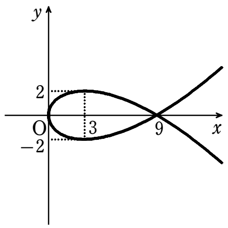
$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin^3 t(-\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^4 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{4}-\cos 2t+\frac{1}{4}\cos 4t\right)dt$$

$$=\left[\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{16}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}\pi$$

$\boxed{5}$

解答　［図］，$\dfrac{72\sqrt{3}}{5}$



解説

$x=3t^2,\ y=3t-t^3$ から　$\dfrac{dx}{dt}=6t,\ \dfrac{dy}{dt}=3-3t^2$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3-3t^2}{6t}=-\dfrac{(t+1)(t-1)}{2t}$

t と $-t$ のときでは y の符号だけが異なるから，曲線の $t \geqq 0$ の部分と $t \leqq 0$ の部分は x 軸に関して対称である。

そこで，$t \geqq 0$ の範囲で y の増減を調べると，右の表のようになる。

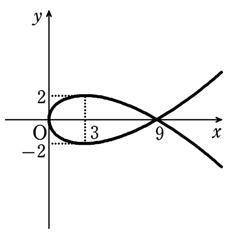
t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$\dfrac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$
y	0	↗	2	↘

また　$\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{t\to\infty} y=-\infty$

更に，$y=0$ のとき　$t=0,\ \pm\sqrt{3}$

このとき　$x=0,\ 9$

曲線は右の図のようになる。



求める面積を S とすると

$$S=2\int_0^9 y\,dx=2\int_0^{\sqrt{3}}(3t-t^3)\cdot 6t\,dt$$

$$=12\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2-t^4)dt=12\left[t^3-\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=36\sqrt{3}\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{72\sqrt{3}}{5}$$

$\boxed{6}$

解答　$\dfrac{3}{2}\pi+4$

解説

曲線の極方程式は $r=2(1+\cos\theta)$ であるから，求める面積は

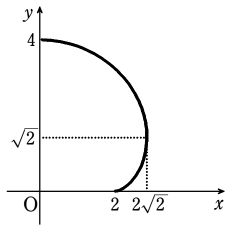
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+4\cos\theta+2\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+4\cos\theta+1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\left[3\theta+4\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}\pi+4$$

$\boxed{7}$

解答　(1)［図］　(2)　3π



解説

(1)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{dx}{dt}=-3\sin t+3\sin 3t=-3\sin t+3(3\sin t-4\sin^3 t)$$

$$=6\sin t(1-2\sin^2 t)$$

$$\frac{dy}{dt}=3\cos t-3\cos 3t=3\cos t-3(4\cos^3 t-3\cos t)$$

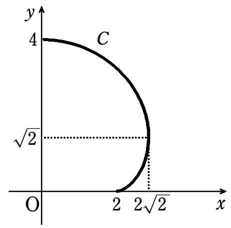
$$=12\cos t(1-\cos^2 t)=12\cos t\sin^2 t \geqq 0$$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{dx}{dt}=0$ となる t の値は　$t=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに，増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	2	→	$2\sqrt{2}$	←	0
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
y	0	↑	$\sqrt{2}$	↑	4

したがって，増減表から曲線 C の概形は右の図のようになる。



(2)　求める部分の面積を S とすると

$$S=\int_0^4 x\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos t-\cos 3t)(3\cos t-3\cos 3t)dt$$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos 3t\,dt$$

$$+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 3t\,dt$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos 3t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\cos 4t+\cos 2t)dt=\left[\frac{1}{8}\sin 4t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 3t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 6t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{12}\sin 6t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

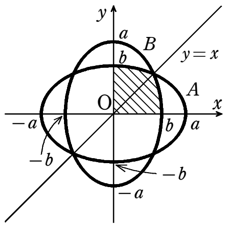
よって　$S=9\cdot\dfrac{\pi}{4}-12\cdot 0+3\cdot\dfrac{\pi}{4}=3\pi$

$\boxed{1}$

解答　$S=ab\theta$

解説

2つの楕円 A，Bは直線 $y=x$ に関して対称であるから，楕円 A と直線 $y=x$ の交点の座標と一致する。



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ……①，　$y=x$ ……②　とする。

②を①に代入して整理すると　$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

よって，第1象限にある交点の x 座標は

$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

楕円 A の $y\geqq0$ の部分は　$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

ゆえに　$\frac{S}{2}=\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$=\frac{b}{a}\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$$

ここで，$x=a\sin t$ とおくと　$dx=a\cos t\,dt$

x	$0\to\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
t	$0\to\theta$

よって　$\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\theta}a\cos t\cdot a\cos t\,dt$

$$=a^2\int_0^{\theta}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=a^2\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\theta}=\frac{1}{2}a^2\theta+\frac{1}{2}a^2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\theta+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}a^2\theta+\frac{a^3b}{2(a^2+b^2)}$$

ゆえに　$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}ab\theta+\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}-\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$　　したがって　$S=ab\theta$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$y=x+2-\frac{\pi}{2}$　　(2)　$\frac{-\pi^2+2\pi+4}{8}$

解説

(1)　$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$　　よって，$\cos\theta\neq1$ のとき　$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

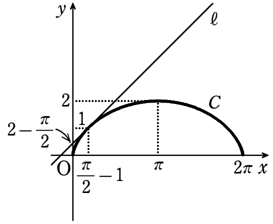
ここで，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき，$x=\frac{\pi}{2}-1$，$y=1$ となる。

このとき　$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1$

よって，接線の傾きは1であるから，接線 ℓ の方程式は

$$y-1=x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\quad\text{すなわち}\quad y=x+2-\frac{\pi}{2}$$

(2)　C と ℓ のグラフは右図のようになる。



よって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\pi}{2}+1\right)\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}-1}y\,dx$$

$$=\frac{(\pi-2)(6-\pi)}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{2}-1}y\,dx$$

$x=\theta-\sin\theta$，$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$ で，x と θ の対応は右のようになるから

x	$0\to\frac{\pi}{2}-1$
θ	$0\to\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-1}y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\frac{dx}{d\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)d\theta$$

ゆえに　$S=\frac{-\pi^2+8\pi-12}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-2\cos\theta+1)d\theta$

$$=\frac{-\pi^2+8\pi-12}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta-2\cos\theta+\frac{3}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{-\pi^2+8\pi-12}{8}-\left[\frac{1}{4}\sin 2\theta-2\sin\theta+\frac{3}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{-\pi^2+8\pi-12}{8}-\left(-2+\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{-\pi^2+2\pi+4}{8}$$

$\boxed{3}$

解答　$\frac{1}{4}$

解説

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}+t^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{3}{4}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\cdot(-1)=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(1-4t)$$

$0<t<1$ において $\frac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=\frac{1}{4}$

$x=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}$ の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{1}{4}$	…	1
$\frac{dx}{dt}$		+	0	−	
x	0	↗	極大	↘	0

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}+t^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\cdot(-1)$$

$$=\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}(3-4t)$$

$0<t<1$ において $\frac{dy}{dt}=0$ とすると　$t=\frac{3}{4}$

$y=t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}$ の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{3}{4}$	…	1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	−	
y	0	↗	極大	↘	0

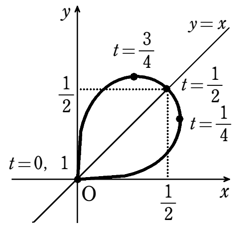
また，$y=x$ とすると　$t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}$

$0<t<1$ のとき，

$t^{\frac{1}{4}}>0$，$(1-t)^{\frac{1}{4}}>0$ であるから　$t^{\frac{1}{2}}=(1-t)^{\frac{1}{2}}$

ゆえに　$t=\frac{1}{2}$

よって，曲線の概形は右の図のようになる。



求める面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x\,dy-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}y\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{dy}{dt}dt+\int_1^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{dx}{dt}dt-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}(3-4t)dt+\frac{1}{4}\int_1^{\frac{1}{2}}(1-4t)dt-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\Big[3t-2t^2\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\Big[t-2t^2\Big]_1^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

第３講　例題

1

解答　$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^3

解説

この容器の，底から x cm の高さにおける断面積は

$$\frac{1}{2}x^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\ (\mathrm{cm}^2)$$

求める体積 V は　$V=\displaystyle\int_0^3\frac{\sqrt{3}}{4}x^2dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ (cm^3)

2

解答　$\dfrac{\pi}{2}$

解説

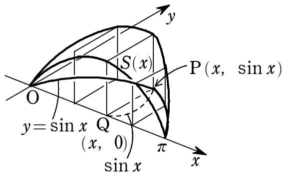
P$(x,\ \sin x)$ とすると

$\mathrm{PQ}=\sin x$

正方形の面積を $S(x)$ とすると

$S(x)=\mathrm{PQ}^2$

$=\sin^2 x$



よって，求める体積 V は

$$V=\int_0^\pi S(x)\,dx=\int_0^\pi\sin^2x\,dx$$

$$=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

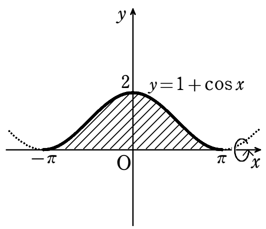
3

解答　(1)　$3\pi^2$　　(2)　24π

解説

(1)　$1+\cos x=0$ とすると，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ では

$x=\pm\pi$



$$V=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)^2dx=2\pi\int_0^\pi(1+\cos x)^2dx$$

$$=2\pi\int_0^\pi(1+2\cos x+\cos^2x)dx$$

$$=2\pi\int_0^\pi\left(1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^\pi\left(\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{3}{2}x+2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi=2\pi\cdot\frac{3}{2}\pi=3\pi^2$$

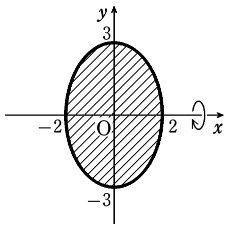
(2)　$y=0$ のとき　$x=\pm 2$

また　$y^2=\dfrac{36-9x^2}{4}=9-\dfrac{9}{4}x^2$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_{-2}^{2}y^2dx=\pi\int_{-2}^{2}\left(9-\frac{9}{4}x^2\right)dx$

$$=2\pi\int_0^2\left(9-\frac{9}{4}x^2\right)dx$$

$$=2\pi\left[9x-\frac{3}{4}x^3\right]_0^2$$



4

解答　$\dfrac{\pi(\pi+6)}{4}$

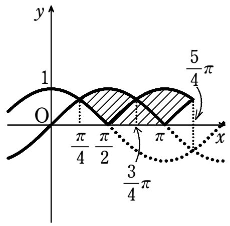
解説

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ の範囲で，$\sin x=\cos x$ を解くと　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ の範囲で，$\sin x=-\cos x$ を解くと　$x=\dfrac{3}{4}\pi$

題意の回転体は，右の図の斜線部分を x 軸の周りに1回転すると得られる。

また，斜線部分は直線 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ に関して対称であるから



$$V=2\left(\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^2x\,dx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx\right)$$

$$=2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\right)$$

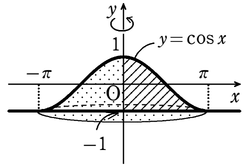
$$=\pi\left(\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}-\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi(\pi+6)}{4}$$

5

解答　$\pi^3-4\pi$

解説

右図から，体積は　$V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2dy$



$y=\cos x$ から　$dy=-\sin x\,dx$

y と x の対応は次のようになる。

y	$-1\longrightarrow 1$
x	$\pi\longrightarrow 0$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_\pi^0(-x^2\sin x)dx=\pi\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$

$$=\pi\left\{\left[x^2(-\cos x)\right]_0^\pi+\int_0^\pi 2x\cos x\,dx\right\}$$

$$=\pi\left(\pi^2+\left[2x\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi 2\sin x\,dx\right)$$

$$=\pi\left(\pi^2+\left[2\cos x\right]_0^\pi\right)=\pi^3-4\pi$$

6

解答　証明略，$2\pi^2$

解説

求める体積は

$$V=2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx=2\pi\left(\left[-x\cos x\right]_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\,dx\right)=2\pi\left(\pi+\left[\sin x\right]_0^\pi\right)=2\pi^2$$

第３講　例題演習

1

解答　$\dfrac{96}{5}\pi$ cm^3

解説

底からの高さが x cm の平面で切った切り口の面積は　$\pi\sqrt[3]{x^2}$ cm^2

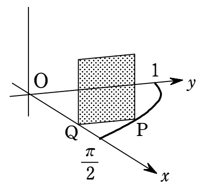
したがって　$V=\displaystyle\int_0^8\pi\sqrt[3]{x^2}\,dx=\pi\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^8=\frac{96}{5}\pi$ (cm^3)

2

解答　$\dfrac{\pi}{4}$

解説

PQ$=\cos x$ であるから，線分 PQ を1辺とする正方形 L の面積は　$\mathrm{PQ}^2=\cos^2x$



よって　$V=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

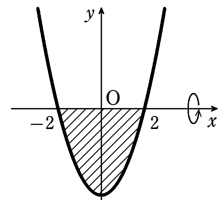
$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

3

解答　(1)　$\dfrac{512}{15}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{2}(e^4-1)$　　(3)　24π

解説

(1)　$x^2-4=0$ とすると　$x=-2,\ 2$



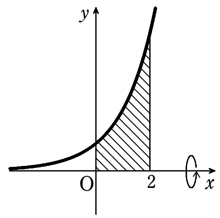
よって　$V=\pi\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^2-4)^2dx$

$$=\pi\int_{-2}^{2}(x^4-8x^2+16)dx$$

$$=2\pi\int_0^2(x^4-8x^2+16)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^2=\frac{512}{15}\pi$$

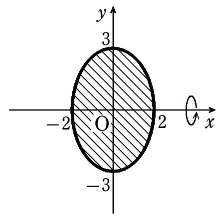
(2)　$V=\pi\displaystyle\int_0^2e^{2x}dx=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2=\frac{\pi}{2}(e^4-1)$



(3)　曲線は楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ である。

よって　$V=2\cdot\pi\displaystyle\int_0^2y^2dx=2\pi\int_0^2 9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx$

$$=18\pi\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_0^2=24\pi$$



4

解答　$\dfrac{(2\pi+3\sqrt{3})\pi}{8}$

解説

$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi$ の範囲で $\sin x=\sin 2x$ とすると

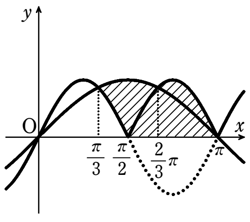
$$\sin x(1-2\cos x)=0$$

よって　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \pi$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ の範囲で $\sin x=-\sin 2x$ とすると

$$\sin x(1+2\cos x)=0$$

よって　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$



題意の回転体は，図の斜線部分を x 軸の周りに１回転すると得られる。

したがって　$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\sin^2x\,dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(-\sin 2x)^2dx-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 4x}{2}dx-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}+\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}-\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right\}=\frac{(2\pi+3\sqrt{3})\pi}{8}$$

5

解答　(1)　$\dfrac{3(4\sqrt[3]{2}-1)}{7}\pi$　　(2)　$\dfrac{e^2-1}{2}\pi$

解説

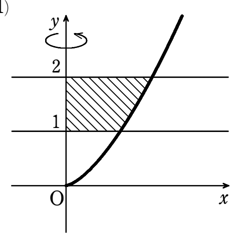
(1)　$y=x\sqrt{x}$ から　　$x=y^{\frac{2}{3}}$

$$V=\pi\int_1^2\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2dy=\pi\int_1^2 y^{\frac{4}{3}}dy=\pi\left[\frac{3}{7}y^{\frac{7}{3}}\right]_1^2=\frac{3(4\sqrt[3]{2}-1)}{7}\pi$$

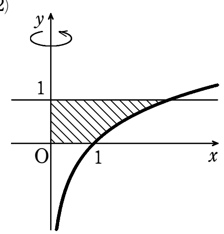
(2)　$y=\log x$ から　　$x=e^y$

$$V=\pi\int_0^1(e^y)^2dy=\pi\int_0^1 e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2}\pi$$

(1)



(2)



6

解答　2π

解説

求める体積は

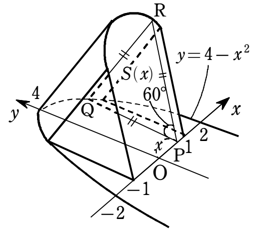
$$2\pi\int_0^1 xe^x dx=2\pi\left(\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)=2\pi\left(e-\left[e^x\right]_0^1\right)=2\pi\{e-(e-1)\}=2\pi$$

1

解答　$\dfrac{203\sqrt{3}}{30}$

解説

点 P$(x,\ 0)$ に対する正三角形 PQR の面積を $S(x)$ とすると



$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{PQ}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(4-x^2)^2$$

したがって，求める体積 V は

$$V=\int_{-1}^1 S(x)\,dx=2\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{4}(16-8x^2+x^4)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(16-\frac{8}{3}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{203\sqrt{3}}{30}$$

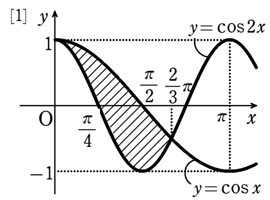
2

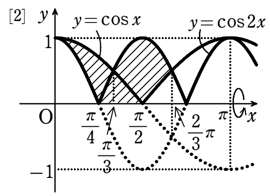
解答　$V=\dfrac{\pi(\pi+3\sqrt{3})}{8}$

解説

$0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の範囲で，曲線 $y=\cos x$ と曲線 $y=\cos 2x$ で囲まれた図形は，下の図[1]の斜線部分のようになる。

この２曲線の $y\leqq 0$ の部分を x 軸に関して折り返すと，下の図[2]のようになる。





求める体積 V は，図[2]の斜線部分を x 軸の周りに１回転してできる立体の体積であるから

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}(-\cos 2x)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,dx-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}(-\cos x)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2x)dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}(1+\cos 4x)dx$$

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4x)dx-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$-\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi(\pi+3\sqrt{3})}{8}$$

3

解答　(1)　$\pi\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$　(2)　$\frac{\pi^2}{12}$　(3)　$(1-\log 2)\pi$　(4)　$(e-2)\pi$　(5)　24π

(6)　$\frac{3}{10}\pi$

解説

(1)　2 曲線の交点の x 座標は $2\sin 2x=\tan x$ を解いて

$$4\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

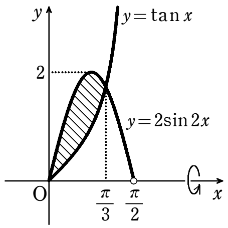
よって　$\sin x(4\cos^2 x-1)=0$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\sin x=0,\ \cos x=\frac{1}{2}$

これを解いて　$x=0,\ \frac{\pi}{3}$

ゆえに，2 曲線の位置関係は右図のようになり，

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき　$2\sin 2x\geqq\tan x$



よって　$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{(2\sin 2x)^2-\tan^2 x\}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\sin^2 2x-\tan^2 x)dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{2(1-\cos 4x)-\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\right\}dx$$

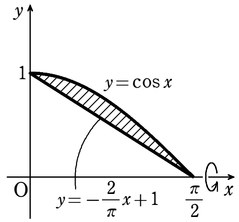
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(3-2\cos 4x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\pi\left[3x-\frac{1}{2}\sin 4x-\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\pi\left(\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)=\pi\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

(2)　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において

$$\cos x\geqq-\frac{2}{\pi}x+1\geqq 0$$

よって



$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\cos^2 x-\left(-\frac{2}{\pi}x+1\right)^2\right\}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi}x-1\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{4}{3\pi^2}x^3+\frac{2}{\pi}x^2-\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{12}$$

別解　曲線 $y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とし，底面の半径が 1，高さが $\frac{\pi}{2}$ の直円錐の体積を V_2 とすると

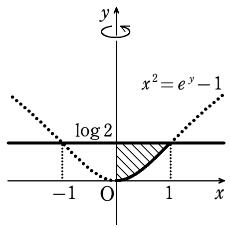
$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx-\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx-\frac{\pi^2}{6}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}$$

(3)　$y=\log(x^2+1)$ から　$x^2+1=e^y$

すなわち　$x^2=e^y-1$

$0\leqq x\leqq 1$ では $0\leqq y\leqq\log 2$ である。



よって　$V=\pi\int_0^{\log 2}x^2 dy$

$$=\pi\int_0^{\log 2}(e^y-1)dy$$

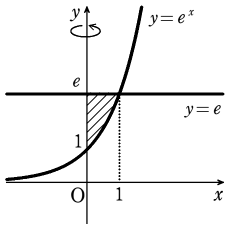
$$=\pi\left[e^y-y\right]_0^{\log 2}=\pi(2-\log 2-1)$$

$$=(1-\log 2)\pi$$

(4)　$y=e^x$ から　$x=\log y$

y 軸との交点の y 座標は $x=0$ とすると

$0=\log y$ から　$y=1$



よって　$V=\pi\int_1^e(\log y)^2 dy$

$$=\pi\left\{\left[y(\log y)^2\right]_1^e-\int_1^e y\cdot\left(2\log y\cdot\frac{1}{y}\right)dy\right\}$$

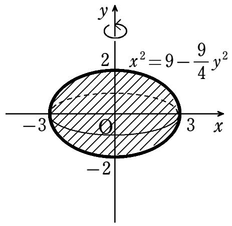
$$=\pi\left(e-2\int_1^e\log y\,dy\right)$$

$$=\pi\left(e-2\left[y\log y-y\right]_1^e\right)$$

$$=(e-2)\pi$$

(5)　$x=0$ とすると　$y=\pm 2$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ から　$x^2=9-\frac{9}{4}y^2$



よって　$V=\pi\int_{-2}^2 x^2 dy=2\pi\int_0^2\left(9-\frac{9}{4}y^2\right)dy$

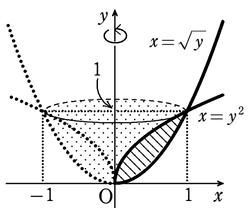
$$=2\pi\left[9y-\frac{3}{4}y^3\right]_0^2=24\pi$$

(6)　$y=\sqrt{x}$ から　$x=y^2$

$y=x^2$ に代入して　$y=y^4$

よって　$y(y^3-1)=0$

ゆえに　$y=0,\ 1$



よって　$V=\pi\int_0^1 y\,dy-\pi\int_0^1 y^4 dy$

$$=\pi\int_0^1(y-y^4)dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}\pi$$

4

解答　(1)　$\frac{48\sqrt{3}}{5}\pi$　(2)　$\frac{22+12\sqrt{3}}{3}\pi$

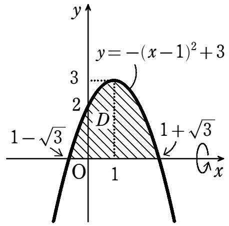
解説

(1)　$y=-x^2+2x+2$ から　$y=-(x-1)^2+3$

$-(x-1)^2+3=0$ とすると　$x=1\pm\sqrt{3}$

よって，D は右の図の斜線部分であり，これは直線 $x=1$ に関して対称である。

ゆえに，求める体積を V_1 とすると



$$V_1=2\pi\int_1^{1+\sqrt{3}}\{-(x-1)^2+3\}^2 dx$$

$$=2\pi\int_1^{1+\sqrt{3}}\{(x-1)^4-6(x-1)^2+9\}dx$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{5}(x-1)^5-2(x-1)^3+9(x-1)\right]_1^{1+\sqrt{3}}$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{5}\cdot 9\sqrt{3}-2\cdot 3\sqrt{3}+9\cdot\sqrt{3}\right)$$

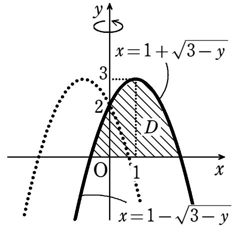
$$=\frac{48\sqrt{3}}{5}\pi$$

(2)　$y=-(x-1)^2+3$ から　$(x-1)^2=3-y$

$x\geqq 1$ のとき　$x=1+\sqrt{3-y}$

$x\leqq 1$ のとき　$x=1-\sqrt{3-y}$

よって，求める体積を V_2 とすると



$$V_2=\pi\int_0^3(1+\sqrt{3-y})^2 dy-\pi\int_2^3(1-\sqrt{3-y})^2 dy$$

$$=\pi\int_0^3(4-y+2\sqrt{3-y})dy$$

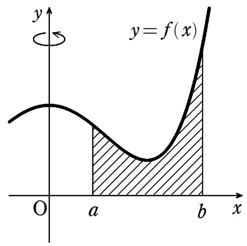
$$-\pi\int_2^3(4-y-2\sqrt{3-y})dy$$

$$=\pi\left[4y-\frac{y^2}{2}-\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3-\pi\left[4y-\frac{y^2}{2}+\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3$$

$$=\pi\left(\frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{3}+4\cdot 2-\frac{2^2}{2}+\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{22+12\sqrt{3}}{3}\pi$$

参考　一般に，$a\leqq x\leqq b$ において $f(x)\geqq 0$ であるとき，曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_0 は



$$V_0=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

で与えられる。

これを利用すると，求める体積 V_2 は

$$V_2=2\pi\int_0^{1+\sqrt{3}}x(-x^2+2x+2)dx$$

$$=2\pi\int_0^{1+\sqrt{3}}(-x^3+2x^2+2x)dx$$

$$=2\pi\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^{1+\sqrt{3}}$$
$$=2\pi\left\{-\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})^4+\frac{2}{3}(1+\sqrt{3})^3+(1+\sqrt{3})^2\right\}$$
$$=\frac{22+12\sqrt{3}}{3}\pi$$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\frac{8}{5}\pi$　　(2)　$\pi(4-e)$　　(3)　$\pi\left\{\frac{1}{27}\pi^2+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\pi-1\right\}$

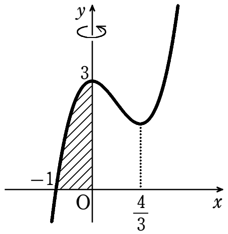
解説

(1)　$y=x^3-2x^2+3=(x+1)(x^2-3x+3)$

$$x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$y'=3x^2-4x=x(3x-4)$

よって，題意の部分は右図の斜線部分になる。



ゆえに　$V=\pi\int_0^3 x^2dy$

ここで，$y'=3x^2-4x$ から　$dy=(3x^2-4x)dx$

y と x の対応は右のようになるから

$$V=\pi\int_0^3 x^2dy=\pi\int_{-1}^0 x^2(3x^2-4x)dx$$
$$=\pi\int_{-1}^0(3x^4-4x^3)dx=\pi\left[\frac{3}{5}x^5-x^4\right]_{-1}^0=\frac{8}{5}\pi$$

y	$0\longrightarrow 3$
x	$-1\longrightarrow 0$

別解　(バウムクーヘン分割による計算)

$-1\leqq x\leqq 0$ のとき $x\leqq 0$，$f(x)\geqq 0$ であるから

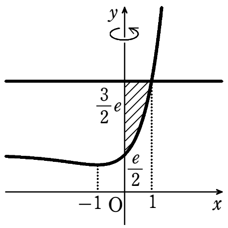
$$V=2\pi\int_{-1}^0(-x)ydx=-2\pi\int_{-1}^0 x(x^3-2x^2+3)dx$$
$$=-2\pi\int_{-1}^0(x^4-2x^3+3x)dx=-2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0=\frac{8}{5}\pi$$

(2)　$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{e}{2}$，

$f(1)=\frac{3}{2}e$，$f(0)=\frac{e}{2}$

よって，題意の部分は右図の斜線部分になる。



$y=f(x)$ から　$dy=f'(x)dx$

ゆえに　$V=\pi\int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3}{2}e}x^2dy=\pi\int_0^1 x^2f'(x)dx$

$$=\pi\Big[x^2f(x)\Big]_0^1-2\pi\int_0^1 xf(x)dx$$
$$=\frac{3}{2}\pi e-2\pi\int_0^1\left(x^2e^x+\frac{e}{2}x\right)dx$$
$$=\frac{3}{2}\pi e-2\pi\int_0^1 x^2e^xdx-\pi e\int_0^1 xdx$$

y	$\frac{e}{2}\longrightarrow\frac{3}{2}e$
x	$0\longrightarrow 1$

ここで　$\int_0^1 x^2e^xdx=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-2\int_0^1 xe^xdx=e-2\left(\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^xdx\right)$

$$=e-2\left(e-\Big[e^x\Big]_0^1\right)=e-2\{e-(e-1)\}=e-2$$

$$\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

したがって　$V=\frac{3}{2}\pi e-2\pi(e-2)-\frac{1}{2}\pi e=\pi(4-e)$

別解　(バウムクーヘン分割による計算)

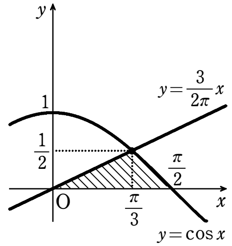
$0\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)>0$，$f(1)=\frac{3}{2}e$ であるから

$$V=\pi\cdot1^2\cdot\frac{3}{2}e-2\pi\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}\pi e-2\pi\int_0^1 x\left(xe^x+\frac{e}{2}\right)dx$$
$$=\frac{3}{2}\pi e-2\pi\int_0^1 x^2e^xdx-\pi e\int_0^1 xdx$$　以下，解答と同様。

(3)　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ における曲線 $y=\cos x$ と直線 $y=\frac{3}{2\pi}x$ の交点の x 座標は，

$\cos x=\frac{3}{2\pi}x$ から　$x=\frac{\pi}{3}$

このとき，$y=\frac{1}{2}$　　よって交点は　$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2}\right)$



したがって

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dy-\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}x^2(-\sin x)dx-\frac{\pi^3}{54}$$
$$=\pi\left\{\Big[x^2\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}2x\cos x\,dx\right\}-\frac{\pi^3}{54}$$
$$=\pi\left\{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-\Big[2x\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}2\sin x\,dx\right\}-\frac{\pi^3}{54}$$
$$=\pi\left\{\frac{\pi^2}{18}-2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi+\Big[2(-\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\right\}-\frac{\pi^3}{54}$$
$$=\pi\left\{\frac{\pi^2}{18}-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\pi-1\right\}-\frac{\pi^3}{54}=\pi\left\{\frac{1}{27}\pi^2+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\pi-1\right\}$$

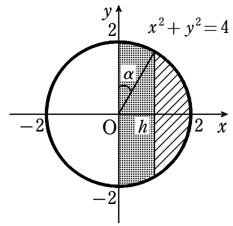
$\boxed{1}$

解答　$h=1$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$

解説

図のように，座標軸をとる。

流れ出た水の量は，右の図の網目の部分を x 軸の周りに１回転させてできる回転体の体積に等しい。



その体積が全体の水の量の $\frac{11}{16}$ に等しいから

$$\pi\int_0^h(\sqrt{4-x^2})^2dx=\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot2^3$$

すなわち　$\int_0^h(4-x^2)dx=\frac{11}{3}$

ここで　$\int_0^h(4-x^2)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^h=4h-\frac{h^3}{3}$　　したがって　$4h-\frac{h^3}{3}=\frac{11}{3}$

整理して　$h^3-12h+11=0$　　ゆえに　$(h-1)(h^2+h-11)=0$

よって　$h=1,\ \frac{-1\pm3\sqrt{5}}{2}$　　$0<h<2$ であるから　$h=1$

このとき　$\alpha=\frac{\pi}{6}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　順に $a=\frac{1}{2e}$，$y=\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}$　　(2)　$\left(2-\frac{29}{24}\sqrt{e}\right)\pi$　　(3)　$\frac{e}{24}\pi$

解説

(1)　$y=\log x$ から　$y'=\frac{1}{x}$，　$y=ax^2$ から　$y'=2ax$

共有点 T の x 座標を t $(t>0)$ とすると，共有点 T で共通の接線をもつための条件は

$\log t=at^2$ ……①，$\frac{1}{t}=2at$ ……②

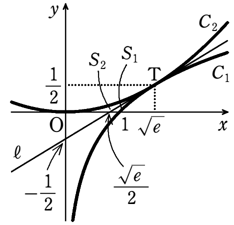
② から　$2at^2=1$　　このとき，① は　$\log t=\frac{1}{2}$

よって　$t=\sqrt{e}$　　ゆえに　$a=\frac{1}{2t^2}=\frac{1}{2e}$

点 T の座標は $\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2}\right)$，点 T における接線の傾きは $\frac{1}{\sqrt{e}}$ であるから，接線 ℓ の方程式は　$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})$　すなわち　$y=\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}$

(2)　ℓ と x 軸との交点の x 座標は，$\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}=0$ から

$$x=\frac{\sqrt{e}}{2}$$



ℓ の $\frac{\sqrt{e}}{2}\leqq x\leqq\sqrt{e}$ の部分と x 軸，直線 $x=\sqrt{e}$ で囲まれた図形を x 軸の周りに１回転させてできる立体は，底面が半径 $\frac{1}{2}$ の円，高さが $\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{2}=\frac{\sqrt{e}}{2}$ の直円錐であるから，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{e}}{2}-\pi\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^2dx$$

$$=\frac{1}{24}\pi\sqrt{e}-\pi\left\{\left[x(\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}x\cdot(2\log x)\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{24}\pi\sqrt{e}-\frac{1}{4}\pi\sqrt{e}+2\pi\Big[x\log x-x\Big]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=-\frac{5}{24}\pi\sqrt{e}+2\pi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{e}+1\right)=\left(2-\frac{29}{24}\sqrt{e}\right)\pi$$

(3)　$\ell : x=\sqrt{e}\left(y+\frac{1}{2}\right)$，$C_2 : x=\sqrt{\frac{y}{a}}=\sqrt{2ey}$ であるから，求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{e}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right\}^2dy-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2ey})^2dy=\pi e\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-2y\right\}dy$$

$$=\pi e\left[\frac{1}{3}\left(y+\frac{1}{2}\right)^3-y^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\pi e\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{24}\right)=\frac{e}{24}\pi$$

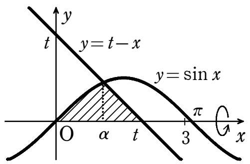
3

解答　$t=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

解説

$0<t<3<\pi$ であるから，与えられた連立不等式の表す領域は，右図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



曲線 $y=\sin x$ と直線 $y=t-x$ の共有点の x 座標を α とすると　　$\sin\alpha=t-\alpha$　かつ　$0<\alpha<t$　…… ①

このとき　　$V(t)=\pi\int_0^{\alpha}\sin^2x\,dx+\frac{1}{3}\pi\cdot\sin^2\alpha\cdot(t-\alpha)$

① から　　$V(t)=\pi\int_0^{\alpha}\sin^2x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\alpha$

両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}V(t)=\frac{d}{d\alpha}\left(\pi\int_0^{\alpha}\sin^2x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\alpha\right)\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

$$=\left(\pi\sin^2\alpha+\frac{1}{3}\pi\cdot3\sin^2\alpha\cos\alpha\right)\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

$$=\pi\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)\cdot\frac{d\alpha}{dt}\quad\cdots\cdots ②$$

ここで，① より　　$t=\alpha+\sin\alpha$　……③　　　よって　　$\frac{dt}{d\alpha}=1+\cos\alpha$

$0<\alpha<\pi$ より，$1+\cos\alpha\neq0$ であるから　　$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{d\alpha}}=\frac{1}{1+\cos\alpha}$

これを ② に代入して　　$\frac{d}{dt}V(t)=\pi\sin^2\alpha$

ゆえに，$\frac{d}{dt}V(t)=\frac{\pi}{4}$ とすると　　$\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$　　　よって　　$\sin\alpha=\pm\frac{1}{2}$

$0<\alpha<\pi$ から　　$\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$

$\alpha=\frac{\pi}{6}$ のとき，③ から　　$t=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$　　これは $0<t<3$ を満たすから，適する。

$\alpha=\frac{5}{6}\pi$ のとき，③ から　　$t=\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}$　　これは $0<t<3$ を満たさないから，不適。

したがって　　$t=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

4

解答　$\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2$

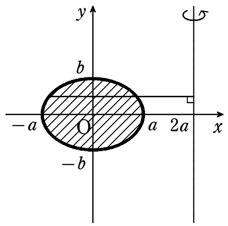
解説

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を x について解くと

$$x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

ここで，$x_1=-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$，$x_2=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$

とおく。



囲まれた図形は，x 軸に関して対称であるから，

求める体積 V は

$$V=2\pi\int_0^b\{(2a-x_1)^2-(2a-x_2)^2\}dy$$

$$=8a\pi\int_0^b(x_2-x_1)dy=16a^2\pi\int_0^b\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

ここで，$y=b\sin\theta$ とおくと　　$dy=b\cos\theta\,d\theta$

よって

y	$0\longrightarrow b$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$V=16a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot b\cos\theta\,d\theta=16a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=8a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta=8a^2b\pi\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4a^2b\pi^2$$

また，$a^2+b^2=1$ から　　$a^2=1-b^2$　……①

$a>0$ であるから　　$1-b^2>0$　　　　これと $b>0$ であるから　　$0<b<1$

V の式に ① を代入すると　　$V=4(1-b^2)b\pi^2=4\pi^2(-b^3+b)$

ゆえに　　$V'=4\pi^2(-3b^2+1)$

$V'=0$ とすると　　$-3b^2+1=0$

$0<b<1$ であるから　　$b=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0<b<1$ における V の増減表は右のようになり，

b	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	1
V'		+	0	−	
V		↗	極大	↘	

$b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，V は極大かつ最大となる。

$b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，① と $a>0$ から　　$a=\sqrt{\frac{2}{3}}$

したがって V の最大値は　　$4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\pi^2=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2$

1

解答　$\pi(4-\pi)$

解説

$y=0$ とすると　　$\cos2\theta=0$（$-\pi<2\theta<\pi$）

ゆえに　　$2\theta=\pm\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\pm\frac{\pi}{4}$

このとき　　$x=\pm1$（複号同順）

θ の値に対応した x，y の値の変化は表のようになり，曲線と x 軸で囲まれるのは $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のときである。

θ	$-\frac{\pi}{2}$	…	$-\frac{\pi}{4}$	…	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$
x		↗	−1	↗	0	↗	1	↗	
y		↗	0	↗	1	↘	0	↘	

$x=\tan\theta$ から　　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$-1\longrightarrow1$
θ	$-\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって，求める体積は

$$V=\pi\int_{-1}^1y^2dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^22\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

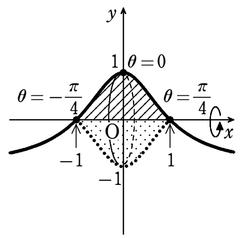
$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos^2\theta-4+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos2\theta-2+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=2\pi\Big[\sin2\theta-2\theta+\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\pi\left(1-\frac{\pi}{2}+1\right)=\pi(4-\pi)$$



2

解答　$\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$

解説

曲線 $y=x^2-x$ 上の点 P$(x,\ y)$ から直線 $y=x$ に垂線 PQ を下ろす。

OQ$=t$ とすると，点 Q の座標は

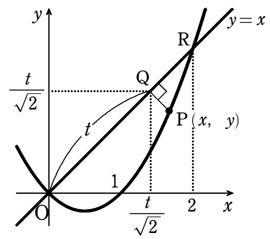
$$\mathrm{Q}\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

よって　　$y-\frac{t}{\sqrt{2}}=-\left(x-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ から

$$x+y=\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{t}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}t$$

したがって　　$t=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{x+(x^2-x)}{\sqrt{2}}=\frac{x^2}{\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots ①$$



また，$\mathrm{PQ}=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|x^2-2x|}{\sqrt{2}}$

直線 $y=x$ と曲線 $y=x^2-x$ との交点 R の座標は

$x=x^2-x$ から　$x=0,\ 2$　よって　R$(2,\ 2)$　ゆえに　$\mathrm{OR}=2\sqrt{2}$

① から　$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}x$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2dt=\pi\int_0^2\left(\frac{|x^2-2x|}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}x\,dx$

t	$0 \longrightarrow 2\sqrt{2}$
x	$0 \longrightarrow 2$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2(x^5-4x^4+4x^3)dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^6}{6}-\frac{4}{5}x^5+x^4\right]_0^2$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

3

解答　$6\sqrt{3}$

解説

$\dfrac{dx}{dt}=6t$，$\dfrac{dy}{dt}=3-3t^2$ であるから

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(6t)^2+(3-3t^2)^2=3^2\{4t^2+(1-t^2)^2\}=3^2(1+2t^2+t^4)=3^2(1+t^2)^2$$

$$L=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}}3(1+t^2)dt=3\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$$

4

解答　$2\log 3-1$

解説

$y'=\dfrac{-2x}{1-x^2}$ であるから　$1+y'^2=1+\left(\dfrac{-2x}{1-x^2}\right)^2=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2$

$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\geqq 0$ であるから

$$L=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-1\right)dx=2\Big[\log|1+x|-\log|1-x|-x\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x\right]_0^{\frac{1}{2}}=2\log 3-1$$

5

解答　$\dfrac{61}{27}$

解説

$$s=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{(4t)^2+(3t^2)^2}\,dt=\int_0^1 t\sqrt{9t^2+16}\,dt$$

$9t^2+16=u$ とおくと　$18t\,dt=du$

t	$0 \longrightarrow 1$
u	$16 \longrightarrow 25$

よって，求める道のりは

$$s=\frac{1}{18}\int_{16}^{25}\sqrt{u}\,du=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{16}^{25}=\frac{61}{27}$$

1

解答　$\dfrac{2}{21}\pi$

解説

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$y=0$ とすると　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$

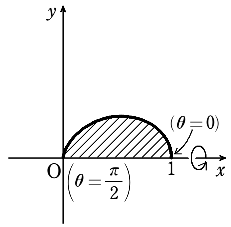
また，$y\geqq 0$ である。

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\dfrac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$x=\cos^3\theta$ から　$dx=-3\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$

したがって，求める体積は



$$V=\pi\int_0^1 y^2dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^4\theta\sin^2\theta(-3\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^3\theta\,d\theta$$

$$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{-(\cos^6\theta-\cos^8\theta)(\cos\theta)'\}d\theta=3\pi\left[-\frac{\cos^7\theta}{7}+\frac{\cos^9\theta}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{21}\pi$$

2

解答　$\dfrac{32}{15}\pi$

解説

$\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x=x$ とすると　$x^2-2\sqrt{2}x=0$

これを解いて　$x=0,\ 2\sqrt{2}$

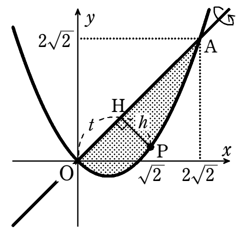
よって，放物線と直線の交点は

$(0,\ 0)$，$(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

原点を O，点$(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ を A とすると　$\mathrm{OA}=4$

$0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$ とし，放物線上の点 $\mathrm{P}\left(x,\ \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)$ から

直線 $y=x$ に垂線 PH を下ろし，$\mathrm{PH}=h$，$\mathrm{OH}=t$ とおく。



H を通り，直線 $y=x$ に垂直な平面による立体の切り口の面積を $S(t)$ とすると

$$V=\int_0^4 S(t)dt=\pi\int_0^4 h^2dt$$

ここで　$h=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{x-\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)\right\}=\dfrac{2\sqrt{2}x-x^2}{2}$

また　$t=\sqrt{2}x-h=\dfrac{1}{2}x^2$

したがって　$dt=x\,dx$

t	$0 \longrightarrow 4$
x	$0 \longrightarrow 2\sqrt{2}$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}x-x^2}{2}\right)^2x\,dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{2\sqrt{2}}(x^5-4\sqrt{2}x^4+8x^3)dx$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{x^6}{6}-\frac{4\sqrt{2}}{5}x^5+2x^4\right]_0^{2\sqrt{2}}=\frac{32}{15}\pi$$

3

解答　(1)　10　　(2)　$4\sqrt{3}$　　(3)　$2\sqrt{2}$　　(4)　$\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$

解説

(1)　$L=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{(-3)^2+4^2}\,dt=5\int_0^2 dt=10$

(2)　$L=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2\sqrt{3}\,t)^2+(3t^2-1)^2}\,dt$

$=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(3t^2+1)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2+1)dt=\left[t^3+t\right]_0^{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

(3)　$\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t$，$\frac{dy}{dt}=2+2\cos 2t$

ゆえに　$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(-2\sin 2t)^2+(2+2\cos 2t)^2=8(1+\cos 2t)=16\cos^2 t$

よって　$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos t\,dt=\left[4\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$

(4)　$\frac{dx}{d\theta}=e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta=e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)$

$\frac{dy}{d\theta}=e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta=e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)$

ゆえに　$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=2e^{2\theta}$

よって　$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{2e^{2\theta}}\,d\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}\left[e^{\theta}\right]_0^{2\pi}=\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$

4

解答　(1)　$\frac{59}{24}$　　(2)　$\frac{\pi}{3}$

解説

(1)　$y'=x^2-\frac{1}{4x^2}$ であるから　　$1+y'^2=1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2$

$x^2+\frac{1}{4x^2}\geqq 0$ であるから　　$L=\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\right]_1^2=\frac{59}{24}$

(2)　$y'=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ であるから　　$1+y'^2=1+\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{4}{4-x^2}$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\geqq 0$ であるから

$L=\int_0^1\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

この範囲において $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=2\sqrt{\cos^2\theta}=2\cos\theta$

よって　$L=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=2\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}$

5

解答　$\sqrt{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$

解説

$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t+e^{-t}(-\sin t)=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{-2t}(1+2\cos t\sin t)+e^{-2t}(1-2\cos t\sin t)=2e^{-2t}=(\sqrt{2}\,e^{-t})^2$

求める道のりは　　$\int_1^2\sqrt{2}\,e^{-t}dt=-\sqrt{2}\left[e^{-t}\right]_1^2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$

1

解答　(1)　$\frac{3}{8}\pi$　　(2)　$\frac{4}{5}\pi$

解説

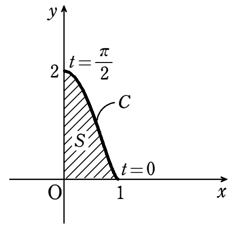
(1)　$\frac{dx}{dt}=-\sin t$，$\frac{dy}{dt}=6\sin^2 t\cos t$

$y=0$ とすると　　$\sin^3 t=0$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

したがって　　$t=0$　　　このとき　　$x=1$

x，y の増減は左下の表のようになり，曲線 C の概形は右下の図のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	
x	1	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	
y	0	$\nearrow$	2



ゆえに，求める面積を S とすると

x	$0\longrightarrow 1$
t	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$S=\int_0^1 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin^3 t(-\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^4 t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\cos 2t+\frac{1}{2}\cos^2 2t\right)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\cos 2t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{4}-\cos 2t+\frac{1}{4}\cos 4t\right)dt$

$=\left[\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{16}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}\pi$

(2)　求める体積を V とすると

y	$0\longrightarrow 2$
t	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$V=\pi\int_0^2 x^2dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot 6\sin^2 t\cos t\,dt$

$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\cdot\sin^2 t\cos t\,dt$

$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t-\sin^4 t)\cos t\,dt$

$\sin t=u$ とおくと　　$\cos t\,dt=du$

t	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
u	$0\longrightarrow 1$

よって　　$V=6\pi\int_0^1(u^2-u^4)du=6\pi\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{5}\pi$

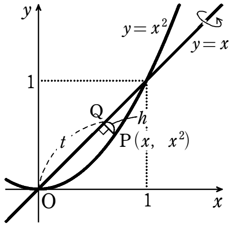
2

解答　(1)　$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{60}$　　(2)　$\frac{\sqrt{2}(\pi^2-9)\pi^2}{12}$

解説

(1)　与えられた放物線と直線で囲まれた部分は右の図のようになる。放物線上の点 $P(x,\ x^2)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ から直線 $y=x$ に垂線 PQ を引き，

$PQ=h,\ OQ=t\ (0\leqq t\leqq \sqrt{2})$　とする。



このとき　$h=\dfrac{|x-x^2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{x-x^2}{\sqrt{2}}$

$t=\sqrt{2}\,x-h=\sqrt{2}\,x-\dfrac{x-x^2}{\sqrt{2}}=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$dt=\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}dx$

t と x の対応は表のようになるから

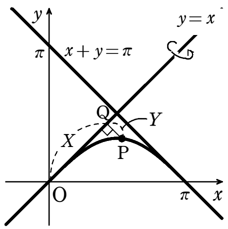
t	$0\longrightarrow\sqrt{2}$
x	$0\longrightarrow 1$

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}h^2dt=\pi\int_0^1\left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(2x^5-3x^4+x^2)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x^6}{3}-\frac{3}{5}x^5+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\pi}{30\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{60}$$

(2)　曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ 上の点 $P(x,\ \sin x)$ から直線 $y=x$ に垂線 PQ を引き，$OQ=X$ $\left(0\leqq X\leqq\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$，$PQ=Y$ とする。



このとき　$X=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}=\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{2}}$

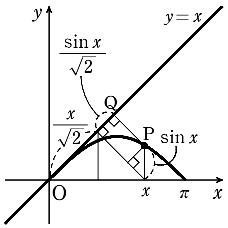
また，$P(x,\ \sin x)$ と直線 $x-y=0$ の距離は Y であるから　$Y=\dfrac{|x-\sin x|}{\sqrt{2}}$

求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}Y^2dX$$

$$dX=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos x)dx$$

X	$0\rightarrow\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$
x	$0\rightarrow\pi$



X と x の対応は右のようになる。
したがって

$$V=\pi\int_0^{\pi}\frac{(\sin x-x)^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi}(\sin^2 x\cos x-2x\sin x\cos x+x^2\cos x+\sin^2 x-2x\sin x+x^2)dx\quad\cdots①$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\cos x\,dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x(\sin x)'dx=\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\pi}=0,$$

$$\int_0^{\pi}2x\sin x\cos x\,dx=\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx=\int_0^{\pi}x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}x^2\cos x\,dx=\left[x^2\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin x\,dx=-\int_0^{\pi}2x\sin x\,dx,$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}2x\sin x\,dx=\left[-2x\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2\cos x\,dx=2\pi+2\left[\sin x\right]_0^{\pi}=2\pi,$$

$$\int_0^{\pi}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}$$

これらを ① に代入して

$$V=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+(-2\pi)+\frac{\pi}{2}-2\pi+\frac{\pi^3}{3}\right\}=\frac{(\pi^2-9)\pi^2}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\pi^2-9)\pi^2}{12}$$

3

解答　16

解説

$\dfrac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=2\sin t$

ゆえに　$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=2^2\{(1-\cos t)^2+\sin^2 t\}$

$$=4(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)$$

$$=8(1-\cos t)=16\sin^2\frac{t}{2}$$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，$0\leqq\dfrac{t}{2}\leqq\pi$ であるから　$\sin\dfrac{t}{2}\geqq 0$

よって，求める長さ L は

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt$$

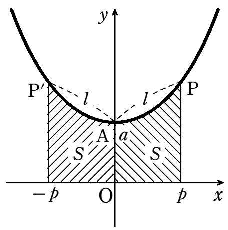
$$=4\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-8(-1-1)=16$$

4

解答　略

解説

$f(x)=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ とおく。



$f(-x)=f(x)$ であるから，曲線 $y=f(x)$ は y 軸に関して対称であり，区間 $[0,\ p]$，$[-p,\ 0]$ における図形は y 軸に関して対称である。

よって，$p>0$ のとき $S=al$ が成り立てば，$p<0$ のときも $S=al$ が成り立つ。

したがって，$p>0$ の場合を証明すればよい。

$p>0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

よって　$\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$

ゆえに　$al=a\displaystyle\int_0^p\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\int_0^p\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=S$

1

解答　(1)　$(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$　　(2)　24

解説

(1)　円 C の中心を O′，円 C と円 E の接点を Q とおくと，$\overset{\frown}{PQ}=4\theta$ であるから

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)+(\cos(\theta-4\theta),\ \sin(\theta-4\theta))$$

$$=(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$$

よって　$P(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$

(2)　$x=3\cos\theta+\cos 3\theta$，$y=3\sin\theta-\sin 3\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=-3(\sin\theta+\sin 3\theta),\quad\frac{dy}{d\theta}=3(\cos\theta-\cos 3\theta)$$

よって　$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=9\{(\sin\theta+\sin 3\theta)^2+(\cos\theta-\cos 3\theta)^2\}$

$$=9\{2(1+\sin 3\theta\sin\theta-\cos 3\theta\cos\theta)\}$$

$$=18(1-\cos 4\theta)=36\sin^2 2\theta$$

したがって，点 P の軌跡の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{36\sin^2 2\theta}\,d\theta=6\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|d\theta$$

$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=24\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=24$$

2

解答　(1)　$y=x$　　(2)　$\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}$

解説

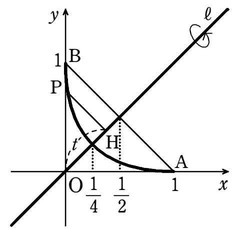
(1)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$　……①

① において，x と y を入れかえても方程式は変わらないから，C は直線 $y=x$ に関して対称である。

よって，ℓ の方程式は　$y=x$

(2)　① を y について解くと　$y=1-2\sqrt{x}+x$

ℓ より上側の C 上の点 $P(x,\ y)$ から ℓ に垂線 PH を下ろし，$PH=h$，$OH=t$ とおくと，ℓ の方程式は $x-y=0$ であるから



$$h=\frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x-(1-2\sqrt{x}+x)|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{|2\sqrt{x}-1|}{\sqrt{2}}$$

C と ℓ の交点の x 座標は　$\sqrt{x}+\sqrt{x}=1$ から

$$x=\frac{1}{4}$$

線分 AB と ℓ の交点は線分 AB の中点であるから，その x 座標は $\dfrac{1}{2}$

また，$t^2+h^2=OP^2$ であるから　$t^2=(x^2+y^2)-\dfrac{(x-y)^2}{2}=\dfrac{(x+y)^2}{2}$

$t>0$ であるから　$t=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}=\dfrac{2x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$　　すなわち　$dt=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}dx$

求める体積 V は

$$V=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} h^2dt=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{2}dt$$

t	$\frac{\sqrt{2}}{4}\longrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}$
x	$\frac{1}{4}\longrightarrow 0$

$$=\pi\int_{\frac{1}{4}}^{0}\frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{2}\cdot\frac{(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{2}\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-6+12\sqrt{x}-8x\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[2\sqrt{x}-6x+8x\sqrt{x}-4x^2\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$k'(x)=2\sqrt{1+x^2}$　　(2)　$L=\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\log\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$

解説

(1)　$$k'(x)=\sqrt{1+x^2}+\frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}+\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2}$$

$$=2\sqrt{1+x^2}$$

(2)　極方程式 $r=\theta$ で定義される曲線上の点を直交座標で表すと

$$x=r\cos\theta=\theta\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$$

よって　$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta-\theta\sin\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta$

したがって

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2$$

$$=\cos^2\theta-2\theta\cos\theta\sin\theta+\theta^2\sin^2\theta$$
$$+\sin^2\theta+2\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\cos^2\theta$$

$$=1+\theta^2$$

ゆえに　$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{1+\theta^2}$$

ここで，(1) より，$\sqrt{1+\theta^2}=\frac{1}{2}k'(\theta)$ であるから，求める曲線の長さ L は

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}k'(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\Big[k(\theta)\Big]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\log\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right\}$$

$$=\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\log\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{g(h_0-ax)}}$

(2)　$T_d=\frac{2}{a\sqrt{g}}(\sqrt{h_0}-\sqrt{d})$，$T=\frac{2}{a}\sqrt{\frac{h_0}{g}}$，位置の座標は $\frac{3h_0}{4a}$

解説

(1)　$\frac{dx}{dt}=\sqrt{gh(x)}$，$h(x)=h_0-ax$ から　　$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\sqrt{gh(x)}}=\frac{1}{\sqrt{g(h_0-ax)}}$$

(2)　$h=d$ となるのは，$h_0-ax=d$ から，$x=\frac{h_0-d}{a}$ のときである。

ゆえに，$t=T_d$ のとき $x=\frac{h_0-d}{a}$ である。

これと $t=0$ のとき $x=0$ であることから

$$T_d=\int_0^{T_d}dt=\int_0^{\frac{h_0-d}{a}}\frac{dt}{dx}dx=\int_0^{\frac{h_0-d}{a}}\frac{1}{\sqrt{g(h_0-ax)}}dx=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[-\frac{2}{a}\sqrt{h_0-ax}\right]_0^{\frac{h_0-d}{a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(-\frac{2}{a}\right)(\sqrt{d}-\sqrt{h_0})=\frac{2}{a\sqrt{g}}(\sqrt{h_0}-\sqrt{d})$$

よって　$$T=\lim_{d\to 0}T_d=\frac{2}{a\sqrt{g}}\cdot\sqrt{h_0}=\frac{2}{a}\sqrt{\frac{h_0}{g}}\quad\cdots\cdots ①$$

また，時刻 $\frac{T}{2}$ での津波の位置の座標を X とすると，

$$\frac{T}{2}=\int_0^{\frac{T}{2}}dt=\int_0^{X}\frac{dt}{dx}dx=\int_0^{X}\frac{1}{\sqrt{g(h_0-ax)}}dx=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[-\frac{2}{a}\sqrt{h_0-ax}\right]_0^{X}$$

$$=\frac{2}{a\sqrt{g}}(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_0-aX})$$

① より $\frac{T}{2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{h_0}{g}}$ であるから　　$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{h_0}{g}}=\frac{2}{a\sqrt{g}}(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_0-aX})$$

両辺に $\frac{a\sqrt{g}}{2}$ を掛けて　　$$\frac{\sqrt{h_0}}{2}=\sqrt{h_0}-\sqrt{h_0-aX}$$

よって　　$$\sqrt{h_0-aX}=\frac{\sqrt{h_0}}{2}$$

両辺を２乗して　　$h_0-aX=\frac{h_0}{4}$　　　よって　　$X=\frac{3h_0}{4a}$