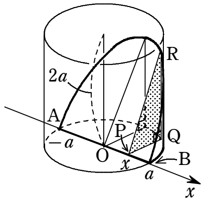
1

解答　$\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$

解説

底面の直径 AB を x 軸に，中心を原点 O とし，A$(-a,\ 0)$，B$(a,\ 0)$ とする。

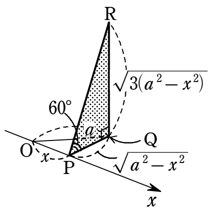
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で，直円柱の小さい方の立体を切ったとき，切り口は，右の図で $\angle\mathrm{PQR}=90°$，$\angle\mathrm{RPQ}=60°$ であるから，$\mathrm{QR}=\sqrt{3}\,\mathrm{PQ}$ の直角三角形で



$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OP}^2}=\sqrt{a^2-x^2}$$

ゆえに，切り口の面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PQ}^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-x^2)$$



よって　$V=\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-x^2)dx$

$$=\sqrt{3}\int_0^a(a^2-x^2)dx$$
$$=\sqrt{3}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$$

2

解答　(1)　$8\sqrt{1-t^2}\,\pi$　　(2)　$4\pi^2$

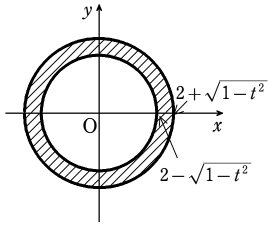
解説

(1)　$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+t^2\leqq 1$ から

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2\leqq 1-t^2$$
$$-\sqrt{1-t^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}-2\leqq\sqrt{1-t^2}$$

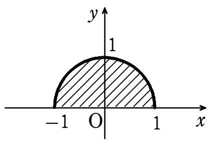
よって　$2-\sqrt{1-t^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq 2+\sqrt{1-t^2}$

ゆえに，$S(t)$ は右の図の斜線部分(境界線上の点を含む)の面積で



$$S(t)=(2+\sqrt{1-t^2})^2\pi-(2-\sqrt{1-t^2})^2\pi$$
$$=8\sqrt{1-t^2}\,\pi$$

(2)　$\int_{-1}^{1}8\pi\sqrt{1-t^2}\,dt=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=8\pi\times\frac{\pi}{2}=4\pi^2$



3

解答　$\frac{4}{3}\pi$

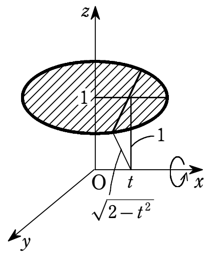
解説

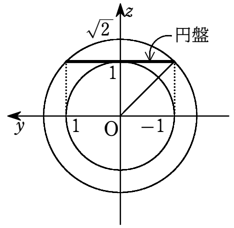
平面 $x=t$ と，円盤 $x^2+y^2\leqq 1$，$z=1$ との交線のうち，x 軸に最も近い距離は 1

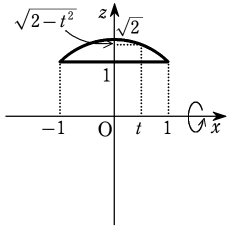
また，最も遠い距離は $\sqrt{2-t^2}$

よって　$V=\pi\int_{-1}^{1}\{(\sqrt{2-t^2})^2-1^2\}dt=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt$

$$=2\pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=2\pi\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi$$







4

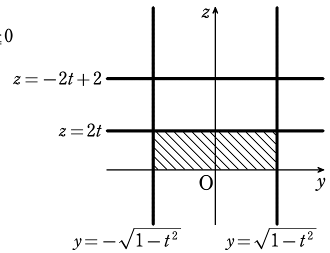
解答　$V=\frac{4}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}\pi$

解説

平面 $x=t$ による K の切り口を表す領域は

$y^2\leqq 1-t^2$，$z\leqq 2t$，$z\leqq -2t+2$，$t\geqq 0$，$z\geqq 0$

と表せる。



$y^2\leqq 1-t^2$ から

$$-\sqrt{1-t^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-t^2}$$

$1-t^2\geqq 0$ から $-1\leqq t\leqq 1$

$t\geqq 0$ とあわせて $0\leqq t\leqq 1$

また，$2t-(-2t+2)=4\left(t-\frac{1}{2}\right)$ から

$0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき　$2t\leqq -2t+2$

$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき　$2t\geqq -2t+2$

よって，平面 $x=t$ での K の切り口の面積を $S(t)$ とすると，$S(t)$ は次のようになる。

$0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$$S(t)=2\sqrt{1-t^2}\times 2t$$

すなわち

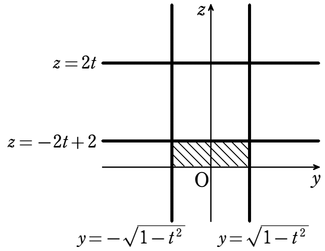
$$S(t)=4t\sqrt{1-t^2}$$

$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき

$$S(t)=2\sqrt{1-t^2}\times(-2t+2)$$

すなわち

$$S(t)=4(1-t)\sqrt{1-t^2}$$



よって

$$V=\int_0^1 S(t)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}S(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}S(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}4t\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}4(1-t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$
$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}t\sqrt{1-t^2}\,dt-4\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt+4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$\sqrt{1-t^2}=u$ とおくと　$1-t^2=u^2$

よって　$-2tdt=2udu$　すなわち　$tdt=-udu$

ゆえに

t	$0\to\frac{1}{2}$
u	$1\to\frac{\sqrt{3}}{2}$

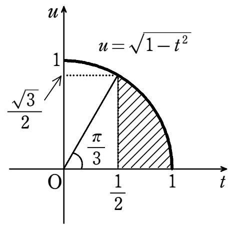
$$\int_0^{\frac{1}{2}}t\sqrt{1-t^2}\,dt=-\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}u^2du=-\left[\frac{1}{3}u^3\right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

t	$\frac{1}{2}\to 1$
u	$\frac{\sqrt{3}}{2}\to 0$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt=-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}u^2du=-\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

また，$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は右の図の斜線部分の面積で

あるから



$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって

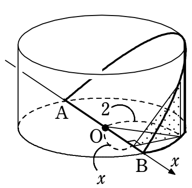
$$V=4\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}+4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}\pi$$

1

解答　$\dfrac{16}{3}$

解説

底面の中心 O を原点に，AB を x 軸にとる。
x 軸に垂直で，x 軸との交点の x 座標が x である平面でこの立体を切ったときの断面は，底辺の長さ $\sqrt{4-x^2}$，高さ $\sqrt{4-x^2}$ の直角二等辺三角形である。



よって　$V=\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}(4-x^2)dx=\int_0^2(4-x^2)dx$

$=\left[4x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2=\dfrac{16}{3}$

2

解答　(1)　$S(t)=\pi\{\log 2-\log(1+t^2)\}$　　(2)　$\pi(4-\pi)$

解説

(1)　与えられた不等式から　　$x^2+y^2\leqq\log 2-\log(1+z^2)$　……①

$x^2+y^2\geqq 0$ であるから　　$\log 2-\log(1+z^2)\geqq 0$

すなわち　　$\log(1+z^2)\leqq\log 2$　　　底 e は 1 より大きいから　　$1+z^2\leqq 2$

ゆえに　　$-1\leqq z\leqq 1$

立体 A を平面 $z=t\,(-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの切り口は，① から，円 $x^2+y^2=\log 2-\log(1+t^2)$，$z=t$ の周および内部である。

よって，切り口の面積を $S(t)$ とすると　　$S(t)=\pi\{\log 2-\log(1+t^2)\}$

(2)　立体 A は xy 平面に関して対称であるから

$V=2\displaystyle\int_0^1 S(t)dt=2\pi\int_0^1\{\log 2-\log(1+t^2)\}dt$

$=2\pi\Big[t\log 2\Big]_0^1-2\pi\Big[t\log(1+t^2)\Big]_0^1+2\pi\displaystyle\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt$

$=2\pi\log 2-2\pi\log 2+4\pi\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=4\pi\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$

$\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\int_0^1 dt-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$\displaystyle\int_0^1 dt=\Big[t\Big]_0^1=1$

t	$0\to 1$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{4}$

$t=\tan\theta$ とおくと　　$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

よって　　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

したがって　　$\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=1-\frac{\pi}{4}$

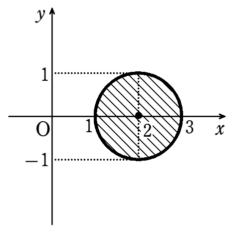
よって　　$V=4\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi(4-\pi)$

3

解答　$4\pi^2$

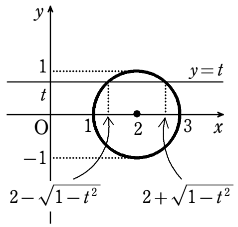
解説

方程式 $(x-2)^2+y^2=1$ は点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を表すから，領域 D を xy 平面に図示すると，右の図の斜線部分のようになる。
ただし，境界線を含む。



$-1\leqq t\leqq 1$ のとき，xy 平面上において，直線 $y=t$ と円 $(x-2)^2+y^2=1$ との交点の x 座標は
$(x-2)^2+t^2=1$ を解いて　　$x=2\pm\sqrt{1-t^2}$
よって，平面 $y=t$ による立体 K の切り口の面積は，半径 $2+\sqrt{1-t^2}$ の円の面積から半径 $2-\sqrt{1-t^2}$ の円の面積を引いたものであるから

$\pi(2+\sqrt{1-t^2})^2-\pi(2-\sqrt{1-t^2})^2=8\pi\sqrt{1-t^2}$



よって，求める体積は　　$V=\displaystyle\int_{-1}^{1}8\pi\sqrt{1-t^2}\,dt$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ の値は半径 1 の円の面積の $\dfrac{1}{2}$ 倍なので

$V=8\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=8\pi\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi^2$

4

解答　$\dfrac{1}{12}(4\pi+64-15\sqrt{3})$

解説

平面 $z=u$ による K の切断面は $y^2\leqq 1-u^2$，$x^2\leqq 1-u^2$，$y\leqq\dfrac{1}{2}$ で表される。

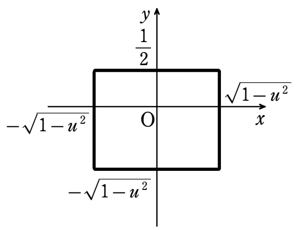
$x^2\leqq 1-u^2$，$y^2\leqq 1-u^2$ から

$-\sqrt{1-u^2}\leqq x\leqq\sqrt{1-u^2}$，$-\sqrt{1-u^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-u^2}$

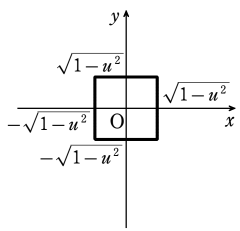
$1-u^2\geqq 0$ から $-1\leqq u\leqq 1$

また，$\sqrt{1-u^2}$ と $\dfrac{1}{2}$ の大小関係によって，平面 $z=u$ による K の切断面は，次の図のようになる。

[1]　$\sqrt{1-u^2}\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき



[2]　$\sqrt{1-u^2}\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$\sqrt{1-u^2}=\dfrac{1}{2}$ とすると　　$1-u^2=\dfrac{1}{4}$　　　これを解くと　　$u=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq u\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　　$\sqrt{1-u^2}\geqq\dfrac{1}{2}$

$-1\leqq u\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq u\leqq 1$ のとき　　$\sqrt{1-u^2}\leqq\dfrac{1}{2}$

よって，平面 $z=u$ での K の切り口の面積を $S(u)$ とすると，$S(u)$ は次のようになる。

[1]　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq u\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$S(u)=2\sqrt{1-u^2}\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{1-u^2}\right)=\sqrt{1-u^2}+2(1-u^2)$

[2]　$-1\leqq u\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq u\leqq 1$ のとき

$S(u)=(2\sqrt{1-u^2})^2=4(1-u^2)$

以上より

$V=\displaystyle\int_{-1}^{1}S(u)du$

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\{\sqrt{1-u^2}+2(1-u^2)\}du+2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}4(1-u^2)du$

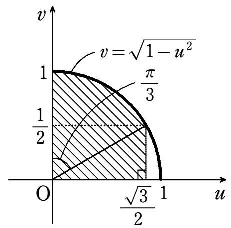
$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-u^2}\,du+4\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-u^2)du+8\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}(1-u^2)du$

$=2\left(\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+4\left[u-\dfrac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+8\left[u-\dfrac{u^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}$

$=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}+4\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{8}+8\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

$=\dfrac{1}{12}(4\pi+64-15\sqrt{3})$

注意　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-u^2}\,du$ は，右の図の斜線部分の面積を表す。



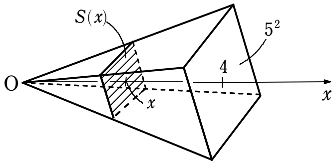
1

解答　(1)　$\dfrac{100}{3}$　　(2)　36π　　(3)　$\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

解説

(1)　四角錐の頂点を原点Oとし，頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にとる。

$0\leqq x\leqq 4$ として，x 軸上で座標が x である点を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると



$S(x):5^2=x^2:4^2$

が成り立つ。よって

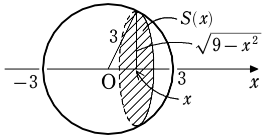
$S(x)=\dfrac{25}{16}x^2$

したがって，求める体積を V とすると

$$V=\int_0^4\frac{25}{16}x^2dx=\frac{25}{16}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{100}{3}$$

(2)　球の中心Oを通る直線を x 軸にとり，Oを原点とする。

$-3\leqq x\leqq 3$ として，x 軸上で座標が x である点を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると



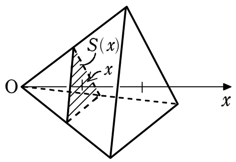
$S(x)=\pi(\sqrt{9-x^2})^2=\pi(9-x^2)$

したがって，求める体積を V とすると

$$V=\int_{-3}^3\pi(9-x^2)dx=2\pi\int_0^3(9-x^2)dx=2\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=36\pi$$

(3)　正四面体の頂点を原点Oとし，頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にとる。

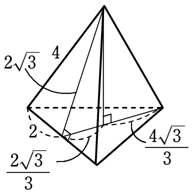
正四面体の高さを h とすると，右の下図から



$$h=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{96}{9}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ として，x 軸上で座標が x である点を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，底面積は

$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$



であるから　$S(x):4\sqrt{3}=x^2\cdot\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2$

ゆえに　　$S(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x^2$

したがって，求める体積を V とすると

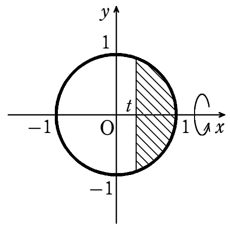
$$V=\int_0^{\frac{4\sqrt{6}}{3}}\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{8}x^3\right]_0^{\frac{4\sqrt{6}}{3}}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

2

解答　直径を 2：1 に内分する点を通り，その直径に垂直な平面で切ればよい

解説

半径1の球は，円 $x^2+y^2=1$ の x 軸の周りの回転体と考えられる。



球を平面 $x=t$ $(0<t<1)$ で切ったとき，小さい方の部分の体積は　　$\pi\displaystyle\int_t^1(1-x^2)dx$

これを V とおくと，条件から

$$V:\frac{4}{3}\pi\cdot1^3=7:(7+20)$$

すなわち　　$V=\dfrac{7}{27}\times\dfrac{4}{3}\pi$

$V=\pi\left[x-\dfrac{x^3}{3}\right]_t^1=\pi\left(\dfrac{2}{3}-t+\dfrac{t^3}{3}\right)$ であるから　　$\dfrac{2}{3}-t+\dfrac{t^3}{3}=\dfrac{28}{81}$

よって　　$27t^3-81t+26=0$　　すなわち　　$(3t-1)(9t^2+3t-26)=0$

したがって　　$t=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{105}}{6}$

$0<t<1$ であるから　　$t=\dfrac{1}{3}$

よって　直径を 2：1 に内分する点を通り，その直径に垂直な平面で切ればよい。

3

解答　(1)　$S(t)=(1-\sqrt{1-t^2})^2$　　(2)　$\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

解説

(1)　$0\leqq z\leqq 1$ であるから　　$0\leqq t\leqq 1$

$x^2+y^2+z^2-2xy-1\geqq0$ において，$z=t$ とすると

$$x^2+y^2+t^2-2xy-1\geqq0$$

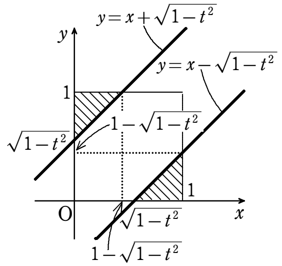
よって　　$(y-x)^2\geqq1-t^2$

すなわち　$y-x\leqq-\sqrt{1-t^2}$

　または　$\sqrt{1-t^2}\leqq y-x$

ゆえに　　$y\leqq x-\sqrt{1-t^2}$

　または　$y\geqq x+\sqrt{1-t^2}$



したがって，平面 $z=t$ で切ったときの断面は，右の図の斜線部分である。

また　　$S(t)=2\cdot\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-t^2})^2$

$\qquad=(1-\sqrt{1-t^2})^2$

(2)　求める体積を V とすると

$$V=\int_0^1S(t)dt=\int_0^1(1-\sqrt{1-t^2})^2dt=\int_0^1(2-t^2-2\sqrt{1-t^2})dt$$

$$=\left[2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1-2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$ は，半径が1の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表すから

$$V=2-\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

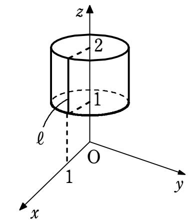
4

解答　6π

解説

図形 A を表す方程式は

$$x^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq2$$



図形 A を平面 $x=t$ $(-1\leqq t\leqq1)$ で切ったときにできる切断面は，右下の図の実線部分のようになる。

この切断面を x 軸の周りに1回転したとき，通過する領域の面積 S は

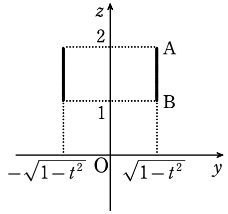
$S=\pi\mathrm{OA}^2-\pi\mathrm{OB}^2$

$\quad=\pi\{(1-t^2)+4\}-\pi\{(1-t^2)+1\}$

$\quad=3\pi$

よって，求める立体の体積は

$$V=\int_{-1}^1 3\pi dt=6\pi\int_0^1dt=6\pi\Big[t\Big]_0^1=6\pi$$



第５講　レベルＢ

1

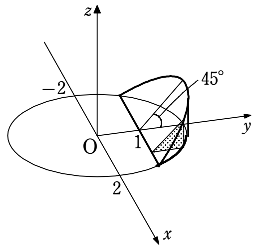
解答　$3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

解説

円柱 C を平面 H で分けた２つの部分のうち，小さい方が題意の立体である。

$x^2+y^2=4$ において $y=1$ とすると　$x=\pm\sqrt{3}$

この立体を平面 $x=t\,(-\sqrt{3}\leqq t\leqq\sqrt{3})$ で切ったときの断面は，直角を挟む２辺の長さがともに $\sqrt{4-t^2}-1$ の直角二等辺三角形である。



その面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}-1)^2$$

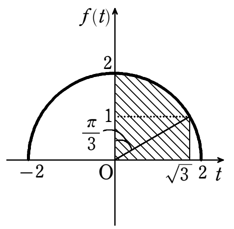
立体は平面 $x=0$ に関して対称であるから，求める体積 V は

$$V=2\int_0^{\sqrt{3}}S(t)\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}-1)^2dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})\,dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}(5-t^2)\,dt-2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt$$

ここで，$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt$ は右の図の斜線部分の面積を表すから



$$V=\left[5t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}-2\left(\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot1\right)$$

$$=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

2

解答　$\pi\left\{\frac{1}{8}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{2}\log a\right\}$

解説

図形 D を y 軸に垂直な平面 $y=t\,(0\leqq t\leqq\log a)$ で切断したときの切り口を考える。

また，$\mathrm{A}(0,\ t,\ 0)$ とする。

このとき　（$y=t$ として）

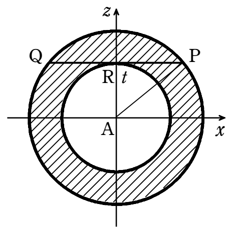
$$z=t,\ |x|\leqq\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1$$

であるから，切り口は２点 $\mathrm{P}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1,\ t,\ t\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right),\ t,\ t\right)$ を結んだ線分 PQ になる。

ただし，$t=0$ のときは１点 A である。

線分 PQ と z 軸との交点 $(0,\ t,\ t)$ を R とする。

この線分 PQ を y 軸の周りに１回転させてできる図形は右の図のようになる。



斜線部分の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\pi(\mathrm{AP}^2-\mathrm{AR}^2)=\pi\mathrm{PR}^2=\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2$$

よって，求める体積を $V(a)$ とすると

$$V(a)=\int_0^{\log a}S(t)\,dt=\pi\int_0^{\log a}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2dt$$

$$=\pi\int_0^{\log a}\left\{\frac{1}{4}(e^{2t}+e^{-2t})-(e^t+e^{-t})+\frac{3}{2}\right\}dt$$

$$=\pi\left[\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})-(e^t-e^{-t})+\frac{3}{2}t\right]_0^{\log a}=\pi\left\{\frac{1}{8}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{2}\log a\right\}$$

3

解答　$\frac{5}{32}\pi$

解説

与えられた領域を平面 $x=t$（ただし $t\geqq0$）で切る。

切り口上の点 $(t,\ y,\ z)$ の満たす不等式は

$$t^2+y^2\leqq1,\ z+2t^2-t^4\leqq1,\ y\geqq0,\ z\geqq0\quad\cdots\cdots①$$

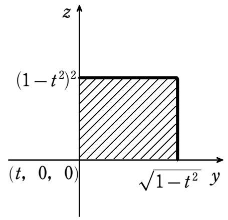
これを満たす実数 y が存在することと，$1-t^2\geqq0$ は同値で，$t\geqq0$ であるから

$$0\leqq t\leqq1$$

このとき，① から

$$0\leqq y\leqq\sqrt{1-t^2},\ 0\leqq z\leqq(1-t^2)^2$$

よって，平面 $x=t$ における切り口は右の図の斜線部分である。



この面積は　$(1-t^2)^{\frac{5}{2}}$

求める体積を V とおくと　$V=\int_0^1(1-t^2)^{\frac{5}{2}}dt$

$t=\sin\theta$ とおくと　$dt=\cos\theta\,d\theta$

t	$0\longrightarrow1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

よって　$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta$

ここで　$\cos^6x=(\cos^3x)^2=\left\{\frac{1}{4}(3\cos x+\cos3x)\right\}^2$

$$=\frac{1}{16}(9\cos^2x+6\cos x\cos3x+\cos^23x)$$

$$=\frac{9}{32}(1+\cos2x)+\frac{3}{16}(\cos4x+\cos2x)+\frac{1}{32}(1+\cos6x)$$ であるから

$$\int\cos^6x\,dx=\frac{1}{32}\int(10+15\cos2x+6\cos4x+\cos6x)\,dx$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{15}{64}\sin2x+\frac{3}{64}\sin4x+\frac{1}{192}\sin6x+C$$

よって　$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta=\left[\frac{5}{16}\theta+\frac{15}{64}\sin2\theta+\frac{3}{64}\sin4\theta+\frac{1}{192}\sin6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{32}\pi$

第６講　総復習問題

1

解答　(1)　$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$　　(2)　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$

(3)　$1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}$

解説

(1)　$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

よって，$y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$ と $y=\sin x$ の２式から y を消去して

$\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)=\sin x$　　ゆえに　$\sin x-\cos x=0$

すなわち　$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\pi}{4}$ であるから　$x-\frac{\pi}{4}=0$　ゆえに　$x=\frac{\pi}{4}$

したがって，C_2 と C_3 の交点の座標は　$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(2)　C_1 と C_3 の交点の x 座標が α であるから，$0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ であり

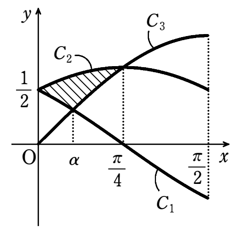
$\frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\sin\alpha$　　すなわち　$\cos\alpha=3\sin\alpha$

これと $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ から　$10\sin^2\alpha=1$

$\sin\alpha\geqq0$ であるから　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$　　また　$\cos\alpha=3\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

(3)　$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

求める面積を S とすると，S は右の図の斜線部分の面積であり



$$S=\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\{g(x)-h(x)\}dx$$

$$=\int_0^{\alpha}\left\{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)\right\}dx$$

$$+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\sin x\right\}dx$$

$$=\int_0^{\alpha}\sin x\,dx+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx$$

$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\alpha}+\frac{1}{2}\Big[\sin x+\cos x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\cos\alpha+1+\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-(\sin\alpha+\cos\alpha)\right\}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{3}{2}\cos\alpha=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

2

解答　(1)　$k=6\log3-1$　　(2)　$\frac{8}{9}+2\log\frac{2}{3}$

解説

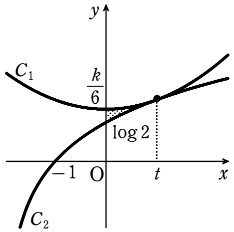
(1)　真数は正であるから　$x+2>0$

よって　$x>-2$

$6y-x^2=k$ から　$y=\frac{x^2}{6}+\frac{k}{6}$

ゆえに　$y'=\frac{1}{3}x$

また，$y=\log(x+2)$ から　$y'=\frac{1}{x+2}$



C_1 と C_2 の共有点の x 座標を t とすると，この点における C_1，C_2 の接線が一致するから

$$\begin{cases} \frac{t^2}{6}+\frac{k}{6}=\log(t+2) & \cdots\cdots ① \\ \frac{1}{3}t=\frac{1}{t+2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② から　$t(t+2)=3$　　よって　$t^2+2t-3=0$

ゆえに　$(t-1)(t+3)=0$　　$t>-2$ であるから　$t=1$

① に代入して　$\frac{1}{6}+\frac{k}{6}=\log 3$　　ゆえに　$k=6\log 3-1$

(2)　(1) の結果から，求める面積は

$$\int_0^1\left\{\left(\frac{x^2}{6}+\log 3-\frac{1}{6}\right)-\log(x+2)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{18}x^3+\left(\log 3-\frac{1}{6}\right)x-(x+2)\log(x+2)+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{18}+\log 3-\frac{1}{6}-3\log 3+1+2\log 2=\frac{8}{9}+2\log\frac{2}{3}$$

3

解答　(1)　略　　(2)　$\frac{1}{e}$　　(3)　e^2-2e

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$

曲線 C_1 上の点 $\left(t,\ \frac{1}{a}\log t\right)$ $(t>0)$ を直線 $y=x$ に関して対称移動した点は

$$\left(\frac{1}{a}\log t,\ t\right)$$

$y=e^{ax}$ において，$x=\frac{1}{a}\log t$ のとき　$y=e^{\log t}=t$

よって，曲線 C_1 上の点を直線 $y=x$ に関して対称移動した点は曲線 C_2 上にある。

ゆえに，曲線 C_1 と曲線 C_2 は直線 $y=x$ に関して対称である。

(2)　$y=\frac{1}{a}\log x$ から　$y'=\frac{1}{ax}$

よって，曲線 C_1 上の点 $\left(p,\ \frac{1}{a}\log p\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{a}\log p=\frac{1}{ap}(x-p)$$

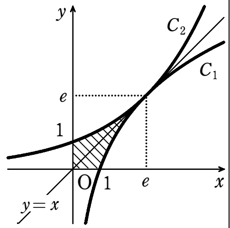
すなわち　$y=\frac{1}{ap}x+\frac{1}{a}\log p-\frac{1}{a}$

これが $y=x$ に一致するとき　$\frac{1}{ap}=1$，$\frac{1}{a}\log p-\frac{1}{a}=0$

これを解いて　$p=e$，$a=\frac{1}{e}$

ゆえに　$a=\frac{1}{e}$

(3)　求める面積は，右の図の斜線部分の面積である。



$a=\frac{1}{e}$ のとき，曲線 C_1 の方程式は $y=e\log x$ であるから

$$e^2-2\int_0^1 e\log x\,dx=e^2-2e\Big[x\log x-x\Big]_1^e$$
$$=e^2-2e$$

4

解答　(1)　$y=g(x)=\log\frac{x}{1-x}$　$(0<x<1)$　　(2)　略

解説

(1)　$y=\frac{e^x}{e^x+1}$ から　$y=1-\frac{1}{e^x+1}$

$e^x+1>1$ であるから　$0<\frac{1}{e^x+1}<1$　　よって　$0<y<1$

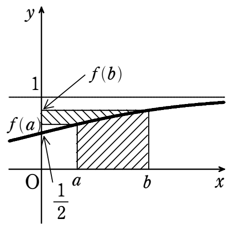
また，$y=\frac{e^x}{e^x+1}$ から　$(e^x+1)y=e^x$

ゆえに　$e^x=\frac{y}{1-y}$

$$x=\log\frac{y}{1-y}$$

したがって，求める逆関数は　$y=g(x)=\log\frac{x}{1-x}$　$(0<x<1)$

(2)　$y=f(x)$ は単調に増加する関数であり，グラフは右の図のようになる。



ここで　$g(y)=g(f(x))=x$

$dy=f'(x)dx$

であるから

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(y)dy$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b xf'(x)dx$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\Big[xf(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)dx=bf(b)-af(a)$$

参考　$0<a<b$ のとき，(2) の関係式が成り立つことは，定積分が表す面積を考えると明らかである。

5

解答　(1)　1　　(2)　$\frac{\pi}{16}(2\pi+3\sqrt{3})$

解説

(1)　$\cos 2x-(-\sin x)=1-2\sin^2 x+\sin x=(1-\sin x)(1+2\sin x)\geqq 0$　$\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

よって，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において　$\cos 2x\geqq-\sin x$

したがって，K の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+\sin x)dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0-(-1)=1$$

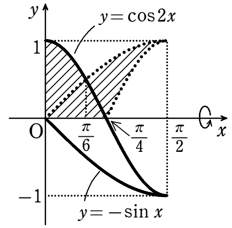
(2)　$\cos 2x=\sin x$ とすると

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

よって　$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より　$x=\frac{\pi}{6}$

右の図から求める体積は



$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 2x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 4x)dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)dx-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4x)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{\pi}{16}(2\pi+3\sqrt{3})$$

6

解答　(1)　$t=\frac{1}{2}$　　(2)　$\pi\left\{\frac{3}{2}(\log 2)^2-5\log 2+3\right\}$

解説

(1)　$V(t)=\pi\int_t^{t+\frac{3}{2}}(\log x)^2dx$ について，$(\log x)^2$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると

$F'(x)=(\log x)^2$

よって　$V(t)=\int_t^{t+\frac{3}{2}}F'(x)dx=\Big[F(x)\Big]_t^{t+\frac{3}{2}}=F\left(t+\frac{3}{2}\right)-F(t)$

ゆえに　$\frac{dV(t)}{dt}=F'\left(t+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(t+\frac{3}{2}\right)'-F'(t)=\pi\left\{\log\left(t+\frac{3}{2}\right)\right\}^2-\pi(\log t)^2$

$$=\pi\left\{\log\left(t+\frac{3}{2}\right)+\log t\right\}\left\{\log\left(t+\frac{3}{2}\right)-\log t\right\}$$
$$=\pi\log\left(t^2+\frac{3}{2}t\right)\times\log\left(1+\frac{3}{2t}\right)$$

$t>0$ のとき，$1+\frac{3}{2t}>1$ から　$\log\left(1+\frac{3}{2t}\right)>0$

よって，$\frac{dV(t)}{dt}=0$ のとき　$t^2+\frac{3}{2}t=1$

ゆえに　$(2t-1)(t+2)=0$　　$t>0$ から　$t=\frac{1}{2}$

$t>0$ における $V(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{1}{2}$	…
$V'(t)$	/	$-$	0	$+$
$V(t)$	/	↘	極小	↗

したがって，$V(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ のとき最小となる。

(2)　不定積分 $\int(\log x)^2dx$ を計算する。

$$\int(\log x)^2dx=\int(x)'(\log x)^2dx$$

$$=x(\log x)^2-\int x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$$

$$=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

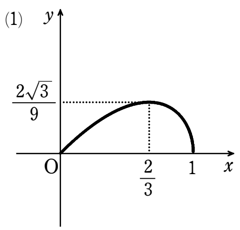
(1) より，求める最小値は

$$V\left(\frac{1}{2}\right)=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\log x)^2dx=\pi\Big[x(\log x)^2-2x\log x+2x\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}=\pi\left\{\frac{3}{2}(\log 2)^2-5\log 2+3\right\}$$

7

解答　(1)　[図]

(2)　$\frac{32}{105}\pi$



解説

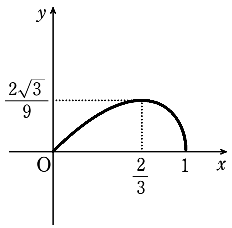
(1)　$\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$　から　$\frac{dx}{dt}=-2t,\ \frac{dy}{dt}=1-3t^2$

$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$\frac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=0$

$\frac{dy}{dt}=0$ とすると　$3t^2=1$　　よって　$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

よって，t の値に対応する x，y の値の変化は次のようになる。

t	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	1
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
x	1	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0



よって，曲線 C の概形は右の図のようになる。

(2)　$0\leqq t\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$ における x を x_1，$\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq t\leqq 1$ における x を x_2 とすると，求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}}x_1{}^2dy-\pi\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}}x_2{}^2dy$$

ここで　$dy=(1-3t^2)dt$

また，(1) の x，y の値の変化の表から

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1-t^2)^2(1-3t^2)dt-\pi\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1-t^2)^2(1-3t^2)dt$$

$$=\pi\int_0^1(1-t^2)^2(1-3t^2)dt=\pi\int_0^1(1-5t^2+7t^4-3t^6)dt$$

$$=\pi\left[t-\frac{5}{3}t^3+\frac{7}{5}t^5-\frac{3}{7}t^7\right]_0^1=\frac{32}{105}\pi$$

参考　$0\leqq a<b$，$f(x)\geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_0 は

$$V_0=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

で与えられる。このことを用いると，求める体積は

$$2\pi\int_0^1 xy\,dx=2\pi\int_1^0(1-t^2)(t-t^3)(-2t)dt$$

$$=4\pi\int_0^1(t^6-2t^4+t^2)dt=4\pi\left[\frac{t^7}{7}-\frac{2}{5}t^5+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{32}{105}\pi$$

8

解答　(1)　$\frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi$　　(2)　$\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

解説

(1)　図のように，曲線 $y=x^n$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^n)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ から直線 $y=x$ に垂線 PH を引き，

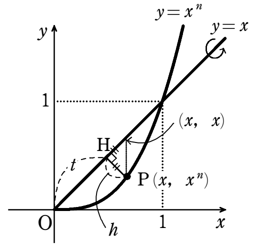
$\mathrm{PH}=h$，$\mathrm{OH}=t$　$(0\leqq t\leqq\sqrt{2})$

とする。このとき

$$h=\frac{|x-x^n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{x-x^n}{\sqrt{2}}$$

$$t=\sqrt{2}x-h=\sqrt{2}x-\frac{x-x^n}{\sqrt{2}}=\frac{x+x^n}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$dt=\frac{1+nx^{n-1}}{\sqrt{2}}dx$



t と x の対応は右のようになる。

t	$0\longrightarrow\sqrt{2}$
x	$0\longrightarrow 1$

よって，求める体積 V_n は

$$V_n=\pi\int_0^{\sqrt{2}}h^2dt=\pi\int_0^1\frac{(x-x^n)^2}{2}\cdot\frac{1+nx^{n-1}}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x^2-2x^{n+1}+x^{2n})(1+nx^{n-1})dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1\{x^2+(n-2)x^{n+1}+(1-2n)x^{2n}+nx^{3n-1}\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{n-2}{n+2}x^{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}x^{2n+1}+\frac{x^{3n}}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{n-2}{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{2}{3}-\frac{6n}{(n+2)(2n+1)}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{4n^2-8n+4}{3(n+2)(2n+1)}=\frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi$$

(2)　$$\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$$

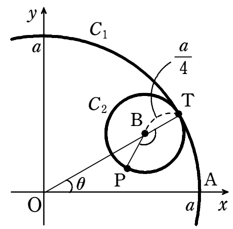
9

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{a}{4}\cos 3\theta,\ -\frac{a}{4}\sin 3\theta\right)$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{a}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta),\ \frac{a}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)\right)$　　(3)　$6a$

解説

(1)　2 つの円の接点を T とする。



$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから　　$a\theta=\frac{a}{4}\angle\mathrm{PBT}$

よって　　$\angle\mathrm{PBT}=4\theta$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{a}{4}\cos(\theta-4\theta),\ \frac{a}{4}\sin(\theta-4\theta)\right)$$

$$=\left(\frac{a}{4}\cos(-3\theta),\ \frac{a}{4}\sin(-3\theta)\right)$$

$$=\left(\frac{a}{4}\cos 3\theta,\ -\frac{a}{4}\sin 3\theta\right)$$

(2)　点 B の座標は $\left(\frac{3}{4}a\cos\theta,\ \frac{3}{4}a\sin\theta\right)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{3}{4}a\cos\theta,\ \frac{3}{4}a\sin\theta\right)+\left(\frac{a}{4}\cos 3\theta,\ -\frac{a}{4}\sin 3\theta\right)$$

$$=\left(\frac{a}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta),\ \frac{a}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)\right)$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とすると

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{3}{4}a(\sin\theta+\sin 3\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{3}{4}a(\cos\theta-\cos 3\theta)$$

であるから　$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2=\frac{9}{16}a^2(\sin^2\theta+2\sin\theta\sin 3\theta+\sin^2 3\theta)$

$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\frac{9}{16}a^2(\cos^2\theta-2\cos\theta\cos 3\theta+\cos^2 3\theta)$

よって　$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\frac{9}{16}a^2(2-2\cos(\theta+3\theta))=\frac{9}{16}a^2\cdot 2\cdot 2\sin^2 2\theta$

$$=\frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta$$

したがって，動点 P が移動する距離は

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|d\theta=\frac{3}{2}a\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$$

$$=6a\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$$

10

解答　$\left(8\sqrt{2}-\frac{32}{3}\right)r^3$

解説

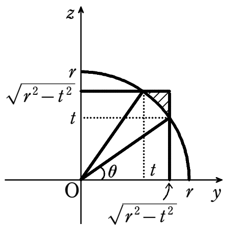
$x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$ において考える。

平面 $x=t$ $(0\leqq t\leqq r)$ による切り口は $\begin{cases} y^2\leqq r^2-t^2 & \cdots\cdots①\\ z^2\leqq r^2-t^2 & \cdots\cdots②\\ y^2+z^2\geqq r^2 & \cdots\cdots③\end{cases}$ で表される。

①＋②と③から　$2r^2-2t^2\geqq r^2$

よって，切り口が存在するのは $0\leqq t\leqq\frac{r}{\sqrt2}$ のときである。

そのとき，切り口は右図の斜線部分になる。
この面積を $S(t)$ とする。
また，図のように θ をとる。
このとき



$$S(t)=(\sqrt{r^2-t^2})^2-\sqrt{r^2-t^2}\cdot t-\pi r^2\cdot\frac{\frac{\pi}{2}-2\theta}{2\pi}$$
$$=r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}+r^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

また，$t=r\sin\theta$ であるから　$dt=r\cos\theta\,d\theta$

よって，求める体積を V とすると

t	$0\longrightarrow\frac{r}{\sqrt2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$$\frac18V=\int_0^{\frac{r}{\sqrt2}}\left\{r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}+r^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dt$$
$$=\int_0^{\frac{r}{\sqrt2}}\left(r^2-\frac{\pi}{4}r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}\right)dt+r^2\int_0^{\frac{r}{\sqrt2}}\theta\,dt$$
$$=\left[r^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)t-\frac{t^3}{3}+\frac13(r^2-t^2)^{\frac32}\right]_0^{\frac{r}{\sqrt2}}+r^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta r\cos\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{\sqrt2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)r^3-\frac{r^3}{6\sqrt2}+\frac{r^3}{6\sqrt2}-\frac{r^3}{3}+r^3\left\{\left[\theta\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)r^3-\frac{r^3}{3}+r^3\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt2}+\left[\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=r^3\left(\sqrt2-\frac43\right)$$

ゆえに　$V=\left(8\sqrt2-\frac{32}{3}\right)r^3$

1

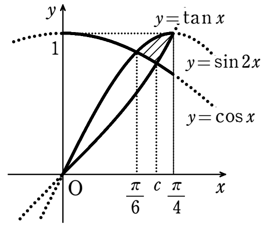
解答　(1)　$a=\frac{\pi}{6}$，

$b=\frac{\sqrt3}{2}$，

$d^2=\frac{-1+\sqrt5}{2}$

(2)　略

(3)　[図]，$\frac{5-2\sqrt5}{4}-\frac12\log(\sqrt5-1)$



解説

(1)　$y=\cos x$ と $y=\sin2x$ の交点を求める。

$\cos x=\sin2x$ より　$\cos x(1-2\sin x)=0$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ であるから　$\sin x=\frac12$

よって　$x=\frac{\pi}{6}$　　ゆえに　$a=\frac{\pi}{6}$

したがって　$b=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{2}$

次に，d^2 の値を求める。

$\cos x=\tan x$ とする。

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ より $\cos x>0$，$\tan x\geqq0$ であるから　$\cos^2x=\tan^2x$

$$\cos^2x=\frac{1}{\cos^2x}-1$$
$$\cos^4x+\cos^2x-1=0$$

$\cos^2x>0$ であるから　$\cos^2x=\frac{-1+\sqrt5}{2}$

ここで，$\tan\frac{\pi}{4}=1$，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}$ より $\tan\frac{\pi}{4}>\cos\frac{\pi}{4}$ であるから，$y=\cos x$ と $y=\tan x$ のグラフは $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ の範囲に交点をもつ。

ゆえに　$d^2=\cos^2c=\frac{-1+\sqrt5}{2}$

(2)　$\sqrt5<2.5$ より　$\frac{-1+\sqrt5}{2}<\frac34=\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2$

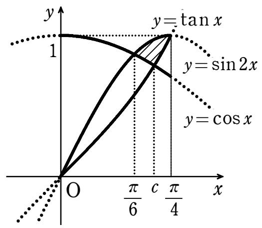
ゆえに　$\cos^2c<\cos^2a$　　$\cos c>0$，$\cos a>0$ であるから　$\cos c<\cos a$

$0\leqq a\leqq\frac{\pi}{4}$，$0\leqq c\leqq\frac{\pi}{4}$ であるから　$c>a$

(3)　$x=\frac{\pi}{4}$ のとき　$\tan x=1$，$\sin2x=1$

$y=\tan x$ と $y=\sin2x$ のグラフは $0<x\leqq\frac{\pi}{4}$ でただ１つの共有点をもち，その共有点は

$\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$



連立不等式の表す領域は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

求める面積を S とおくと

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{c}(\sin2x-\cos x)dx+\int_c^{\frac{\pi}{4}}(\sin2x-\tan x)dx$$
$$=\left[-\frac12\cos2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{c}+\left[-\frac12\cos2x+\log|\cos x|\right]_c^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(-\frac12\cos2c-\sin c\right)-\left(-\frac12\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$+\left(-\frac12\cos\frac{\pi}{2}+\log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right)-\left(-\frac12\cos2c+\log|\cos c|\right)$$
$$=-\sin c+\frac34+\log\frac{1}{\sqrt2}-\log|\cos c|$$

ここで $d=\cos c$ より　$\sin^2c=1-d^2$

$\sin c>0$ であるから　$\sin c=\sqrt{1-d^2}=\frac{\sqrt5-1}{2}$

また　$\log|\cos c|=\frac12\log d^2=\frac12\log\frac{\sqrt5-1}{2}$

よって

$$S=-\frac{\sqrt5-1}{2}+\frac34-\frac12\log2-\frac12\log\frac{\sqrt5-1}{2}=\frac{5-2\sqrt5}{4}-\frac12\log(\sqrt5-1)$$

2

解答　(1)　$b=-\frac12\log a-\frac12$　　(2)　$\frac32e^{-\frac13}-1$

解説

(1)　$f(x)=\frac{a}{2}x^2+b-\log x$ とする。

真数は正であるから，この関数の定義域は $x>0$ である。

$f'(x)=ax-\frac1x=\frac{ax^2-1}{x}$

$f'(x)=0$ とすると　$ax^2-1=0$

$a>0$ より　$x=\frac{1}{\sqrt a}$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt a}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$\frac12\log a+b+\frac12$	↗

２つの曲線がただ１つの共有点をもつとき，方程式 $f(x)=0$ はただ１つの実数解をもつ。

したがって　$\frac12\log a+b+\frac12=0$

すなわち　$b=-\frac12\log a-\frac12$

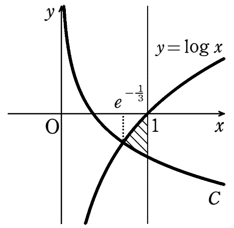
(2)　(1) より，曲線 C は $y=-\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}$ である。

C と $y=\log x$ の交点の x 座標は

$$-\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}=\log x$$

すなわち　$\log x=-\frac{1}{3}$

したがって　$x=e^{-\frac{1}{3}}$



ゆえに，求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積である。

よって　$S=\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}\left\{\log x-\left(-\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}(3\log x+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[3x\log x-2x\Big]_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}$$

$$=\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}}-1$$

3

解答　(1)　$g(x)=2-e^{-x}$　(2)　$x=\log(2\pm\sqrt{3})$　(3)　$8\log(2+\sqrt{3})-4\sqrt{3}$

解説

(1)　$g(x)=-f(-x)=-(e^{-x}-2)=2-e^{-x}$

(2)　$e^{x}-2=2-e^{-x}$ とおくと　$e^{2x}-4e^{x}+1=0$

よって　$e^{x}=2\pm\sqrt{3}$

ゆえに　$x=\log(2\pm\sqrt{3})$

(3)　求める面積 S は，右の図の斜線部分である。

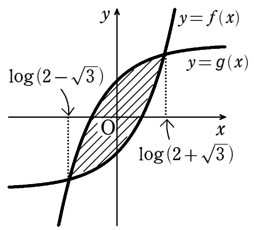
よって

$$S=\int_{\log(2-\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{3})}\{(2-e^{-x})-(e^{x}-2)\}dx$$

$$=\Big[e^{-x}-e^{x}+4x\Big]_{\log(2-\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{3})}$$

ここで，$e^{\log(2+\sqrt{3})}=e^{-\log(2-\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

$e^{\log(2-\sqrt{3})}=e^{-\log(2+\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$



であるから

$$S=-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+4\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=-4\sqrt{3}+4\log(2+\sqrt{3})^{2}$$

$$=8\log(2+\sqrt{3})-4\sqrt{3}$$

4

解答　(1)　e　(2)　$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_{0}^{1}f^{-1}(y)dy=\frac{\pi}{4}$，$\int_{0}^{1}f^{-1}(y)dy=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

(3)　e

解説

(1)　$(\log y)^{2}=x$ とおくと，$y=e^{\sqrt{x}}$ であるから　$dy=(e^{\sqrt{x}})'dx$

y	$1\longrightarrow e$
x	$0\longrightarrow 1$

よって　$\int_{1}^{e}(\log y)^{2}dy=\int_{0}^{1}x\cdot(e^{\sqrt{x}})'dx=\Big[xe^{\sqrt{x}}\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx$

$$=e-\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx$$

したがって　$\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx+\int_{1}^{e}(\log y)^{2}dy=e$

(2)　$f^{-1}(y)=x\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$y=\tan x$であるから　$dy=(\tan x)'dx$

y	$0\longrightarrow 1$
x	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって　$\int_{0}^{1}f^{-1}(y)dy=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x(\tan x)'dx=\Big[x\tan x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

ゆえに　$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_{0}^{1}f^{-1}(y)dy=\frac{\pi}{4}$

また　$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$

$$=-\Big[\log|\cos x|\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log 2$$

したがって　$\int_{0}^{1}f^{-1}(y)dy=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

(3)　$\sqrt{\log y}=x$ とおくと，$y=e^{x^{2}}$ であるから　$dy=(e^{x^{2}})'dx$

y	$1\longrightarrow e$
x	$0\longrightarrow 1$

よって　$\int_{1}^{e}\sqrt{\log y}\,dy=\int_{0}^{1}x(e^{x^{2}})'dx=\Big[xe^{x^{2}}\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{x^{2}}dx$

$$=e-\int_{0}^{1}e^{x^{2}}dx$$

したがって　$\int_{0}^{1}e^{x^{2}}dx+\int_{1}^{e}\sqrt{\log y}\,dy=e$

別解　面積を用いても定積分の値を求めることができる。

(1)　$y=e^{\sqrt{x}}$　$(0\leqq x\leqq 1)$ を x について解くと

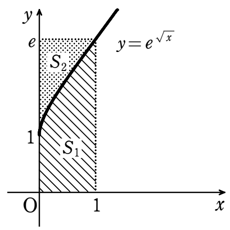
$x=(\log y)^{2}$　$(1\leqq y\leqq e)$

よって，$\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx$，$\int_{1}^{e}(\log y)^{2}dy$ はそれぞれ図の

S_1，S_2 の面積を表す。

したがって　$\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx+\int_{1}^{e}(\log y)^{2}dy=1\cdot e=e$

(2)，(3) も同様にして求めることができる。



5

解答　$\frac{\pi}{16}$

解説

$\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin 2x$ とすると　$\sin 2x-\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=0$

すなわち　$2\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{16}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{16}\right)=0$

よって　$\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{16}\right)=0$ または $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{16}\right)=0$

ここで，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ から

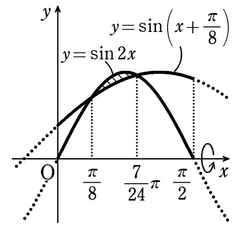
$$\frac{\pi}{16}\leqq\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{16}\leqq\frac{13}{16}\pi,\quad -\frac{\pi}{16}\leqq\frac{x}{2}-\frac{\pi}{16}\leqq\frac{3}{16}\pi$$

ゆえに　$\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$，$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{16}=0$　すなわち　$x=\frac{7}{24}\pi,\ \frac{\pi}{8}$

よって，２つの関数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$，$y=\sin 2x$ の

グラフの $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分は右の図のようになる。

したがって，求める体積を V とすると



$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\sin^{2}2x-\sin^{2}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos 4x\right\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\sin 4x\Big]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{5}{6}\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{7}{6}\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{16}$$

6

解答　(1)　$V(t)=\frac{\pi}{4\log 2}(2^{8t}-2^{6t+1}+2^{4t})$　(2)　$t=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{\pi}{64\log 2}$

解説

(1)　$y=2^{2x+2t}$　……①

$y=2^{x+3t}$　……②

①，② の共有点の x 座標は，次の方程式の実数解である。

$2^{2x+2t}=2^{x+3t}$

ゆえに　$2x+2t=x+3t$

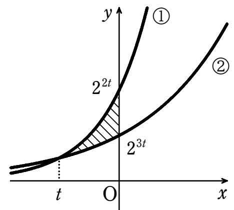
よって　$x=t$

$2^{2x+2t}-2^{x+3t}=2^{x+3t}(2^{x-t}-1)$

$t\leqq x\leqq 0$ のとき　$0\leqq x-t\leqq -t$

ゆえに　$2^{x-t}\geqq 1$

よって，$t\leqq x\leqq 0$ において　$2^{2x+2t}\geqq 2^{x+3t}$



$$V(t)=\pi\int_{t}^{0}(2^{2x+2t})^{2}dx-\pi\int_{t}^{0}(2^{x+3t})^{2}dx$$

$$=\pi\int_{t}^{0}(2^{4x+4t}-2^{2x+6t})dx$$

$$=\pi\Big[\frac{2^{4t}}{4}\cdot\frac{2^{4x}}{\log 2}-\frac{2^{6t}}{2}\cdot\frac{2^{2x}}{\log 2}\Big]_{t}^{0}=\frac{\pi}{4\log 2}(2^{8t}-2^{6t+1}+2^{4t})$$

(2)　$V(t)=\frac{\pi}{4\log 2}\{(2^{2t})^{4}-2\cdot(2^{2t})^{3}+(2^{2t})^{2}\}$

$2^{2t}=s$ とおくと　$0<s<1$ で

$$V(t)=\frac{\pi}{4\log 2}(s^4-2s^3+s^2)=\frac{\pi}{4\log 2}s^2(s^2-2s+1)$$

$$=\frac{\pi}{4\log 2}s^2(s-1)^2=\frac{\pi}{4\log 2}\{s(1-s)\}^2$$

$f(s)=s(1-s)$ とおくと　$f(s)=-s^2+s=-(s^2-s)=-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

$0<s<1$ において，$f(s)$ は $s=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

$f(s)$ が最大となるとき，$V(t)$ も最大となるから，$V(t)$ は $2^{2t}=\frac{1}{2}$ のとき，

すなわち　$t=-\frac{1}{2}$ のとき最大値　$\frac{\pi}{4\log 2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{64\log 2}$ をとる。

7

解答　(1)　$y=2x\sqrt{1-x^2}$　$(0\leqq x\leqq 1)$　　(2)　$\frac{2}{3}$　　(3)　$\frac{\pi^2}{4}$

解説

(1)　$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　$0\leqq x\leqq 1$

また　$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}$

よって　$y=\sin 2t=2\sin t\cos t=2x\sqrt{1-x^2}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

(2)　曲線 $y=2x\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ と x 軸の交点の x 座標は，$y=0$ とすると　$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$y\geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\int_0^1(1-x^2)'\sqrt{1-x^2}\,dx=-\left[\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

別解　$y=\sin 2t$ について，$y=0$ とすると $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ では　$t=0,\ \frac{\pi}{2}$

また，$y\geqq 0$ である。

$x=\sin t$ から　$dx=\cos t\,dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\cos t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,dt=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)'\cos^2 t\,dt=-2\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

(3)　$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　$0\leqq y\leqq 1$

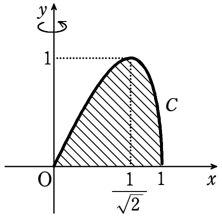
$y=1$ とすると　$t=\frac{\pi}{4}$

このとき　$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y=2x\sqrt{1-x^2}$ から　$y^2=4x^2-4x^4$

ゆえに　$4(x^2)^2-4x^2+y^2=0$

よって　$x^2=\frac{2\pm\sqrt{4-4y^2}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{2}$



したがって，求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{2}-\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{2}\right)dy=\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ は，半径１の四分円の面積を表すから　$V=\pi\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}$

別解　$y=\sin 2t$ から　$dy=2\cos 2t\,dt$

$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき $x=f(y)$，$\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $x=g(y)$ とすると

$$V=\pi\int_0^1\{g(y)\}^2dy-\pi\int_0^1\{f(y)\}^2dy$$

y と t の対応は次のようになる。

y	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

y	$1\longrightarrow 0$
t	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

よって，求める体積 V は

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t(2\cos 2t)dt-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t(2\cos 2t)dt$$

$$=-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 t\cos 2t\,dt-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 t\cos 2t\,dt$$

$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 t\cos 2t\,dt=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\cos 2t\,dt$$

$$=-\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2t\,dt\right)=-\pi\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4t)dt\right\}$$

$$=-\pi\left(\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$$

参考　関数 $y=f(x)$ のグラフの $a\leqq x\leqq b$ の部分と x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに１回転してできる立体の体積 V_0 は $V_0=2\pi\int_a^b xf(x)dx$ で与えられる。

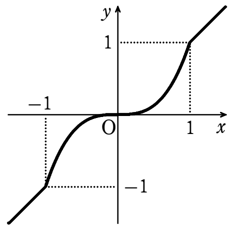
これを利用すると，求める体積 V は

$$V=2\pi\int_0^1 xy\,dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sin 2t\cos t\,dt=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{\pi}{2}\left[t-\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

8

解答　(1)　［図］　　(2)　$\frac{8\sqrt{2}}{105}\pi$



解説

(1)　$|x|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}x^n=0$ であるから　$f(x)=\frac{x^5+x^3}{x^2+1}=\frac{x^3(x^2+1)}{x^2+1}=x^3$

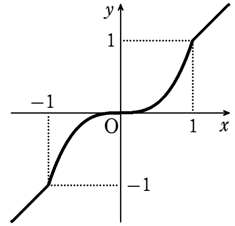
$x=1$ のとき　$f(x)=\frac{1+1+1}{1+1+1}=1$

$x=-1$ のとき　$f(x)=\frac{-1-1-1}{1+1+1}=-1$

$|x|>1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ であるから

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x^{2n-5}}+\frac{1}{x^{2n-3}}}{1+\frac{1}{x^{2n-2}}+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

したがって，グラフは右図のようになる。

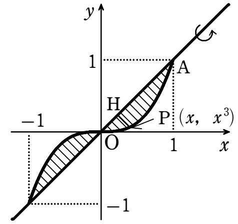


(2)　２点を結ぶ線分は $y=x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ である。

グラフの対称性から，求める体積は $0\leqq x\leqq 1$ の部分の回転体の体積の２倍である。

O $(0,\ 0)$，A $(1,\ 1)$ とすると　$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$

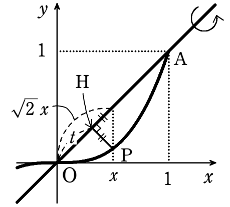
$0\leqq x\leqq 1$ とし，$y=f(x)$ 上の点 P $(x,\ x^3)$ から線分 OA に垂線 PH を下ろし，$\mathrm{OH}=t$ とおく。求める体積を V とすると　$V=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{PH}^2dt$　と表される。



ここで　$\mathrm{PH}=\frac{|x-x^3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}$

また　$t=\sqrt{2}\,x-\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}=\frac{x+x^3}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$dt=\frac{1+3x^2}{\sqrt{2}}dx$



よって　$V=2\pi\int_0^1\left(\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1+3x^2}{\sqrt{2}}dx$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1(x^6-2x^4+x^2)(3x^2+1)dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1(3x^8-5x^6+x^4+x^2)dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^9}{3}-\frac{5}{7}x^7+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{16}{105}=\frac{8\sqrt{2}}{105}\pi$$

t	$0\longrightarrow\sqrt{2}$
x	$0\longrightarrow 1$

9

解答　(1)　$(2\cos t+\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t)$　　(2)　$\frac{16}{3}$

解説

(1)　A $(3,\ 0)$，T $(3\cos t,\ 3\sin t)$ とする。

D と C が T で接しているとき，D の中心 Q の座標は $(2\cos t,\ 2\sin t)$ である。

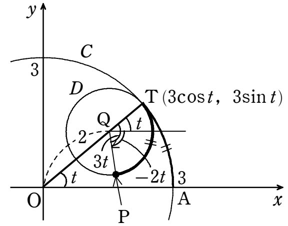
また，$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\overset{\frown}{\mathrm{TA}}=3t$ であるから，x 軸の正の方向から半直線 QP への角は　$t-3t=-2t$

よって，O を原点とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$

$=(2\cos t,\ 2\sin t)+(\cos(-2t),\ \sin(-2t))$

$=(2\cos t+\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t)$



(2)　$x'(t)=-2\sin t-2\sin 2t$，$y'(t)=2\cos t-2\cos 2t$ から

$$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=4(\sin^2 t+2\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)$$

$$+4(\cos^2 t-2\cos t\cos 2t+\cos^2 2t)$$
$$=4(2-2\cos 3t)=8(1-\cos 3t)=16\sin^2\frac{3}{2}t$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ であるから　　$\sin\dfrac{3}{2}t\geqq 0$

よって，求める曲線の長さは

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{16\sin^2\frac{3}{2}t}\,dt=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}4\sin\frac{3}{2}t\,dt=4\cdot\frac{2}{3}\left[-\cos\frac{3}{2}t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{16}{3}$$

$\boxed{10}$

解答　$6\pi-8\sqrt{2}$

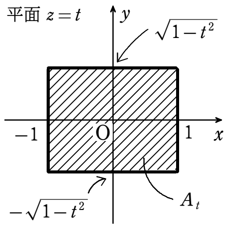
解説

A を平面 $z=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの断面を A_t とする。

$y^2+z^2\leqq 1$ に $z=t$ を代入して，変形すると

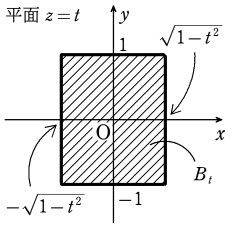
$$-\sqrt{1-t^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-t^2}$$

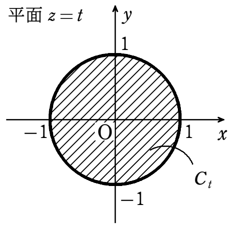
よって，A_t は右の図の斜線部分のようになる。



同様に，B，C を平面 $z=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの断面をそれぞれ B_t，C_t とする。

B_t，C_t は，それぞれ次の図の斜線部分のようになる。





和集合 $A\cup B\cup C$ を平面 $z=t$ で切ったときの断面は，$A_t\cup B_t\cup C_t$ である。

$A\cup B\cup C$ と平面 $z=t$ が共有点をもつとき

$$-1\leqq t\leqq 1$$

また，$A\cup B\cup C$ は，平面 $z=0$ に関して対称であるから，求める体積を V とすると，V は $A\cup B\cup C$ の $z\geqq 0$ の部分の体積の 2 倍である。

よって，$A\cup B\cup C$ を平面 $z=t$ で切ったときの断面積を $S(t)$ とおくと

$$V=\int_{-1}^1 S(t)\,dt=2\int_0^1 S(t)\,dt\quad\cdots\cdots ①$$

そこで，$0\leqq t\leqq 1$ において，$S(t)$ を求める。

C_t が $A_t\cup B_t$ に含まれるとき，領域 $A_t\cap B_t$ の表す正方形の頂点 $(\sqrt{1-t^2},\ \sqrt{1-t^2})$，円 $x^2+y^2=1$ の周または外部の点であるから

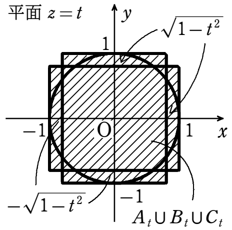
$$(\sqrt{1-t^2})^2+(\sqrt{1-t^2})^2\geqq 1$$

すなわち　　$2t^2\leqq 1$

$0\leqq t\leqq 1$ において，これを解くと　　$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[1]　$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

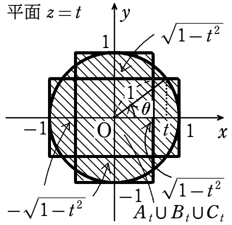
このとき，$A_t\cup B_t\cup C_t$ は右の図の斜線部分のようになり



$$S(t)=2^2-4(1-\sqrt{1-t^2})^2$$
$$=8\sqrt{1-t^2}-4(1-t^2)$$

[2]　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1$ のとき

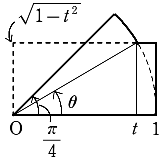
このとき，$A_t\cup B_t\cup C_t$ は右の図の斜線部分のようになる。



ここで，角 θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ を図のようにとると

$$\cos\theta=t,\quad \sin\theta=\sqrt{1-t^2}\quad\cdots\cdots ②$$

$A_t\cup B_t\cup C_t$ は，x 軸，y 軸，直線 $y=x$ に関して対称であるから，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$y\leqq x$ の部分の面積を求めると



$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\frac{1}{2}\cdot t\cdot\sqrt{1-t^2}+(1-t)\cdot\sqrt{1-t^2}$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2}+\sqrt{1-t^2}-\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}$$

よって　　$S(t)=8\left\{\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\theta}{2}+\sqrt{1-t^2}-\dfrac{t}{2}\sqrt{1-t^2}\right\}$

$$=\pi-4\theta+8\sqrt{1-t^2}-4t\sqrt{1-t^2}$$

[1]，[2] から

$$\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{8\sqrt{1-t^2}-4(1-t^2)\}\,dt$$
$$+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(\pi-4\theta+8\sqrt{1-t^2}-4t\sqrt{1-t^2})\,dt$$

$$=8\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt-4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-t^2)\,dt-4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$$
$$-4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\theta\,dt+\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad\cdots\cdots ③$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$ の値は，半径 1 の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ 倍と等しいから

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$$

また　　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-t^2)\,dt=\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$，

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\sqrt{1-t^2}\cdot(1-t^2)'\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

さらに，$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\theta\,dt$ について，② より，$t=\cos\theta$ であるから

t	$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \to\ 1$
θ	$\frac{\pi}{4}\ \to\ 0$

$$dt=-\sin\theta\,d\theta$$

よって　　$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\theta\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\theta\cdot(-\sin\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\sin\theta\,d\theta$

$$=\Big[-\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,d\theta=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ゆえに，③ から

$$\int_0^1 S(t)\,dt=8\cdot\frac{\pi}{4}-4\cdot\frac{5\sqrt{2}}{12}-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}-4\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=3\pi-4\sqrt{2}$$

したがって，① から　　$V=2\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt=6\pi-8\sqrt{2}$

1

解答　$t=0$ のとき最大値 $\frac{\pi}{2}-1$，$t=\frac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$

解説

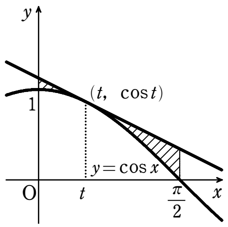
$y=\cos x$ から　$y'=-\sin x$

点 $(t,\ \cos t)$ における接線の方程式は

$y=(-\sin t)(x-t)+\cos t$

すなわち　$y=(-\sin t)x+t\sin t+\cos t$

$S(t)$ は右の図の斜線部分の面積であるから



$$S(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(-\sin t)x+t\sin t+\cos t-\cos x\}dx$$

$$=\left[-\frac{\sin t}{2}x^2+(t\sin t+\cos t)x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\sin t}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}+(t\sin t+\cos t)\cdot\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi}{2}\cos t+\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi^2}{8}\right)\sin t-1$$

$$S'(t)=-\frac{\pi}{2}\sin t+\frac{\pi}{2}\sin t+\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi^2}{8}\right)\cos t=\frac{\pi}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\cos t$$

よって，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{\pi}{2}-1$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$	↗	$\frac{\pi^2}{8}-1$

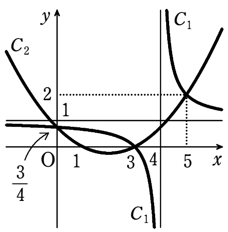
$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)=\frac{\pi}{8}(4-\pi)>0$ であるから　$\frac{\pi}{2}-1>\frac{\pi^2}{8}-1$

よって，$S(t)$ は $t=0$ のとき最大値 $\frac{\pi}{2}-1$，$t=\frac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$ をとる。

2

解答　(1)　$\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$，$(3,\ 0)$，$(5,\ 2)$

(2)　〔図〕，面積は $3-2\log 2$



解説

(1)　$y=\frac{x-3}{x-4}$ と $y=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)$ の2式から y を消去して

$$\frac{x-3}{x-4}=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)$$

分母を払って　$4(x-3)=(x-1)(x-3)(x-4)$

整理すると　$(x-3)\{(x-1)(x-4)-4\}=0$　　すなわち　$x(x-3)(x-5)=0$

よって　$x=0,\ 3,\ 5$

これらは，$x\neq 4$ を満たす。

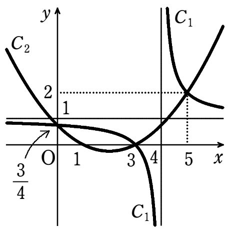
$x=0$ のとき　$y=\frac{3}{4}$，　$x=3$ のとき　$y=0$，

$x=5$ のとき　$y=2$

したがって，2曲線 C_1，C_2 の交点の座標は　$\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$，$(3,\ 0)$，$(5,\ 2)$

(2)　$\frac{x-3}{x-4}=\frac{1}{x-4}+1$ であるから，2曲線 C_1，C_2 の概形は，右の図のようになる。

よって，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると



$$S=\int_0^3\left\{\left(\frac{1}{x-4}+1\right)-\frac{1}{4}(x-1)(x-3)\right\}dx$$

$$=\int_0^3\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\left[\log|x-4|-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^3$$

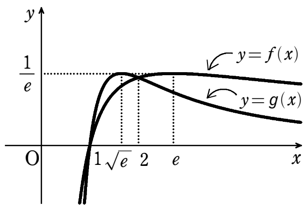
$$=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}+\frac{3}{4}-\log 4$$

$$=3-2\log 2$$

3

解答　(1)　$(1,\ 0)$，$\left(2,\ \frac{1}{2}\log 2\right)$　　(2)　〔図〕

(3)　$-2\log 2-(\log 2)^2+\frac{4}{e}+\frac{1}{2}$



解説

(1)　$f(x)=g(x)$ とすると　$\frac{\log x}{x}=\frac{2\log x}{x^2}$

分母を払って整理すると　$(x-2)\log x=0$

これを解くと　$x=1,\ 2$　　これらは，$x>0$ を満たす。

よって，2曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標は　$(1,\ 0)$，$\left(2,\ \frac{1}{2}\log 2\right)$

(2)　$f(x)=\frac{\log x}{x}$ から　$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=e$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

ゆえに，$f(x)$ は $x=e$ で極大値 $\frac{1}{e}$ をとる。

また，$g(x)=\frac{2\log x}{x^2}$ から　$g'(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x^2-(2\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2(1-2\log x)}{x^3}$

$g'(x)=0$ とすると　$x=\sqrt{e}$

よって，$x>0$ における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

ゆえに，$g(x)$ は $x=\sqrt{e}$ で極大値 $\frac{1}{e}$ をとる。

ここで　$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，　$\lim_{x\to+0}g(x)=-\infty$，

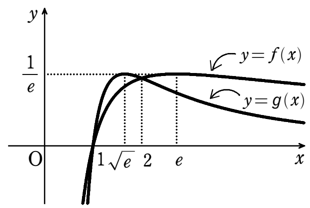
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2\log x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x^2}{x^2}=0$$

また，$e=2.718\cdots\cdots$ であるから

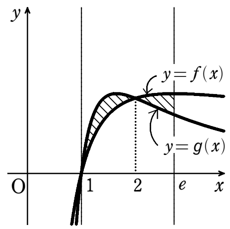
$1<\sqrt{e}<2<e$

以上から，$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。



(3)　求める面積を S とすると，S は右の図の斜線部分の面積である。

よって



$$S=\int_1^2\{g(x)-f(x)\}dx+\int_2^e\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{2\log x}{x^2}-\frac{\log x}{x}\right)dx-\int_2^e\left(\frac{2\log x}{x^2}-\frac{\log x}{x}\right)dx$$

ここで　$\int\frac{2\log x}{x^2}dx=\int\left(-\frac{2}{x}\right)'\log x\,dx$

$$=-\frac{2}{x}\log x-\int\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{2(\log x+1)}{x}+C,$$

$\int\frac{\log x}{x}dx=\int\log x\cdot(\log x)'dx$

$$=\frac{(\log x)^2}{2}+C$$　（C は積分定数）

よって　$S=\left[-\frac{2(\log x+1)}{x}-\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^2-\left[-\frac{2(\log x+1)}{x}-\frac{(\log x)^2}{2}\right]_2^e$

$$=-2\left\{(\log 2+1)+\frac{(\log 2)^2}{2}\right\}+2+\frac{2(\log e+1)}{e}+\frac{(\log e)^2}{2}$$

$$=-2\log 2-(\log 2)^2+\frac{4}{e}+\frac{1}{2}$$

4

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$\frac{5}{4}e+\frac{1}{4e}-2$

解説

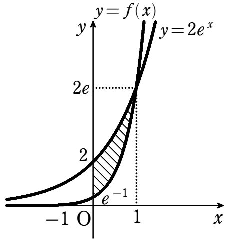
(1)　$f(x)-2e^x=(x+1)e^{2x-1}-2e^x=e^{2x-1}(x+1-2e^{-x+1})$

すべての実数 x で $e^{2x-1}>0$ が成り立つことから $x+1-2e^{-x+1}$ のみを考える。

$g(x)=x+1-2e^{-x+1}$ とおくと $g'(x)=1+2e^{-x+1}>0$ より，$g(x)$ は単調増加関数である。したがって，$x>1$ のとき $g(x)>g(1)=0$ であるから $f(x)>2e^x$ が成り立つ。

(2)　(1) から $x<1$ のとき $g(x)<g(1)=0$ であるから $f(x)<2e^x$ が成り立つ。

(3)　求める面積を S とすると，(1)，(2) より S は右図斜線部の面積であるから



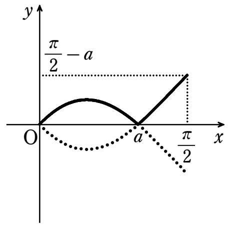
$$S=\int_0^1\{2e^x-f(x)\}dx=\int_0^1\{2e^x-(x+1)e^{2x-1}\}dx$$
$$=\Big[2e^x\Big]_0^1-\int_0^1(x+1)\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x-1}\right)'dx$$
$$=2(e-1)-\left[\frac{1}{2}(x+1)e^{2x-1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x-1}dx$$
$$=2(e-1)-\left(e-\frac{1}{2e}\right)+\left[\frac{1}{4}e^{2x-1}\right]_0^1=\frac{5}{4}e+\frac{1}{4e}-2$$

5

解答　(1)　$S=1+a-2\sin a$　　(2)　$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$

解説

(1)　$f(x)=\begin{cases}-(x-a)\sin x & (0\leqq x\leqq a)\\ (x-a)\sin x & \left(a\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$



$$S=-\int_0^a(x-a)\sin x\,dx+\int_a^{\frac{\pi}{2}}(x-a)\sin x\,dx$$

ここで　$\int(x-a)\sin x\,dx$

$$=-(x-a)\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-(x-a)\cos x+\sin x+C\ (C\text{ は積分定数})$$

よって　$S=\Big[(x-a)\cos x-\sin x\Big]_0^a+\Big[-(x-a)\cos x+\sin x\Big]_a^{\frac{\pi}{2}}$

$$=(-\sin a+a)+(1-\sin a)=1+a-2\sin a$$

(2)　$\frac{dS}{da}=-2\cos a+1$

$\frac{dS}{da}=0$ とすると　$\cos a=\frac{1}{2}$　$\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

よって　$a=\frac{\pi}{3}$

a	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{da}$		−	0	+	
S		↘	極小	↗	

増減表より，$a=\frac{\pi}{3}$ のとき S は極小かつ最小で最小値は

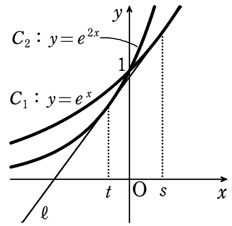
$$S=1+\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$$

6

解答　$\frac{3}{16}e-\frac{1}{2}$

解説

C_1，C_2 と ℓ との接点の座標を，それぞれ $(s,\ e^s)$，$(t,\ e^{2t})$ とする。



このとき，ℓ の方程式は

　C_1 について　$y=e^s(x-s)+e^s$

　C_2 について　$y=2e^{2t}(x-t)+e^{2t}$

この 2 つが同じ直線を表すから

$$e^s=2e^{2t}\quad\cdots\cdots ①$$
$$e^s(1-s)=e^{2t}(1-2t)\quad\cdots\cdots ②$$

① から　$s=\log 2+2t$　…… ③

① を用いて ② を変形すると　$2(1-s)=1-2t$　…… ④

③，④ を解いて　$s=1-\log 2=\log\frac{e}{2}$，$t=\frac{1}{2}-\log 2=\log\frac{\sqrt{e}}{2}$

よって，ℓ の方程式は　$y=\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}\log 2$

求める面積は

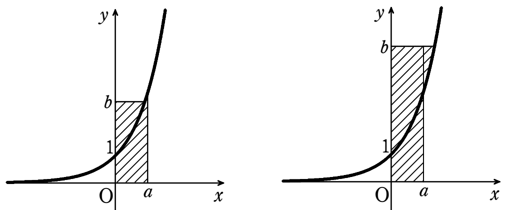
$$\int_t^0 e^{2x}dx+\int_0^s e^x dx-\int_t^s\left(\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}\log 2\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_t^0+\Big[e^x\Big]_0^s-\frac{e}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\log 2\right]_t^s$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{e}{4}\right)+\left(\frac{e}{2}-1\right)-\frac{e}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{(\log 2)^2}{2}-\frac{1}{8}+\frac{(\log 2)^2}{2}\right\}$$
$$=\frac{3}{16}e-\frac{1}{2}$$

7

解答　(1)　$S=e^a+b\log b-b$　　(2)　$b\leqq e^a$ のとき〔図〕　$b=e^a$ のときは長方形，$b>e^a$ のとき〔図〕

(3)　$S\geqq ab$，等号は $b=e^a$ のとき

(2)



〔$b\leqq e^a$〕　〔$b>e^a$〕

解説

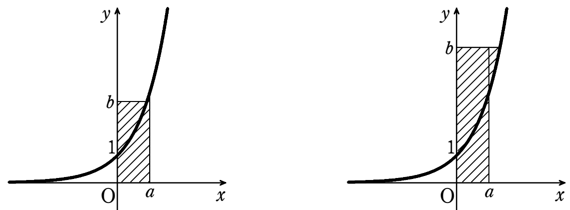
(1)　$\int_0^a e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^a=e^a-1$，　$\int_1^b\log y\,dy=\Big[y\log y-y\Big]_1^b=b\log b-b+1$

　ゆえに　$S=e^a+b\log b-b$　答

(2)　$b\leqq e^a$ のとき〔図〕，

　$b=e^a$ のときは点 $(\log b,b),(a,e^a)$ が一致し，斜線の部分は長方形になる。

　$b>e^a$ のとき〔図〕



〔$b\leqq e^a$〕　〔$b>e^a$〕

(3)　(2) で求めたグラフから　$S\geqq ab$

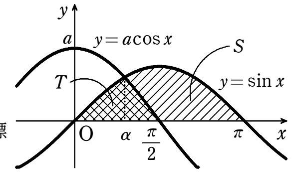
　等号は $b=e^a$ のとき成り立つ.

8

解答　$a=\frac{4}{3}$

解説

右の図から



$$S=\int_0^\pi\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=2$$

また，$0<x<\frac{\pi}{2}$ において，曲線 $y=\sin x$ と曲線 $y=a\cos x$ は 1 点で交わるから，その交点の x 座標を α とすると　$T=\int_0^\alpha\sin x\,dx+\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx$

$$=\Big[-\cos x\Big]_0^\alpha+\Big[a\sin x\Big]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\cos\alpha+1+a-a\sin\alpha$$

ここで，交点の y 座標について　$\sin\alpha=a\cos\alpha$

すなわち　$\tan\alpha=a$

$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$ であるから　$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$，$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

よって　$T=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+1+a-a\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=a+1-\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}$

$$=a+1-\sqrt{a^2+1}$$

$S:T=3:1$ より，$T=\frac{1}{3}S=\frac{2}{3}$ であるから　$a+1-\sqrt{a^2+1}=\frac{2}{3}$

すなわち　$a+\frac{1}{3}=\sqrt{a^2+1}$　…… ①

$a>0$ より，$a+\frac{1}{3}>0$ であるから

$$① \iff \left(a+\frac{1}{3}\right)^2=a^2+1 \iff a=\frac{4}{3}$$

したがって，求める a の値は　$a=\frac{4}{3}$

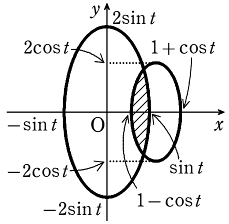
9

解答　$S(t)=\pi\sin^2 t+2t\cos 2t-\sin 2t$

解説

$x^2+\frac{y^2}{4}=\sin^2 t$ ……①,

$(x-1)^2+\frac{y^2}{4}=\cos^2 t$ ……② とおく。



①−②から　$2x-1=\sin^2 t-(1-\sin^2 t)$

ゆえに　$x=\sin^2 t$ ……③

①から　$y^2=4(\sin^2 t-x^2)$

これに③を代入して

$y^2=4(\sin^2 t-\sin^4 t)=4\sin^2 t\cos^2 t=\sin^2 2t$

よって，楕円①，②の交点の座標は　$(\sin^2 t,\ \pm\sin 2t)$

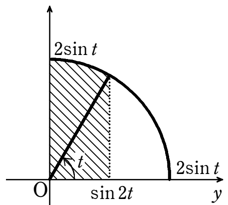
また，①から　$x^2=\frac{1}{4}(4\sin^2 t-y^2)$　　ゆえに　$x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2 t-y^2}$

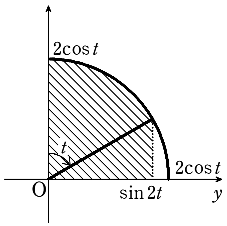
②から　$(x-1)^2=\frac{1}{4}(4\cos^2 t-y^2)$　　ゆえに　$x=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\cos^2 t-y^2}$

よって　$S(t)=\int_{-\sin 2t}^{\sin 2t}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2 t-y^2}-\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{4\cos^2 t-y^2}\right)\right\}dy$

$=\int_0^{\sin 2t}\sqrt{4\sin^2 t-y^2}\,dy+\int_0^{\sin 2t}\sqrt{4\cos^2 t-y^2}\,dy-2\Big[y\Big]_0^{\sin 2t}$

$\int_0^{\sin 2t}\sqrt{4\sin^2 t-y^2}\,dy$　　　$\int_0^{\sin 2t}\sqrt{4\cos^2 t-y^2}\,dy$





上の図から

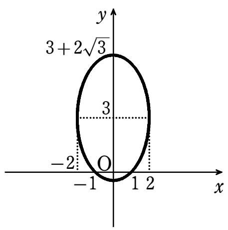
$S(t)=\frac{1}{2}(2\sin t)^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\frac{1}{2}\sin 2t(2\sin^2 t)+\frac{1}{2}(2\cos t)^2 t+\frac{1}{2}\sin 2t(2\cos^2 t)-2\sin 2t$

$=\pi\sin^2 t+2t(\cos^2 t-\sin^2 t)+\sin 2t(\sin^2 t+\cos^2 t)-2\sin 2t$

$=\pi\sin^2 t+2t\cos 2t-\sin 2t$

10

解答　(1)　$\frac{x^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{12}=1$，［図］　(2)　$3+\frac{10\sqrt{3}}{3}\pi$



解説

(1)　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおくと

$r^2=x^2+y^2$

よって　$2x^2+(x^2+y^2)-6y=3$

ゆえに　$3x^2+(y-3)^2=12$ ……①

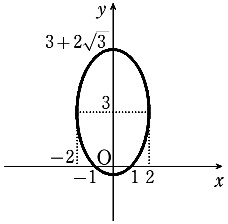
すなわち　$\frac{x^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{3}^2)}=1$

したがって，そのグラフは，楕円

$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2}=1$

を y 軸方向に3だけ平行移動したものである．

よって，グラフは右図のようになる．



(2)　①において，$y=0$ とすると

$x=\pm1$

また，①から，$y=3\pm\sqrt{12-3x^2}$

ゆえに，求める面積を S とすると

$S=2\left\{\int_0^2(3+\sqrt{12-3x^2})dx-\int_1^2(3-\sqrt{12-3x^2})dx\right\}$

$=2\Big[3x\Big]_0^2+2\sqrt{3}\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx-2\Big[3x\Big]_1^2+2\sqrt{3}\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

ここで $y=\sqrt{4-x^2}$ は原点Oを中心とする半径2の円周の上半分であるから

$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\pi\cdot2^2\times\frac{1}{4}=\pi$

$\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$S=12+2\sqrt{3}\pi-6+\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi-3=3+\frac{10\sqrt{3}}{3}\pi$

別解　(2)　楕円①の面積は　$2\cdot2\sqrt{3}\pi=4\sqrt{3}\pi$

よって，求める面積 S は

$S=4\sqrt{3}\pi-2\int_0^1\{-(3-\sqrt{12-3x^2})\}dx=4\sqrt{3}\pi+6\Big[x\Big]_0^1-2\sqrt{3}\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$

$=4\sqrt{3}\pi+6-2\sqrt{3}\left\{\pi-\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=3+\frac{10\sqrt{3}\pi}{3}$

別解　(2)　$x=2\cos\theta$ とおいて，置換積分．

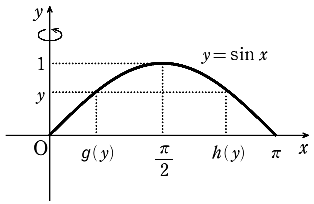
11

解答　証明略，$2\pi^2$

解説

$y=\sin x$ の $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分を $x=g(y)$，

$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ の部分を $x=h(y)$ とすると



$V=\pi\int_0^1\{h(y)\}^2dy-\pi\int_0^1\{g(y)\}^2dy$

ここで，$dy=\cos x\,dx$ であり，$h(0)=\pi$，

$h(1)=\frac{\pi}{2}$，$g(0)=0$，$g(1)=\frac{\pi}{2}$ であるから

$V=\pi\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx=-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x^2\cos x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$

$=-\pi\int_0^\pi x^2\cos x\,dx=-\pi\Big[x^2\sin x\Big]_0^\pi+\pi\int_0^\pi 2x\sin x\,dx=2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx$

したがって，$V=2\pi\int_0^\pi xf(x)\,dx$ が成り立つ。

また　$V=2\pi\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi+2\pi\int_0^\pi\cos x\,dx=2\pi(\pi-0)+2\pi\times0=2\pi^2$

別解　$\varDelta x>0$ のとき，区間 $[x,\ x+\varDelta x]$ の範囲で曲線 $y=f(x)$ と x 軸に挟まれた部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積を $\varDelta V$ とする。

区間 $[x,\ x+\varDelta x]$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とすると

$\pi\{(x+\varDelta x)^2-x^2\}m\leqq\varDelta V\leqq\pi\{(x+\varDelta x)^2-x^2\}M$

$\pi\{2x\varDelta x+(\varDelta x)^2\}m\leqq\varDelta V\leqq\pi\{2x\varDelta x+(\varDelta x)^2\}M$

よって　$\pi(2x+\varDelta x)m\leqq\frac{\varDelta V}{\varDelta x}\leqq\pi(2x+\varDelta x)M$

$\varDelta x\to+0$ のとき $m\to f(x)$，$M\to f(x)$ であるから　$\lim_{\varDelta x\to+0}\frac{\varDelta V}{\varDelta x}=2\pi xf(x)$

$\varDelta x<0$ のときも同様で　$\lim_{\varDelta x\to-0}\frac{\varDelta V}{\varDelta x}=2\pi xf(x)$

$\frac{dV}{dx}=2\pi xf(x)$

$0\leqq x\leqq\pi$ より　$V=2\pi\int_0^\pi xf(x)\,dx$

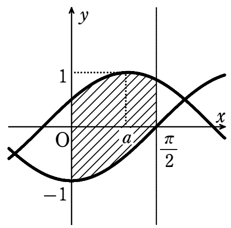
12

解答　(1)　$S=\sin a+\cos a+1$　(2)　$a=\frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}+1$

(3)　$V=\frac{\pi}{4}(2\sin a+\sin 2a+\pi)$

解説

(1)　2曲線の概形は右の図のようになる。



よって　$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(x-a)-(-\cos x)\}dx$

$=\Big[\sin(x-a)+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+1-\sin(-a)$

$=\sin a+\cos a+1$

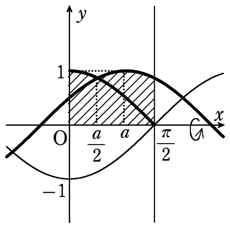
(2)　(1)より　$S=\sin a+\cos a+1=\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)+1$

$0\leqq a<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\frac{\pi}{4}\leqq a+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$

したがって，S は $a+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $a=\frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}+1$ をとる。

(3) 曲線 $y=-\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を x 軸に関して折り返すと，右の図のようになる。

曲線 $y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y=\cos(x-a)$ は $x=\frac{a}{2}$ で交わる。



したがって $V=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\cos^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x-a)\,dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx+\pi\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2x-2a)}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{a}{2}}+\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin(2x-2a)\right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}(2\sin a+\sin 2a+\pi)$$

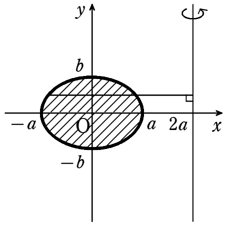
13

解答 $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2$

解説

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を x について解くと

$$x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$



ここで，$x_1=-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$，$x_2=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$

とおく。

囲まれた図形は，x 軸に関して対称であるから，

求める体積 V は

$$V=2\pi\int_0^b\{(2a-x_1)^2-(2a-x_2)^2\}dy$$

$$=8a\pi\int_0^b(x_2-x_1)dy=16a^2\pi\int_0^b\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

ここで，$y=b\sin\theta$ とおくと　$dy=b\cos\theta\,d\theta$

よって

y	$0\longrightarrow b$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$V=16a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot b\cos\theta\,d\theta=16a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=8a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta=8a^2b\pi\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4a^2b\pi^2$$

また，$a^2+b^2=1$ から　$a^2=1-b^2$　……①

$a>0$ であるから　$1-b^2>0$　　これと $b>0$ であるから　$0<b<1$

V の式に ① を代入すると　$V=4(1-b^2)b\pi^2=4\pi^2(-b^3+b)$

ゆえに　$V'=4\pi^2(-3b^2+1)$

$V'=0$ とすると　$-3b^2+1=0$

$0<b<1$ であるから　$b=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0<b<1$ における V の増減表は右のようになり，

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

$b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，V は極大かつ最大となる。

$b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，① と $a>0$ から　$a=\sqrt{\frac{2}{3}}$

したがって V の最大値は　$4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\pi^2=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2$

14

解答 $\frac{13}{48}\pi^4-\frac{1}{8}\pi^2$

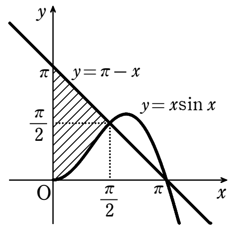
解説

$f(x)=x\sin x$ から　$f'(x)=\sin x+x\cos x$

ゆえに　$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$　よって，点 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ における

$y=f(x)$ の法線の方程式は　$y=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}$

すなわち　$y=\pi-x$



したがって，求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\pi^2\cdot\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 x\,dx$$

$$=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{1}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(1-\cos2x)dx$$

$$=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{1}{2}\pi\left[x^2\left(x-\frac{1}{2}\sin2x\right)-2x\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\cos2x\right)+2\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{8}\sin2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{1}{2}\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\sin2x-\frac{1}{2}x\cos2x+\frac{1}{4}\sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{24}\pi^3+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{13}{48}\pi^4-\frac{1}{8}\pi^2$$

15

解答 $\frac{\pi}{12}(3e^2-19)$

解説

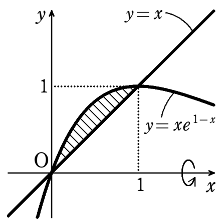
$xe^{1-x}=x$ とすると　$x(e^{1-x}-1)=0$

ゆえに　$x=0$，$e^{1-x}-1=0$　　$e^{1-x}-1=0$ から　$x=1$

よって，曲線 $y=xe^{1-x}$ と直線 $y=x$ の交点の x 座標は　$x=0$，1

$0\leqq x\leqq1$ のとき　$xe^{1-x}\geqq x$

したがって，右の図から，求める体積を V とすると



$$V=\pi\int_0^1(xe^{1-x})^2dx-\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot1$$

$$=\pi e^2\int_0^1x^2e^{-2x}dx-\frac{\pi}{3}$$

ここで　$\int_0^1x^2e^{-2x}dx=\left[-\frac{x^2e^{-2x}}{2}\right]_0^1+\int_0^1xe^{-2x}dx$

$$=-\frac{e^{-2}}{2}+\left[-\frac{xe^{-2x}}{2}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1e^{-2x}dx$$

$$=-\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^{-2}}{2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1=-e^{-2}-\frac{1}{4}(e^{-2}-1)=\frac{1}{4}(1-5e^{-2})$$

よって　$V=\frac{\pi e^2}{4}(1-5e^{-2})-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}(3e^2-19)$

16

解答 (1) $p=-a$　(2) $\left(a+\frac{1-e^a}{1+e^a}\right)\pi$

解説

(1) $y=\frac{e^x}{1+e^x}=1-\frac{1}{1+e^x}$ であるから　$y'=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

よって，C 上の点 P における接線と，点 A における接線が平行となるとき

$$\frac{e^p}{(1+e^p)^2}=\frac{e^a}{(1+e^a)^2}$$

分母を払って整理すると　$e^p-e^a+e^{p+a}(e^a-e^p)=0$

よって　$(e^p-e^a)(1-e^{p+a})=0$

点 P は点 A と異なるから，$p\neq a$ であり　$e^p\neq e^a$

したがって　$e^{p+a}=1$　　ゆえに　$p=-a$

(2) $a>0$ であるから　$p=-a<0$

よって，求める体積を V とすると　$V=\pi\int_{-a}^a\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2dx$

$1+e^x=t$ とおくと　$e^xdx=dt$

すなわち　$dx=\frac{1}{t-1}dt$

x	$-a\longrightarrow a$
t	$1+e^{-a}\longrightarrow1+e^a$

$1+e^{-a}=\alpha$，$1+e^a=\beta$ とおくと

$$V=\pi\int_\alpha^\beta\left(\frac{t-1}{t}\right)^2\cdot\frac{1}{t-1}dt=\pi\int_\alpha^\beta\frac{t-1}{t^2}dt=\pi\int_\alpha^\beta\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\pi\left[\log|t|+\frac{1}{t}\right]_\alpha^\beta=\left(\log\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)\pi$$

したがって　$V=\left(\log\frac{1+e^a}{1+e^{-a}}+\frac{1}{1+e^a}-\frac{1}{1+e^{-a}}\right)\pi$

$$=\left\{\log\frac{e^a(1+e^a)}{e^a+1}+\frac{1}{1+e^a}-\frac{e^a}{e^a+1}\right\}\pi$$

$$=\left(\log e^a+\frac{1-e^a}{1+e^a}\right)\pi=\left(a+\frac{1-e^a}{1+e^a}\right)\pi$$

17

解答 $\sqrt{2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

解説

$\frac{dx}{dt}=e^{-t}(-\cos t-\sin t)$，$\frac{dy}{dt}=e^{-t}(-\sin t+\cos t)$

よって　$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(e^{-t})^2\{(\cos t+\sin t)^2+(\cos t-\sin t)^2\}$

$$=(e^{-t})^2\cdot2(\cos^2t+\sin^2t)=2(e^{-t})^2$$

ゆえに　$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(e^{-t})^2}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t}dt=\sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\sqrt{2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

$\boxed{18}$

解答　$y=-\dfrac{1}{2}e^{2x}-\dfrac{1}{8}e^{-2x}+\dfrac{13}{8}$ $(x\geqq 0)$

解説

[2] から　$\int_0^x\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=e^{2x}+f(x)-2$

両辺を x で微分すると　$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=2e^{2x}+f'(x)$

両辺を平方すると　$1+\{f'(x)\}^2=4e^{4x}+4e^{2x}f'(x)+\{f'(x)\}^2$

よって　$f'(x)=-e^{2x}+\dfrac{1}{4}e^{-2x}$

ゆえに　$f(x)=\int\left(-e^{2x}+\dfrac{1}{4}e^{-2x}\right)dx=-\dfrac{1}{2}e^{2x}-\dfrac{1}{8}e^{-2x}+C$ （C は積分定数）

また，[1] から　$f(0)=1$

よって　$1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}+C$　　ゆえに　$C=\dfrac{13}{8}$

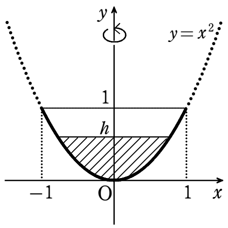
したがって，求める方程式 $y=f(x)$ は　$y=-\dfrac{1}{2}e^{2x}-\dfrac{1}{8}e^{-2x}+\dfrac{13}{8}$ $(x\geqq 0)$

$\boxed{19}$

解答　(1) $-\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}$　　(2) $\dfrac{2}{3}\pi$

解説

(1) 水の深さが h であるときの水の体積を $V(h)$ とすると　$V(h)=\pi\int_0^h\sqrt{y}^{\,2}dy=\pi\int_0^h y\,dy$



ゆえに　$\dfrac{dV}{dh}=\pi h$

よって　$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}=\pi h\dfrac{dh}{dt}$

題意から　$\pi h\dfrac{dh}{dt}=-\sqrt{h}$

したがって　$\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}$

(2) (1) より $\dfrac{dt}{dh}=-\pi\sqrt{h}$ であるから

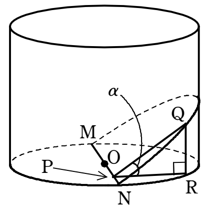
$$T=\int_1^0(-\pi\sqrt{h})dh=\pi\int_0^1\sqrt{h}\,dh=\pi\left[\frac{2}{3}h\sqrt{h}\right]_0^1=\frac{2}{3}\pi$$

$\boxed{20}$

解答　(1) $\dfrac{2}{3}\tan\alpha$　　(2) $\dfrac{\pi}{2\cos\alpha}$

解説

(1) 右の図のように，底面の中心を O とし，直径 MN を含み底面と角 α をなす平面で円柱を切るとする。



$0\leqq x\leqq 1$ として，線分 ON 上に OP$=x$ を満たす点 P をとる。

点 P を通り，線分 MN に垂直な平面で小さい方の立体を切った切り口は直角三角形であるから，右の図のように，それを △PQR とする。

$$\mathrm{PR}=\sqrt{\mathrm{OR}^2-\mathrm{OP}^2}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\mathrm{QR}=\mathrm{PR}\tan\alpha=\sqrt{1-x^2}\tan\alpha$$

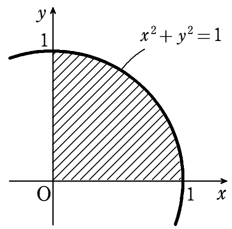
であるから，△PQR の面積は　$\dfrac{1}{2}(\sqrt{1-x^2})^2\tan\alpha=\dfrac{1}{2}(1-x^2)\tan\alpha$

よって，求める体積 V は，対称性を考えて

$$V=2\int_0^1\frac{1}{2}(1-x^2)\tan\alpha\,dx=\tan\alpha\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}\tan\alpha$$

(2) $\mathrm{PQ}=\dfrac{\mathrm{PR}}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\cos\alpha}$ であるから，求める面積 A は対称性を考えて

$$A=2\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos\alpha}dx=\frac{2}{\cos\alpha}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$



ここで，$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積を表すから　$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\dfrac{\pi}{4}$

よって　$A=\dfrac{2}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2\cos\alpha}$

参考　水平面と角 α をなす平面上に図形 F があり，その面積を S とする。
図形 F 上の点から水平面に下ろした垂線の足が水平面上に描く図形 F' を，図形 F の水平面への正射影といい，F' の面積 S' について　$S'=S\cos\alpha$　が成り立つ。
このことを利用すると，A は次のように求められる。
切り口の底面への正射影は，底面の半分の半円であるから

$A\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2$　　よって　$A=\dfrac{\pi}{2\cos\alpha}$

$\boxed{21}$

解答　(1) $S(t)=\begin{cases}-\pi\log t & \left(\dfrac{1}{e}\leqq t\leqq 1\right)\\ \pi & \left(0\leqq t<\dfrac{1}{e}\right)\end{cases}$　　(2) $\pi\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

解説

(1) $e^{-(x^2+y^2)}\geqq t>0 \iff x^2+y^2\leqq\log\dfrac{1}{t}$ であるから

[1] $\sqrt{\log\dfrac{1}{t}}\leqq 1$　すなわち　$\dfrac{1}{e}\leqq t\leqq 1$ のとき

M の切り口は半径 $\sqrt{\log\dfrac{1}{t}}$ の円であるから

$S(t)=\pi\left(\sqrt{\log\dfrac{1}{t}}\right)^2=-\pi\log t$

[2] $\sqrt{\log\dfrac{1}{t}}>1$　すなわち　$0<t<\dfrac{1}{e}$ のとき，および $t=0$ のとき

M の切り口は半径 1 の円であるから　$S(t)=\pi$

[1]，[2] から

$$S(t)=\begin{cases}-\pi\log t & \left(\dfrac{1}{e}\leqq t\leqq 1\right)\\ \pi & \left(0\leqq t<\dfrac{1}{e}\right)\end{cases}$$

(2) M の体積を V とすると

$$V=\int_0^{\frac{1}{e}}\pi\,dt+\int_{\frac{1}{e}}^1(-\pi\log t)dt$$

$$=\frac{\pi}{e}-\pi\Big[t\log t-t\Big]_{\frac{1}{e}}^1=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

1

解答　(1)　略

(2)　$S_1=\left(\frac{t}{2}+1\right)\log(t+1)-t$

$S_2=\left(\frac{a}{2}+1\right)\log(a+1)-\left(\frac{t}{2}+1\right)\log(t+1)$

$-a+t-\frac{a}{2}\log(t+1)+\frac{t}{2}\log(a+1)$

(3)　$t=\frac{a}{\log(a+1)}-1$

解説

(1)　$f(x)=\log(x+1)-\frac{x}{x+1}$ とおくと

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$

$x>0$ のとき $f'(x)>0$ であるから，$x>0$ において $f(x)$ は単調に増加する。

また，$\lim_{x\to+0}f(x)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)>0$

よって　$\frac{x}{x+1}<\log(x+1)$　……①

$g(x)=x-\log(x+1)$ とおくと　$g'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

$x>0$ のとき $g'(x)>0$ であるから，$x>0$ において $g(x)$ は単調に増加する。

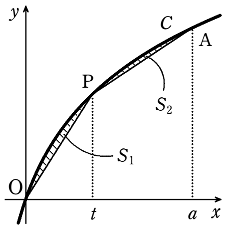
また，$\lim_{x\to+0}g(x)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$g(x)>0$

よって　$\log(x+1)<x$　……②

①，②から，$x>0$ のとき　$\frac{x}{x+1}<\log(x+1)<x$

(2)　$\{\log(x+1)\}''=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$ であるから，曲線 C は上に凸である。

よって，曲線 C は $0\leqq x\leqq t$ の範囲で線分 OP の上側にあり，$t\leqq x\leqq a$ の範囲で線分 PA の上側にある。



ゆえに

$S_1=\int_0^t\log(x+1)\,dx-\frac{1}{2}\cdot t\cdot\log(t+1)$

$=\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^t-\int_0^t(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{t}{2}\log(t+1)$

$=(t+1)\log(t+1)-t-\frac{t}{2}\log(t+1)=\left(\frac{t}{2}+1\right)\log(t+1)-t$

$S_2=\int_t^a\log(x+1)\,dx-\frac{1}{2}\{\log(a+1)+\log(t+1)\}(a-t)$

$=\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_t^a-\int_t^a(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{1}{2}\{\log(a+1)+\log(t+1)\}(a-t)$

$=(a+1)\log(a+1)-(t+1)\log(t+1)-(a-t)-\frac{1}{2}\{\log(a+1)+\log(t+1)\}(a-t)$

$=\left(\frac{a}{2}+1\right)\log(a+1)-\left(\frac{t}{2}+1\right)\log(t+1)-a+t-\frac{a}{2}\log(t+1)+\frac{t}{2}\log(a+1)$

(3)　(2)から　$S_1+S_2=\left(\frac{a}{2}+1\right)\log(a+1)-a-\frac{a}{2}\log(t+1)+\frac{t}{2}\log(a+1)$

これを $h(t)$ とおくと

$h'(t)=-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\log(a+1)=\frac{1}{2}\left\{\log(a+1)-\frac{a}{t+1}\right\}$

$h'(t)=0$ とすると　$\log(a+1)=\frac{a}{t+1}$

よって　$t=\frac{a}{\log(a+1)}-1$

この値を t_0 とおく。

$a>0$ であるから，(1)により　$\frac{a}{a+1}<\log(a+1)<a$

この不等式の各辺は正であるから，逆数をとると　$\frac{1}{a}<\frac{1}{\log(a+1)}<\frac{a+1}{a}$

よって　$0<\frac{a}{\log(a+1)}-1<a$　すなわち　$0<t_0<a$

また，t の関数 $\frac{a}{t+1}$ は単調減少であるから，

$t>t_0$ のとき　$\log(a+1)-\frac{a}{t+1}>0$

$t<t_0$ のとき　$\log(a+1)-\frac{a}{t+1}<0$

すなわち，$t>t_0$ のとき $h'(t)>0$，$t<t_0$ のとき $h'(t)<0$ である。

ゆえに，$0<t<a$ における $h(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$	a
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		↘	極小	↗	

したがって，$h(t)$ を最小にする t は

$t=\frac{a}{\log(a+1)}-1$

2

解答　(1)　$-1\leqq t\leqq\frac{1}{e}$ のとき $S(t)=-2t+e-\frac{1}{e}$

$\frac{1}{e}\leqq t\leqq e$ のとき $S(t)=2t\log t-2t+e+\frac{1}{e}$

(2)　$t=-1$ のとき最大値 $2+e-\frac{1}{e}$，$t=1$ のとき最小値 $e+\frac{1}{e}-2$

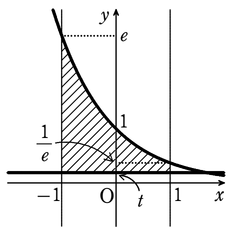
解説

(1)　$-1\leqq x\leqq 1$ において，$y=e^{-x}$ の値域は　$\frac{1}{e}\leqq y\leqq e$

[1]　$-1\leqq t\leqq\frac{1}{e}$ のとき

$S(t)=\int_{-1}^1(e^{-x}-t)dx=\Big[-e^{-x}-tx\Big]_{-1}^1$

$=-e^{-1}-t+e-t=-2t+e-\frac{1}{e}$



[2]　$\frac{1}{e}\leqq t\leqq e$ のとき

$e^{-x}=t$ とすると　$x=-\log t$

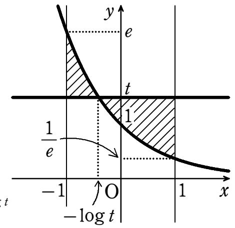
ゆえに

$S(t)=\int_{-1}^{-\log t}(e^{-x}-t)dx+\int_{-\log t}^1(t-e^{-x})dx$

$=\Big[-e^{-x}-tx\Big]_{-1}^{-\log t}+\Big[tx+e^{-x}\Big]_{-\log t}^1$

$=-e^{\log t}+t\log t+e-t+t+e^{-1}+t\log t-e^{\log t}$

$=2t\log t-2t+e+\frac{1}{e}$



(2)　$-1<t<\frac{1}{e}$ のとき　$S'(t)=-2<0$

よって，$S(t)$ は単調に減少する。

$\frac{1}{e}<t<e$ のとき　$S'(t)=2\log t$

$S'(t)=0$ とすると　$t=1$

$-1\leqq t\leqq e$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$S'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$2+e-\frac{1}{e}$	↘	$e-\frac{3}{e}$	↘	$e+\frac{1}{e}-2$	↗	$e+\frac{1}{e}$

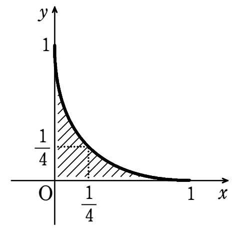
ここで　$S(-1)-S(e)=2+e-\frac{1}{e}-\left(e+\frac{1}{e}\right)=2-\frac{2}{e}>0$

したがって，最大値は $S(-1)=2+e-\frac{1}{e}$，最小値は $S(1)=e+\frac{1}{e}-2$

3

解答　[図]　ただし，境界線は座標軸を含まない；

面積　$\frac{1}{6}$



解説

l_t の方程式から　$(1-t)y=t(1-x-t)$

$0<t<1$，$y>0$ から　$1-x-t>0$

ゆえに　$0<x<1-t<1$

また　$0<t<1-x$

l_t 上の点 $(x,\ y)$ について　$y=\frac{t}{t-1}x+t\ (0<x<1)$

この右辺を t の関数と考えて $g(t)$ とおくと

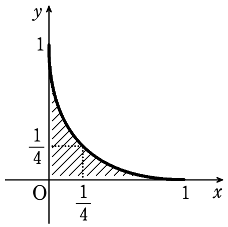
$$g'(t)=\frac{(t-1)-t}{(t-1)^2}x+1$$
$$=\frac{\{t-(1+\sqrt{x})\}\{t-(1-\sqrt{x})\}}{(t-1)^2}$$

$0<t<1-x$ における増減表は

t	0	$\cdots$	$1-\sqrt{x}$	$\cdots$	$1-x$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	(0)	$\nearrow$	$(\sqrt{x}-1)^2$ 極大	$\searrow$	(0)

ゆえに　$0<g(t)=y\leqq(\sqrt{x}-1)^2$

よって，求める領域は，区間 $(0,\ 1)$ において x 軸と曲線 $y=(\sqrt{x}-1)^2$ とに挟まれる部分である．



［図］　ただし，境界線は座標軸を含まない．

したがって，その面積は

$$\int_0^1(\sqrt{x}-1)^2dx=\int_0^1(x-2\sqrt{x}+1)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

注意　面積については，求める部分が境界線を含むものとして計算した．

$\boxed{4}$

解答　$\dfrac{2e-5}{2\alpha^2}$

解説

$$f(x)=\left(\frac{e}{x^\alpha}-1\right)\frac{\log x}{x}=\frac{(e-x^\alpha)\log x}{x^{\alpha+1}}$$

$\alpha>0$，$x>0$ であるから，$f(x)=0$ とすると　$x=1,\ e^{\frac{1}{\alpha}}$

このとき　$1<e^{\frac{1}{\alpha}}$

また，$0<x<1$ のとき　　$f(x)<0$

$1\leqq x\leqq e^{\frac{1}{\alpha}}$ のとき　$f(x)\geqq0$

$e^{\frac{1}{\alpha}}<x$ のとき　　$f(x)<0$

よって，求める面積 S は　$S=\displaystyle\int_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{e}{x^\alpha}-1\right)\frac{\log x}{x}dx$

$\log x=t$ とおくと　$x=e^t$，$\dfrac{1}{x}dx=dt$

x	$1\longrightarrow e^{\frac{1}{\alpha}}$
t	$0\longrightarrow\dfrac{1}{\alpha}$

よって　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\alpha}}(e^{1-\alpha t}-1)t\,dt$

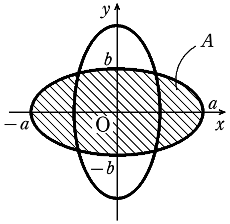
$$=\left[\left(-\frac{1}{\alpha}e^{1-\alpha t}-t\right)t\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}+\int_0^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}e^{1-\alpha t}+t\right)dt$$
$$=\left(-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\alpha}+\left[-\frac{1}{\alpha^2}e^{1-\alpha t}+\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$=-\frac{2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{2\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^2}=\frac{2e-5}{2\alpha^2}$$

$\boxed{5}$

解答　(1)　略　　(2)　$(4\alpha-\pi)ab$　　(3)　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解説

(1)　領域 A は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ から　　$y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

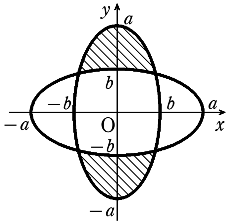
この楕円は x 軸，y 軸に関して対称であるから，A の面積は

$$4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ の値は，半径 a の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ 倍と等しい。

よって，A の面積は　　$\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{1}{4}\pi a^2=\pi ab$

(2)　求める面積は，右の図の斜線部分の面積である。ここで，領域 B の面積は，領域 A の面積と等しく，πab である。



よって，求める面積は

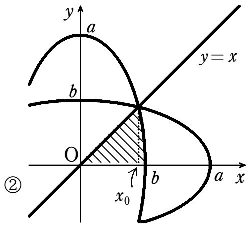
$(B$ の面積$)-(A\cap B$ の面積$)=\pi ab-S$　⋯⋯ ①

そこで，S の値を求める。

図形の対称性から，$x\geqq0$，$y\geqq0$，$y\leqq x$ の部分の面積を求めて，8 倍すればよい。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$y=x$ から y を消去して，x について解くと　　$x=\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$x_0=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおく。



$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ から　　$y=\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$

よって　　$\dfrac{S}{8}=\displaystyle\int_{x_0}^b\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}\,dx+\frac{1}{2}x_0{}^2$

$$=\frac{a}{b}\int_{x_0}^b\sqrt{b^2-x^2}\,dx+\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}\quad\cdots\cdots ②$$

$x=b\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと　　$dx=b\cos\theta\,d\theta$

ここで，$x=x_0$ のとき　　$\sin\theta=\dfrac{x_0}{b}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

一方，$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$x=x_0$ のとき　　$\theta=\alpha$

x	$x_0\ \to\ b$
θ	$\alpha\ \to\ \dfrac{\pi}{2}$

ゆえに　　$\dfrac{a}{b}\displaystyle\int_{x_0}^b\sqrt{b^2-x^2}\,dx=\frac{a}{b}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}b\cos\theta\cdot b\cos\theta\,d\theta$

$$=ab\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=ab\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=ab\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}=ab\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\sin2\alpha}{4}\right)$$

$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって　　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

ゆえに，② から　　$S=8\left\{ab\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)+\dfrac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}\right\}=2(\pi-2\alpha)ab$

したがって，① より，求める面積は

$$\pi ab-S=\pi ab-2(\pi-2\alpha)ab=(4\alpha-\pi)ab$$

(3)　和集合 $A\cup B$ の面積 T は，共通部分 $A\cap B$ の面積 S を用いて，$T=2\cdot\pi ab-S$ と表される。

よって，(2) より　　$T=2\pi ab-S=2\pi ab-2(\pi-2\alpha)ab=4\alpha ab$

ゆえに，$T=2S$ のとき　　$4\alpha ab=2\cdot2(\pi-2\alpha)ab$

$a>b>0$ であるから，α について解くと　　$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

これは，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす。

$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ から　　$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

両辺を 2 乗して整理すると　　$a^2=3b^2$　　　すなわち　　$\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=\dfrac{1}{3}$

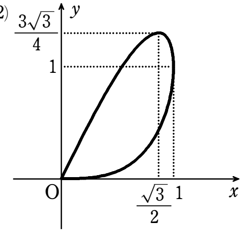
$a>b>0$ より，$0<\dfrac{b}{a}<1$ であるから　　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\dfrac{dy}{dx}=2\cos t+1-\dfrac{1}{\cos t}$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\tan t(\tan^2t+3)$

(2)　［図］　　(3)　$\dfrac{2}{3}$

(2)


解説

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=(-\sin t)\sin t+(1+\cos t)\cos t=2\cos^2t+\cos t-1$

よって　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2\cos^2t+\cos t-1}{\cos t}=2\cos t+1-\dfrac{1}{\cos t}$

また　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$

よって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2\sin t-\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}}{\cos t}=-2\tan t-\tan t(\tan^2 t+1)$

$=-\tan t(\tan^2 t+3)$

(2)　(1) より，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\tan t(\tan^2 t+3)$ であるから

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$　　$\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$ のとき　$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$

よって，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 C は上に凸，$\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$ において曲線 C は下に凸の曲線である。

また，$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ より，$0<t<\pi$ の範囲で $\dfrac{dx}{dt}=0$ となるのは　$t=\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{dy}{dt}=2\cos^2 t+\cos t-1$

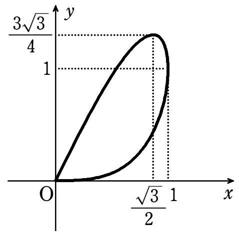
$=(2\cos t-1)(\cos t+1)$

よって，$0<t<\pi$ の範囲で $\dfrac{dy}{dt}=0$ となるのは　$t=\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに，$0\leqq t\leqq\pi$ における増減表は右のようになる。

したがって，曲線 C の概形は右の図のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
x	0	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	$\uparrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\downarrow$	1	$\downarrow$	0



(3)　(2) より，求める面積 S は右の図の斜線部分の面積である。

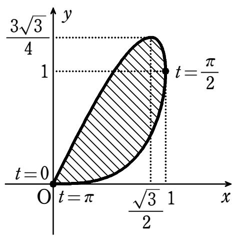
$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における y を y_1，$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ における y を y_2 とすると

$S=\displaystyle\int_0^1 y_1dx-\int_0^1 y_2dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y_1\frac{dx}{dt}dt-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} y_2\frac{dx}{dt}dt$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos t)\sin t\cos t\,dt$

$=\displaystyle\int_0^{\pi}(1+\cos t)\sin t\cos t\,dt=\int_0^{\pi}(\cos t+\cos^2 t)\sin t\,dt$



$=\left[-\dfrac{1}{2}\cos^2 t-\dfrac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi}=\dfrac{2}{3}$

7

解答　(1)　$T(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-\cos 2\theta)+\sqrt{\cos^6\theta+\sin^6\theta}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解説

(1)　点 A から点 Q までに点 P が動いた距離を L とすると

$L=\displaystyle\int_0^{\theta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\theta}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_0^{\theta}\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$

$=\displaystyle\int_0^{\theta}|3\cos t\sin t|dt=\frac{3}{2}\int_0^{\theta}|\sin 2t|dt$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から，$0\leqq t\leqq\theta$ のとき　$0\leqq 2t\leqq 2\theta<\pi$

よって，$\sin 2t\geqq 0$ であるから

$L=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\theta}\sin 2t\,dt=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\theta}=\frac{3}{4}(1-\cos 2\theta)$

また　$\mathrm{QO}=\sqrt{(\cos^3\theta)^2+(\sin^3\theta)^2}=\sqrt{\cos^6\theta+\sin^6\theta}$

よって　$T(\theta)=\dfrac{L}{\sqrt{3}}+\dfrac{\mathrm{QO}}{1}=\dfrac{\frac{3}{4}(1-\cos 2\theta)}{\sqrt{3}}+\sqrt{\cos^6\theta+\sin^6\theta}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-\cos 2\theta)+\sqrt{\cos^6\theta+\sin^6\theta}$

(2)　$\sqrt{\cos^6\theta+\sin^6\theta}=\sqrt{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$

$=\sqrt{1-3\cos^2\theta\sin^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2\theta}$

$=\sqrt{1-\dfrac{3}{4}(1-\cos^2 2\theta)}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3\cos^2 2\theta+1}$

$\sqrt{3}\cos 2\theta=u$ とおくと，$0<2\theta<\pi$ から　$-\sqrt{3}<u<\sqrt{3}$　……①

また　$T(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{u}{4}+\dfrac{1}{2}\sqrt{u^2+1}$

これを $f(u)$ とすると

$f'(u)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{2u}{4\sqrt{u^2+1}}=\dfrac{2u-\sqrt{u^2+1}}{4\sqrt{u^2+1}}$

$f'(u)=0$ とすると　$2u=\sqrt{u^2+1}$　……②

この右辺は正であるから　$u>0$

② の両辺を 2 乗して整理すると　$3u^2=1$　　よって　$u=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

① における $f(u)$ の増減表は，右のようになる。

よって，$f(u)$ すなわち $T(\theta)$ は $u=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最小になり，その最小値は

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

u	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

8

解答　(1)　$x(\theta)=2\cos\theta-\cos 2\theta$，$y(\theta)=2\sin\theta-\sin 2\theta$　　(2)　略　　(3)　5π

解説

(1)　$\mathrm{OA}=2$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

S_1 と S_2 の接点を Q とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と x 軸の正の向きとのなす角が $\theta+\pi$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と x 軸の正の向きとのなす角は

$(\theta+\pi)+\theta=2\theta+\pi$

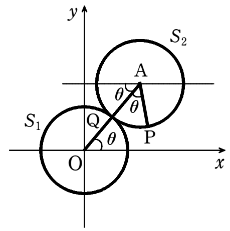
よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos(2\theta+\pi),\ \sin(2\theta+\pi))$

$=(-\cos 2\theta,\ -\sin 2\theta)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=(2\cos\theta-\cos 2\theta,\ 2\sin\theta-\sin 2\theta)$

したがって　$x(\theta)=2\cos\theta-\cos 2\theta$，$y(\theta)=2\sin\theta-\sin 2\theta$



(2)　$x(2\pi-\theta)=2\cos(2\pi-\theta)-\cos 2(2\pi-\theta)=2\cos\theta-\cos(4\pi-2\theta)$

$=2\cos\theta-\cos 2\theta$

$=x(\theta)$

$y(2\pi-\theta)=2\sin(2\pi-\theta)-\sin 2(2\pi-\theta)=-2\sin\theta-\sin(4\pi-2\theta)$

$=-2\sin\theta+\sin 2\theta$

$=-y(\theta)$

よって，曲線 C は x 軸に関して対称である。

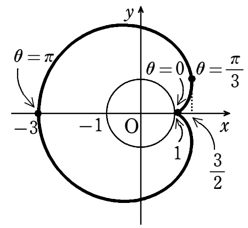
(3)　$\dfrac{dx(\theta)}{d\theta}=-2\sin\theta+2\sin 2\theta$

$=2\sin\theta(2\cos\theta-1)$

$0<\theta<\pi$ において　$\dfrac{dx(\theta)}{d\theta}=0$ とすると　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

また　$x\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$，$x(\pi)=-3$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ における y を y_1，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\pi$ における y を y_2 とすると，曲線 C で囲まれてできる図形の，x 軸の上側の部分の面積 S_1 は



$S_1=\displaystyle\int_{-3}^{\frac{3}{2}} y_2dx-\int_1^{\frac{3}{2}} y_1dx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} y(\theta)\frac{dx(\theta)}{d\theta}d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{3}} y(\theta)\frac{dx(\theta)}{d\theta}d\theta$

$=\displaystyle\int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx(\theta)}{d\theta}d\theta$

$=\displaystyle\int_{\pi}^{0}(2\sin\theta-\sin 2\theta)(-2\sin\theta+2\sin 2\theta)d\theta$

$=2\displaystyle\int_0^{\pi}(2\sin^2\theta-3\sin\theta\sin 2\theta+\sin^2 2\theta)d\theta$

$=2\displaystyle\int_0^{\pi}\left(2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}-6\sin^2\theta\cos\theta+\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$

$=2\left[\dfrac{3}{2}\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta-2\sin^3\theta-\dfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi}$

$=3\pi$

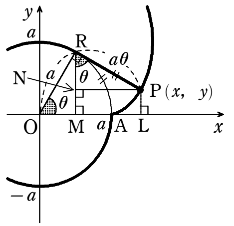
よって，求める面積 S は　$S=2S_1-\pi\cdot 1^2=6\pi-\pi=5\pi$

9

解答 (1) $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$, $y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ (2) $\dfrac{\pi^3a^2}{48}$

解説

(1) 図から



$\angle\mathrm{PRM}=\angle\mathrm{AOR}=\theta$, $\mathrm{PR}=\widehat{\mathrm{AR}}=a\theta$

ゆえに $x=\mathrm{OL}=\mathrm{OM}+\mathrm{PN}=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$

$y=\mathrm{PL}=\mathrm{RM}-\mathrm{RN}=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$

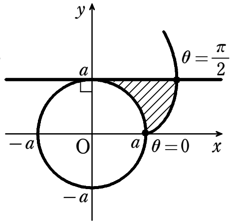
$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq2\pi$ のときも，同じ式が得られる (略).

(2) $\displaystyle\int_0^a x\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a(\cos\theta+\theta\sin\theta)\cdot a\theta\sin\theta\,d\theta$

$\displaystyle =a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\theta}{2}\sin2\theta+\frac{\theta^2}{2}(1-\cos2\theta)\right\}d\theta$

$\displaystyle =\frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin2\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cos2\theta\,d\theta\right)$

ここで



$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin2\theta\,d\theta=\left[-\frac{1}{2}\theta\cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}$,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2d\theta=\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cos2\theta\,d\theta=\left[\frac{\theta^2}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin2\theta\,d\theta=-\frac{\pi}{4}$

ゆえに $\displaystyle\int_0^a x\,dy=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^3a^2}{48}+\frac{\pi a^2}{4}$

よって，求める面積は $\displaystyle\int_0^a x\,dy-\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi^3a^2}{48}$

10

解答 (1) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $r=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ (2) $\dfrac{38-15\sqrt{6}}{240}\pi$

解説

(1) 点 $(a,\ b)$ は放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ 上にあるから $b=\sqrt{2}(a-1)^2$

また，$y'=2\sqrt{2}(x-1)$ であるから，点 $(a,\ b)$ における接線の傾きは

$2\sqrt{2}(a-1)$ ……①

点 $(a,\ b)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上にあるから，この点における法線は原点を通る。

よって，法線の傾きは $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}(a-1)^2}{a}$ ……②

ある点における接線と法線は直交するから，①，② より

$2\sqrt{2}(a-1)\cdot\dfrac{\sqrt{2}(a-1)^2}{a}=-1$

$4(a-1)^3=-a$

$4a^3-12a^2+13a-4=0$

$(2a-1)(2a^2-5a+4)=0$

$2a^2-5a+4=0$ の判別式を D とすると

$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot4=-7<0$

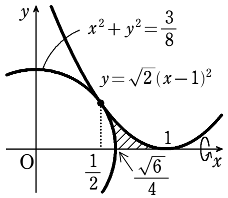
であるから，方程式 $2a^2-5a+4=0$ は実数解をもたない。

よって $a=\dfrac{1}{2}$

したがって $b=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$r=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(2) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $r=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき，連立不等式が表す領域は右の図の斜線部分のようになる。



円 $x^2+y^2=\dfrac{3}{8}$ の $y\geqq0$ の部分は $y=\sqrt{\dfrac{3}{8}-x^2}$ であるから，求める体積は

$$\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left(\sqrt{\frac{3}{8}-x^2}\right)^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{5}(x-1)^5\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\pi\left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}=2\pi\cdot\frac{1}{5\cdot2^5}-\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{16}-\frac{7}{48}\right)$$

$$=\frac{38-15\sqrt{6}}{240}\pi$$

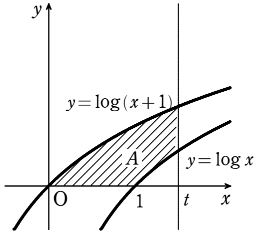
11

解答 (1) $(t+1)\log(t+1)-t\log t-1$ (2) $\pi(t^2-1)\log(t+1)-\pi t^2\log t+\pi t-\dfrac{\pi}{2}$

(3) 2π

解説

(1) $S(t)$ は右の図の斜線部分の面積である。



よって $\displaystyle S(t)=\int_0^t\log(x+1)\,dx-\int_1^t\log x\,dx$

$\displaystyle =\int_1^{t+1}\log x\,dx-\int_1^t\log x\,dx$

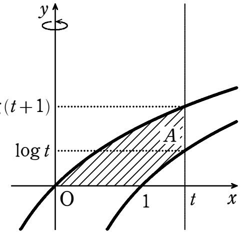
$\displaystyle =\int_t^{t+1}\log x\,dx$

ここで $\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-\int dx$

$=x\log x-x+C$ (C は積分定数)

であるから $S(t)=\Big[x\log x-x\Big]_t^{t+1}=(t+1)\log(t+1)-t\log t-1$

(2) 求める体積は，底面の円の半径が t，高さが $\log(t+1)$ である円柱の体積から，直線 $y=\log(t+1)$，曲線 $y=\log(x+1)$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積と，直線 $x=t$，曲線 $y=\log x$ および x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を引いたものである。



また，

$y=\log(x+1)$ のとき $x=e^y-1$

$y=\log x$ のとき $x=e^y$

であるから，求める体積 $W(t)$ は

$$W(t)=\pi t^2\log(t+1)-\pi\int_0^{\log(t+1)}(e^y-1)^2dy-\left\{\pi t^2\log t-\pi\int_0^{\log t}(e^y)^2dy\right\}$$

ここで $\displaystyle\pi\int_0^{\log(t+1)}(e^y-1)^2dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}-2e^y+y\right]_0^{\log(t+1)}$

$\displaystyle =\pi\left\{\frac{1}{2}e^{2\log(t+1)}-2e^{\log(t+1)}+\log(t+1)+\frac{3}{2}\right\}$

$\displaystyle =\left\{\frac{1}{2}t^2-t+\log(t+1)\right\}\pi$

$\displaystyle\pi\int_0^{\log t}(e^y)^2dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{\log t}=\frac{\pi}{2}(t^2-1)$

よって $W(t)=\pi t^2\log(t+1)-\dfrac{\pi}{2}t^2+\pi t-\pi\log(t+1)-\pi t^2\log t+\dfrac{\pi}{2}(t^2-1)$

$=\pi(t^2-1)\log(t+1)-\pi t^2\log t+\pi t-\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\dfrac{dW}{dt}=2\pi t\log(t+1)+\pi(t^2-1)\cdot\dfrac{1}{t+1}-2\pi t\log t-\pi t^2\cdot\dfrac{1}{t}+\pi$

$=2\pi t\log\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=2\pi\log\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$

よって $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dW}{dt}=\lim_{t\to\infty}2\pi\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=2\pi\log e=2\pi$

12

解答 (1) $V_1=\dfrac{11}{480}\pi$, $V_2=\dfrac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi$ (2) $\dfrac{V_2}{V_1}<1$

解説

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ ……①, $\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}$ ……② とする。

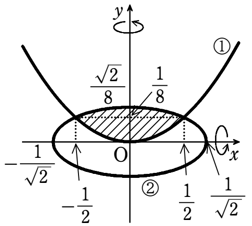
① を ② に代入して $\dfrac{x^2}{4}+x^4=\dfrac{1}{8}$

よって $8x^4+2x^2-1=0$ ゆえに $(2x^2+1)(4x^2-1)=0$

よって $x=\pm\dfrac{1}{2}$ ① から，$x=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき $y=\dfrac{1}{8}$

ゆえに，2 曲線 ①，② の交点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$

よって，領域 S は，右の図の斜線部分のようになり，領域 S は y 軸に関して対称な図形である。



ここで，② から　$y^2=\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}$

ゆえに　$V_1=2\times\pi\int_0^{\frac12}\left\{\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}\right)-\left(\frac12x^2\right)^2\right\}dx$

$=\pi\int_0^{\frac12}\left(\frac{1}{16}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{2}\right)dx$

$=\pi\left[\frac{x}{16}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^5}{10}\right]_0^{\frac12}=\frac{11}{480}\pi$

また，① から　$x^2=2y$　② から　$x^2=\frac12-16y^2$

よって　$V_2=\pi\int_0^{\frac18}2ydy+\pi\int_{\frac18}^{\frac{\sqrt2}{8}}\left(\frac12-16y^2\right)dy=\pi\left[y^2\right]_0^{\frac18}+\pi\left[\frac{y}{2}-\frac{16}{3}y^3\right]_{\frac18}^{\frac{\sqrt2}{8}}$

$=\frac{\pi}{64}+\pi\left(\frac{\sqrt2}{24}-\frac{5}{96}\right)=\frac{8\sqrt2-7}{192}\pi$

(2)　$V_1-V_2=\frac{11}{480}\pi-\frac{8\sqrt2-7}{192}\pi=\frac{22-(40\sqrt2-35)}{960}\pi=\frac{57-40\sqrt2}{960}\pi$

ここで　$57^2=3249$，$(40\sqrt2)^2=3200$

よって，$57^2>(40\sqrt2)^2$ から　$57>40\sqrt2$　すなわち　$57-40\sqrt2>0$

よって　$V_1-V_2>0$　ゆえに　$V_1>V_2$

$V_1>0$ であるから　$\frac{V_2}{V_1}<1$

13

解答　(1) $a=\frac{1}{ep}$，点 Q の x 座標は $e^{\frac1p}$　(2) $2\pi\left(1-\frac{2p-1}{2p+1}e^{\frac1p}\right)$　(3) $p=\frac12$

解説

(1) 2つの曲線 $y=ax^p\ (x>0)$，$y=\log x\ (x>0)$ の共有点が1点のみであるための条件は，方程式 $ax^p=\log x\ (x>0)$ の実数解がただ1つであることである。

$f(x)=ax^p-\log x$ とおくと　$f'(x)=apx^{p-1}-\frac1x=\frac{apx^p-1}{x}$

$a>0$，$p>0$ であるから，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	$\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac1p}$	…
$f'(x)$	/	−	0	+
$f(x)$	/	↘	極小	↗

また　$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^p\left(a-\frac{1}{\frac{x^p}{\log x}}\right)=\infty$

よって，方程式 $ax^p=\log x$ の実数解がただ1つであるための条件は

$$f\left(\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac1p}\right)=0$$

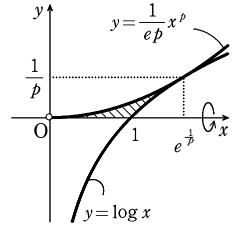
$f\left(\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac1p}\right)=a\cdot\frac{1}{ap}-\frac1p\log\frac{1}{ap}=\frac{1+\log ap}{p}$ であるから

$\log ap+1=0$　すなわち　$a=\frac{1}{ep}$

このときの点 Q の x 座標は，方程式 $ax^p=\log x$ の実数解と等しいから　$\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac1p}=e^{\frac1p}$

(2) (1) より，$a=\frac{1}{ep}$ のとき，$x>0$ において $ax^p\geqq\log x$ であり，等号は $x=e^{\frac1p}$ のとき成り立つ。

よって，2つの曲線と x 軸で囲まれる図形は，右の図の斜線部分のようになり，求める体積を V とすると



$V=\pi\int_0^{e^{\frac1p}}\left(\frac{1}{ep}x^p\right)^2dx-\pi\int_1^{e^{\frac1p}}(\log x)^2dx$

ここで　$\int(\log x)^2dx$

$=x(\log x)^2-\int x\cdot2\log x\cdot\frac1x dx$

$=x(\log x)^2-2\left(x\log x-\int x\cdot\frac1x dx\right)$

$=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$　（C は積分定数）

よって　$V=\frac{\pi}{e^2p^2}\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^{e^{\frac1p}}-\pi\left[x(\log x)^2-2x\log x+2x\right]_1^{e^{\frac1p}}$

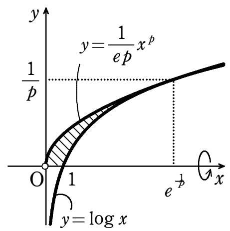
$=\pi\left\{\frac{e^{\frac1p}}{p^2(2p+1)}-\left(\frac{1}{p^2}-\frac2p+2\right)e^{\frac1p}+2\right\}$

$=\pi\left\{\frac{1-(2p+1)(1-2p+2p^2)}{p^2(2p+1)}e^{\frac1p}+2\right\}=2\pi\left(1-\frac{2p-1}{2p+1}e^{\frac1p}\right)$

(3) $V=2\pi$ から　$2\pi\left(1-\frac{2p-1}{2p+1}e^{\frac1p}\right)=2\pi$

よって，$\frac{2p-1}{2p+1}e^{\frac1p}=0$ であるから　$p=\frac12$

参考　$0<p<1$ のとき，曲線 $y=ax^p\ (x>0)$ は上に凸であり，右の図のように，曲線 $y=\log x$ と接する。



14

解答　(1) $\frac{t^2+1}{\sqrt2}$　(2) $\frac{(t-1)^2}{\sqrt2}$　(3) $\frac{\sqrt2}{10}\pi$

解説

(1) 点 P を通り，傾きが −1 である直線の方程式は

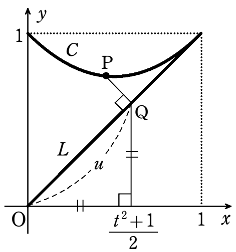
$y-(t^2-t+1)=-(x-t)$

すなわち　$y=-x+t^2+1$

この直線と直線 $y=x$ との交点が点 Q であるから，Q の x 座標は，方程式 $x=-x+t^2+1$ を解いて

$x=\frac{t^2+1}{2}$

したがって　$u=\sqrt2\cdot\frac{t^2+1}{2}=\frac{t^2+1}{\sqrt2}$

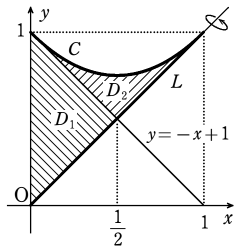


(2) 線分 PQ の長さは，点 P と直線 $y=x$ との距離に等しいから

$PQ=\frac{|t-(t^2-t+1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-t^2+2t-1|}{\sqrt2}=\frac{|-(t-1)^2|}{\sqrt2}=\frac{(t-1)^2}{\sqrt2}$

(3) 右の図のように，図形 D を直線 $y=-x+1$ で2つの図形 D_1，D_2 に分ける。

D_1，D_2 を直線 $y=x$ の周りに1回転してできる立体の体積を，それぞれ V_1，V_2 とすると



$V_1=\frac13\cdot\pi\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{12}\pi$

$V_2=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^{\sqrt2}PQ^2du=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^{\sqrt2}\frac{(t-1)^4}{2}du$

ここで，$u=\frac{t^2+1}{\sqrt2}$ より　$du=\sqrt2\,tdt$

u	$\frac{1}{\sqrt2}$	→	$\sqrt2$
t	0	→	1

よって　$V_2=\pi\int_0^1\frac{(t-1)^4}{2}\cdot\sqrt2\,tdt$

$=\frac{\sqrt2\pi}{2}\int_0^1(t-1)^4\{(t-1)+1\}dt$

$=\frac{\sqrt2\pi}{2}\int_0^1\{(t-1)^5+(t-1)^4\}dt$

$=\frac{\sqrt2\pi}{2}\left[\frac{(t-1)^6}{6}+\frac{(t-1)^5}{5}\right]_0^1=\frac{\sqrt2}{60}\pi$

したがって　$V=V_1+V_2=\frac{\sqrt2}{12}\pi+\frac{\sqrt2}{60}\pi=\frac{\sqrt2}{10}\pi$

15

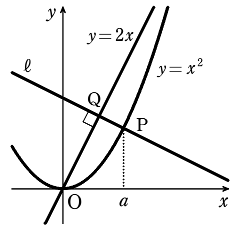
解答　(1) $y=-\frac12x+a^2+\frac12a$　(2) $\frac{2a^2+a}{\sqrt5}$　(3) $\frac{2a-a^2}{\sqrt5}$

(4) $\frac{-3a^4+7a^3+3a^2}{15}$　(5) $\frac{\sqrt5\pi}{75}(2a^6-9a^5+9a^4+4a^3)$

解説

(1) 直線 ℓ は点 P$(a,\ a^2)$ を通り，傾きが $-\frac12$ の直線であるから，直線 ℓ の方程式は　$y-a^2=-\frac12(x-a)$

すなわち　$y=-\frac12x+a^2+\frac12a$　……①



(2) 原点 O を通り，直線 ℓ に垂直な直線は $y=2x$ であるから，原点 O と点 Q の距離は原点 O と直線 ℓ の距離と一致する。

① を変形して　$x+2y-2a^2-a=0$

よって，求める距離を d とすると　$d=\frac{|0+2\cdot0-2a^2-a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-2a^2-a|}{\sqrt5}$

$0<a<2$ であるから　$|-2a^2-a|=2a^2+a$

したがって　$d=\frac{2a^2+a}{\sqrt5}$

(3) $OP^2=a^2+(a^2)^2=a^2+a^4$

△OPQ は直角三角形であるから，三平方の定理より

$$PQ^2=OP^2-d^2=a^2+a^4-\left(\frac{2a^2+a}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{a^4-4a^3+4a^2}{5}=\frac{(a^2-2a)^2}{5}$$

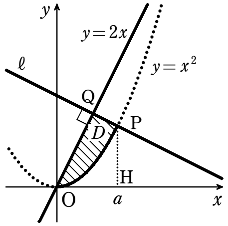
$0<a<2$ であるから　$a^2-2a<0$

よって　$PQ=\dfrac{2a-a^2}{\sqrt{5}}$

(4)　点 P から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点を H とする。

求める面積を S とすると

$$S=\triangle OPQ+\triangle OPH-\int_0^a x^2dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^2+a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2a-a^2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}a\cdot a^2-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$
$$=\frac{-3a^4+7a^3+3a^2}{15}$$

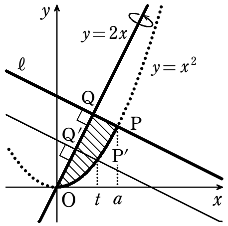


(5)　曲線 $y=x^2\ (0\leqq x\leqq a)$ 上の点で x 座標が t であるような点を P′ とし，P′ を通り，直線 $y=2x$ に垂直な直線と直線 $y=2x$ との交点を Q′ とする。

このとき，(2)，(3) と同様にして，原点 O と点 Q′ の距離 s と線分 P′Q′ の長さは

$$s=\frac{2t^2+t}{\sqrt{5}},\qquad P'Q'=\frac{2t-t^2}{\sqrt{5}}$$

であることがわかる。



求める立体の体積を V とすると　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{2a^2+a}{\sqrt{5}}}P'Q'^2ds$

$s=\dfrac{2t^2+t}{\sqrt{5}}$ のとき，$ds=\dfrac{4t+1}{\sqrt{5}}dt$ であるから

s	$0\longrightarrow\dfrac{2a^2+a}{\sqrt{5}}$
t	$0\longrightarrow a$

$$V=\pi\int_0^a\left(\frac{2t-t^2}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot\frac{4t+1}{\sqrt{5}}dt$$
$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^a(4t^5-15t^4+12t^3+4t^2)dt$$
$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left[\frac{2}{3}t^6-3t^5+3t^4+\frac{4}{3}t^3\right]_0^a$$
$$=\frac{\sqrt{5}\pi}{75}(2a^6-9a^5+9a^4+4a^3)$$

16

解答　4

解説

$x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta$

$y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

よって　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta=-\sin\theta-\sin 2\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta+\cos 2\theta$

ゆえに　$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=(-\sin\theta-\sin 2\theta)^2+(\cos\theta+\cos 2\theta)^2$

$$=2+2\sin\theta\sin 2\theta+2\cos\theta\cos 2\theta=2+2\cos\theta$$
$$=2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $\cos\dfrac{\theta}{2}\geqq 0$ であるから，求める曲線の長さは

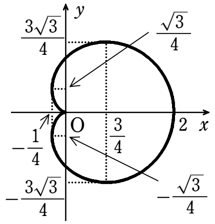
$$\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^\pi\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$=4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi=4$$

17

解答　(1)　$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点 $(2,\ 0)$，$\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点 $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(2)　$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=0$　　(3)　[図]　　(4)　8



解説

(1)　$r=1+\cos\theta$ であるから　$x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta$

$y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta$

ゆえに　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta=-\sin\theta(1+2\cos\theta)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

よって，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる θ の値は　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$

したがって，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点の直交座標は

$(2,\ 0)$，$\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

また，$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる θ の値は　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

したがって，$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点の直交座標は　$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)}$

であるから

$$\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to\pi}\frac{(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)}=\lim_{\theta\to\pi}\left\{-\frac{(2\cos\theta-1)\sin^2\theta}{\sin\theta(1+2\cos\theta)(1-\cos\theta)}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to\pi}\left\{-\frac{(2\cos\theta-1)\sin\theta}{(1+2\cos\theta)(1-\cos\theta)}\right\}=0$$

(3)　$x(\theta)=(1+\cos\theta)\cos\theta$，$y(\theta)=(1+\cos\theta)\sin\theta$ とすると

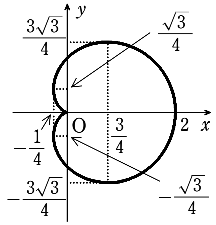
$x(2\pi-\theta)=x(\theta)$，$y(2\pi-\theta)=-y(\theta)$

よって，曲線 C で $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ に対応する曲線は $0\leqq\theta\leqq\pi$ に対応する曲線を x 軸に関して対称移動したものである。

(1) から，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における増減表は次のようになる。

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$\frac{dx}{d\theta}$		−	−	−	0	+	0
x	2	←	$\frac{3}{4}$	←	$-\frac{1}{4}$	→	0
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	−	−	−	0
y	0	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↓	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↓	0

したがって，(2) と合わせて，曲線 C の概形は右の図のようになる。



(4)　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=-\sin\theta-\sin 2\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=\cos\theta+\cos 2\theta$

であるから

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(-\sin\theta-\sin 2\theta)^2+(\cos\theta+\cos 2\theta)^2$$
$$=2+2\cos\theta=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

ゆえに，曲線 C の長さを l とすると

$$l=2\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=4\int_0^\pi\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi=8$$

18

解答　(1)　$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　(2)　$\dfrac{\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})}{2}$

解説

(1)　$f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2)　極方程式 $r=\theta\ (\theta\geqq 0)$ から

$x=r\cos\theta=\theta\cos\theta$，$y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$

ここで　$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta-\theta\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta$

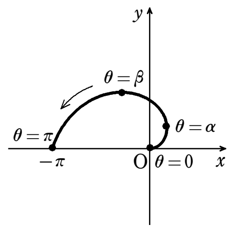
よって，θ についての x，y の増減表は次のようになる。

θ	0	…	α	…	β	…	π
$\frac{dx}{d\theta}$		+	0	−	−	−	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	+	+	0	−	
x		↗	極大	↘	↘	↘	
y		↗	↗	↗	極大	↘	

ただし　$\cos\alpha-\alpha\sin\alpha=0$

$\sin\beta+\beta\cos\beta=0$

ゆえに，曲線は右の図のようになる。



したがって，曲線 $r=\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを L とすると

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$
$$=\Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$
$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^{\pi}\frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$
$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-L+\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

よって　$2L=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$

(1) より　$2L=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\Big[\log\big(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\big)\Big]_0^{\pi}$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log\big(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\big)$$

ゆえに　$L=\dfrac{\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log\big(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\big)}{2}$

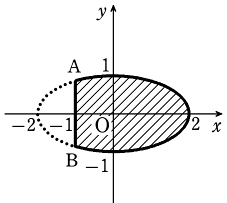
$\boxed{19}$

解答　(1)　$\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt3}{2}$　　(2)　$S(t)=2(t+1)\sqrt{1-\dfrac{t^2}{4}}$　　(3)　$\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3\sqrt3}{2}$

解説

(1)　$y\geqq0$ のとき，曲線 C は $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$ と表せる。

右の図の斜線部分は x 軸に関して対称であるから，求める面積は　$2\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$



ここで，$x=2\cos\theta$ とおくと　　$dx=-2\sin\theta$

x	$-1\ \longrightarrow\ 2$
θ	$\dfrac{2}{3}\pi\ \longrightarrow\ 0$

よって　$\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot(-2\sin\theta)d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(1-\cos2\theta)d\theta$$
$$=\Big[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt3}{4}$$

したがって，求める面積は　　$2\Big(\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt3}{4}\Big)=\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt3}{2}$

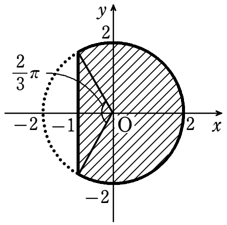
別解　y 軸方向に 2 倍して考える。

このとき，曲線 C は円 $x^2+y^2=4$ に移る。

右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi+\sqrt3$$

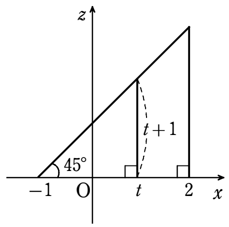
したがって　　$S(t)=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{8}{3}\pi+\sqrt3\Big)=\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt3}{2}$



(2)　立体 V は平面 H，平面 T，曲面 K で囲まれた立体で，曲面 K は z 軸に平行であるから，立体 V を平面 $x=t$ で切った切り口は長方形になる。

平面 H と平面 T のなす角は $45°$ であるから，右の図より，切り口の長方形の縦の長さは　　$t+1$

立体 V と平面 H の共通部分は x 軸に関して対称であるから，切り口の長方形の横の長さは　　$2\sqrt{1-\dfrac{t^2}{4}}$



よって　　$S(t)=2(t+1)\sqrt{1-\dfrac{t^2}{4}}$

(3)　(2) から，立体 V の体積は　　$\displaystyle\int_{-1}^{2}S(t)dt=2\int_{-1}^{2}(t+1)\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt$

$$=2\int_{-1}^{2}t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt+2\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt$$

ここで，(1) から　　$\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt3}{4}$

また　　$\displaystyle\int_{-1}^{2}t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt=-2\int_{-1}^{2}\Big(1-\frac{t^2}{4}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(1-\frac{t^2}{4}\Big)'dt=-2\Big[\frac{2}{3}\Big(1-\frac{t^2}{4}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-1}^{2}$

$$=\frac{\sqrt3}{2}$$

したがって，立体 V の体積は　　$2\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}+2\Big(\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt3}{4}\Big)=\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3\sqrt3}{2}$

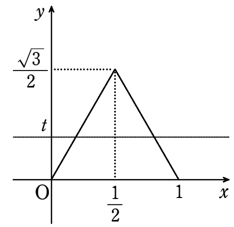
$\boxed{20}$

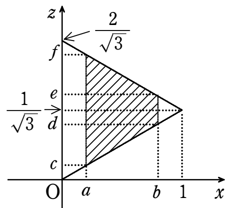
解答　$\dfrac{1}{4}$

解説

立体 K と L の共通部分を平面 $y=t$ で切ったときの切り口を考える．立体 K の xy 平面への射影は左図の正三角形であるから，$0\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt3}{2}$ のとき，立体 K と平面 $y=t$ の共通部分の x の範囲は　$\dfrac{1}{\sqrt3}t\leqq x\leqq1-\dfrac{1}{\sqrt3}t$

また，立体 L の $y=t$ による切り口は $(0,\ t,\ 0)$，$\Big(0,\ t,\ \dfrac{2}{\sqrt3}\Big)$，$\Big(1,\ t,\ \dfrac{1}{\sqrt3}\Big)$ を頂点とする正三角形だから，立体 K と L の共通部分の平面 $y=t$ による切り口は，右図の斜線部分のような台形となる．





［右図において　$a=\dfrac{t}{\sqrt3}$，$b=1-\dfrac{t}{\sqrt3}$，$c=\dfrac{t}{3}$，$d=\dfrac{1}{\sqrt3}-\dfrac{t}{3}$，$e=\dfrac{1}{\sqrt3}+\dfrac{t}{3}$，

$f=\dfrac{2}{\sqrt3}-\dfrac{t}{3}$］

この台形の面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{1}{2}\Big[\Big\{\Big(\frac{2}{\sqrt3}-\frac{1}{3}t\Big)-\frac{1}{3}t\Big\}+\Big\{\Big(\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{3}t\Big)-\Big(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{3}t\Big)\Big\}\Big]\Big\{\Big(1-\frac{1}{\sqrt3}t\Big)-\frac{1}{\sqrt3}t\Big\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt3}\Big(1-\frac{2}{\sqrt3}t\Big)$$

よって，K と L の共通部分の体積 V は

$$V=\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{1}{\sqrt3}\Big(1-\frac{2}{\sqrt3}t\Big)dt=\frac{1}{\sqrt3}\Big[t-\frac{1}{\sqrt3}t^2\Big]_0^{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{1}{\sqrt3}\Big(\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{3}{4}\Big)=\frac{1}{4}$$

1

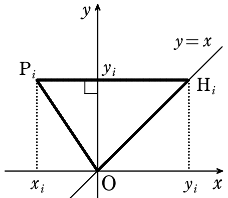
解答 (1) 略　(2) $2\log\dfrac{y_2}{y_1}$

解説

(1) 点 $\mathrm{P}_i(x_i,\ y_i)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点 H_i の座標は

$(y_i,\ y_i)$

よって　$\triangle \mathrm{OP}_i\mathrm{H}_i=\dfrac{1}{2}|y_i-x_i||y_i|=\dfrac{1}{2}|y_i^2-x_iy_i|$



ここで，点 P_i は曲線 C 上の点であるから

$$y_i=\frac{1}{2}x_i+\sqrt{\frac{1}{4}x_i^2+2}$$

ゆえに　$y_i^2-x_iy_i=y_i(y_i-x_i)$

$$=\left(\frac{1}{2}x_i+\sqrt{\frac{1}{4}x_i^2+2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}x_i+\sqrt{\frac{1}{4}x_i^2+2}\right)-x_i\right\}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{4}x_i^2+2}+\frac{1}{2}x_i\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}x_i^2+2}-\frac{1}{2}x_i\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{4}x_i^2+2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}x_i\right)^2$$

$$=2$$

よって　$\triangle \mathrm{OP}_i\mathrm{H}_i=\dfrac{1}{2}\cdot|2|=1$　$(i=1,\ 2)$

したがって，$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1$ と $\triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$ の面積は等しい。

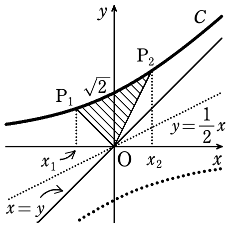
(2) まず，曲線 C の概形を調べる。

$$y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

$$\iff \left(y-\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1}{4}x^2+2 \quad \left(y\geqq\frac{1}{2}x\right)$$

$$\iff y^2-xy=2 \quad \left(y\geqq\frac{1}{2}x\right)$$

$$\iff x=y-\frac{2}{y} \quad \left(y\geqq\frac{1}{2}x\right)$$



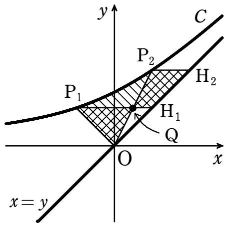
曲線 $x=y-\dfrac{2}{y}$ は，2 直線 $x=y$，$y=0$ を漸近線にもつ双曲線であるから，曲線 C の概形は右の図のようになる。

求める面積を S とすると，S は右の図の斜線部分の面積である。

ここで，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{H}_1$ と線分 OP_2 の交点を Q とする。

(1) より　$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1=\triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$

$\triangle \mathrm{OQH}_1$ は，$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1$ と $\triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$ の両方に含まれるから，$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{Q}$ の面積は，四角形 $\mathrm{P}_2\mathrm{QH}_1\mathrm{H}_2$ の面積と等しい。

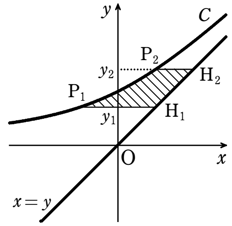


ゆえに，S は右の図の斜線部分の面積と等しいから

$$S=\int_{y_1}^{y_2}\left\{y-\left(y-\frac{2}{y}\right)\right\}dy$$

$$=\int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}\,dy=\Big[2\log|y|\Big]_{y_1}^{y_2}$$

$$=2\log\frac{y_2}{y_1}$$



参考　(2) の面積は，(1) を利用せずに，x について積分して求めることも可能である。
その際，[1] $0<x_1<x_2$，[2] $x_1<0<x_2$，[3] $x_1<x_2<0$ の 3 つの場合に分けて考えればよい。

2

解答　$\dfrac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})$

解説

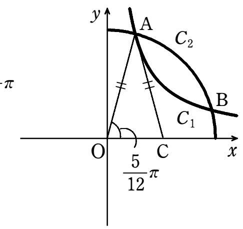
C_1 と C_2 は共に直線 $y=x$ に関して対称であるから，2 点 A，B も直線 $y=x$ に関して対称である。よって領域 $y>x$ にある方を A として考えてもよい。

$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ とすると，線分 OA の傾きは $\dfrac{1}{a^2}$ であり，これを $\tan\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。

$C_1：y=\dfrac{1}{x}$ より $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ であるから，接線 ℓ の傾きは $-\dfrac{1}{a^2}$ であり，また

$$-\frac{1}{a^2}=-\tan\theta=\tan(\pi-\theta)$$

よって，ℓ が x 軸と交わる点を C とすると，$\triangle$OAC は AO＝AC の二等辺三角形である。



$\angle\mathrm{OAC}=\dfrac{\pi}{6}$ であるから　$\theta=\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{ACO}=\dfrac{5}{12}\pi$

$$\frac{1}{a^2}=\tan\frac{5}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

$$a^2=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

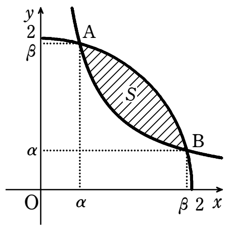
よって　$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{a}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

ゆえに　$\mathrm{A}(\sqrt{2-\sqrt{3}},\ \sqrt{2+\sqrt{3}})$，$\mathrm{B}(\sqrt{2+\sqrt{3}},\ \sqrt{2-\sqrt{3}})$

C_2 の半径は原点 O と点 A 間の距離であるから　$\sqrt{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}=2$

$\alpha=\sqrt{2-\sqrt{3}}$，$\beta=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ とおき，求める面積を S とすると　$S=\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{x}\right)dx$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{4-x^2}\,dx-\int_\alpha^\beta\frac{1}{x}dx$$



ここで　$2\sin\dfrac{5}{12}\pi=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\beta$，

$$2\cos\frac{5}{12}\pi=2\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\alpha$$

であるから，$x=2\sin t$ とおくと　$dx=2\cos t\,dt$

x	$\alpha\longrightarrow\beta$
t	$\dfrac{\pi}{12}\longrightarrow\dfrac{5}{12}\pi$

したがって　$S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}4\cos^2t\,dt-\int_\alpha^\beta\frac{1}{x}dx$

$$=2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}(1+\cos 2t)dt-\int_\alpha^\beta\frac{1}{x}dx$$

$$=2\Big[t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}-\Big[\log|x|\Big]_\alpha^\beta=2\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)-\log\frac{\beta}{\alpha}$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\log\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\frac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})$$

3

解答　(1) $\left(\cos t+\dfrac{\sqrt{d^2-\sin^2t}}{2},\ \dfrac{\sin t}{2}\right)$　(2) $\dfrac{\pi}{4}$

解説

(1) Q$(q,\ 0)$ とする。

$\triangle$OPQ において，余弦定理により

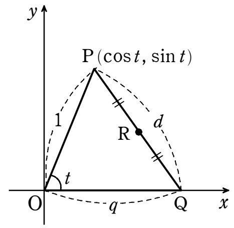
$$d^2=1+q^2-2q\cos t$$

よって　$q^2-2\cos t\cdot q+1-d^2=0$

ゆえに　$q=\cos t\pm\sqrt{\cos^2t-(1-d^2)}$

$$=\cos t\pm\sqrt{d^2-\sin^2t}$$

$q>0$ であるから　$q=\cos t+\sqrt{d^2-\sin^2t}$



したがって，R の座標は

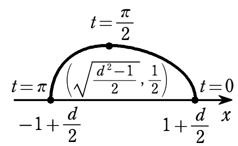
$$\left(\cos t+\frac{\sqrt{d^2-\sin^2t}}{2},\ \frac{\sin t}{2}\right)$$

(2) $x=\cos t+\dfrac{\sqrt{d^2-\sin^2t}}{2}$，$y=\dfrac{\sin t}{2}$ とおく。

$0\leqq t\leqq\pi$ における x，y の値の変化は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
x	$1+\dfrac{d}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{2}$	$\searrow$	$-1+\dfrac{d}{2}$
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

よって，曲線の概形は右の図のようになる。



$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における x を x_1，$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ における x を x_2 とすると，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}(x_1-x_2)dy$$

となる。ここで，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$x_1=x(t)=\cos t+\frac{\sqrt{d^2-\sin^2t}}{2}$$

$$x_2=x(\pi-t)=\cos(\pi-t)+\frac{\sqrt{d^2-\sin^2(\pi-t)}}{2}=-\cos t+\frac{\sqrt{d^2-\sin^2t}}{2}$$

よって　$x_1-x_2=2\cos t$　　また　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}\cos t$

ゆえに　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\cdot\frac{1}{2}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

4

解答　(1)　$f(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$，$g(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　(2)　略

(3)　$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{3}$

解説

(1)　$f'(t)=2\cos t-2\sin 2t=2\cos t(1-2\sin t)$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$f'(t)=0$ のとき　　$\cos t=0$　または　$\sin t=\dfrac{1}{2}$

よって　　$t=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$

したがって，$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

よって，$f(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。

次に $g(t)=2\cos t+\sin 2t$ について

$g'(t)=-2\sin t+2\cos 2t=-2\sin t+2(1-2\sin^2 t)$
$=-2(2\sin t-1)(\sin t+1)$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$g'(t)=0$ のとき

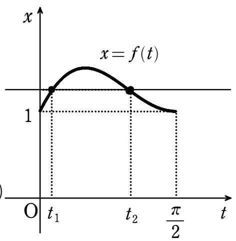
$2\sin t-1=0$　　したがって　　$t=\dfrac{\pi}{6}$

よって，$g(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

したがって，$g(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(2)　(1) の結果から，$x=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。



よって　　$0\leqq t_1<\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{6}<t_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$

また，$f(t_1)=f(t_2)$ のとき

$2\sin t_1+\cos 2t_1=2\sin t_2+\cos 2t_2$

$2\sin t_1+(1-2\sin^2 t_1)=2\sin t_2+(1-2\sin^2 t_2)$

ゆえに　$(\sin t_1-\sin t_2)\{1-(\sin t_1+\sin t_2)\}=0$

ここで，$0\leqq t_1<t_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　　$\sin t_1<\sin t_2$

したがって　　$\sin t_1+\sin t_2=1$　　ゆえに　$\sin t_2=1-\sin t_1$

$g(t_1)^2-g(t_2)^2=(2\cos t_1+\sin 2t_1)^2-(2\cos t_2+\sin 2t_2)^2$
$=(2\cos t_1+2\sin t_1\cos t_1)^2-(2\cos t_2+2\sin t_2\cos t_2)^2$
$=4\cos^2 t_1(1+\sin t_1)^2-4\cos^2 t_2(1+\sin t_2)^2$
$=4(1-\sin^2 t_1)(1+\sin t_1)^2-4(1-\sin^2 t_2)(1+\sin t_2)^2$
$=4(1-\sin t_1)(1+\sin t_1)^3-4(1-\sin t_2)(1+\sin t_2)^3$

ここで，$\sin t_2=1-\sin t_1$ であるから

$g(t_1)^2-g(t_2)^2=4(1-\sin t_1)(1+\sin t_1)^3-4\sin t_1(2-\sin t_1)^3$
$=4(-8\sin^3 t_1+12\sin^2 t_1-6\sin t_1+1)=4(1-2\sin t_1)^3$

$0\leqq t_1<\dfrac{\pi}{6}$ であるから　　$1-2\sin t_1>0$

よって　　$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$

(3)　(1) の結果より，x，y の増減は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	1	→	$\frac{3}{2}$	←	1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	2	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↓	0

また，(1) の結果より $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$g(t)\geqq 0$

であり，(2) の結果より $0\leqq t_1<t_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

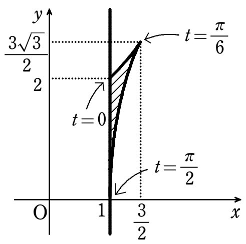
$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$

が成り立つ。

よって，$0\leqq t_1<t_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$g(t_1)>g(t_2)$

したがって，曲線 C の概形は右の図のようになる。

ゆえに，曲線 C と直線 $x=1$ が囲む領域は右の図の斜線部分のようになる。



$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ における y の値を y_1，$\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における y の値を y_2 とすると，求める面積 S は

$S=\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}y_1dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_2dx$

ここで，$\dfrac{dx}{dt}=2\cos t-2\sin 2t$ であるから

$dx=(2\cos t-2\sin 2t)dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

y_1：

x	1	→	$\frac{3}{2}$
t	0	→	$\frac{\pi}{6}$

y_2：

x	1	→	$\frac{3}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	→	$\frac{\pi}{6}$

よって

$S=\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}y_1dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_2dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos t+\sin 2t)\cdot(2\cos t-2\sin 2t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos t+\sin 2t)\cdot(2\cos t-2\sin 2t)dt$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+\sin 2t)(2\cos t-2\sin 2t)dt$

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 t-\sin 2t\cos t-\sin^2 2t)dt$

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}-2\sin t\cos t\cdot\cos t-\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\cos 2t-2\sin t\cos^2 t+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt$

$=2\left[\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}\sin 2t+\dfrac{2}{3}\cos^3 t+\dfrac{1}{8}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{3}$

5

解答　(1)　略　　(2)　$s=1$ のとき 1 個，$s>1$ のとき 2 個

(3)　$\dfrac{1}{6}\left(a^3-\dfrac{1}{a^3}\right)+\dfrac{3}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)-2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\log a$

解説

(1)　$h(t)=g(t)-g\left(\dfrac{1}{t}\right)$　$(t>1)$ とおくと

$h(t)=t^2-2\log t-\left(\dfrac{1}{t^2}+2\log t\right)=t^2-\dfrac{1}{t^2}-4\log t$

よって　　$h'(t)=2t+\dfrac{2}{t^3}-\dfrac{4}{t}=\dfrac{2}{t^3}(t^4+1-2t^2)=\dfrac{2}{t^3}(t^2-1)^2>0$

ゆえに，$h(t)$ は単調に増加し，$h(1)=0$ であるから　　$h(t)>0$

よって，$t>1$ のとき　　$g(t)>g\left(\dfrac{1}{t}\right)$

(2)　$\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{2}\left(s+\dfrac{1}{s}\right)$　……①　とすると　　$t-s+\dfrac{s-t}{ts}=0$

よって　　$(t-s)\left(1-\dfrac{1}{ts}\right)=0$　　ゆえに　　$t=s$，$\dfrac{1}{s}$

[1]　$s=1$ のとき　　$s=\dfrac{1}{s}=1$

よって，このとき ① を満たす t は $t=1$ であり，求める共有点の個数は　　1 個

[2]　$s>1$ のとき　　$s>1>\dfrac{1}{s}$

ゆえに，このとき ① を満たす t は $t=s$，$\dfrac{1}{s}$ であり，(1) から，$(f(s),\ g(s))$，$\left(f\left(\dfrac{1}{s}\right),\ g\left(\dfrac{1}{s}\right)\right)$ は相異なる 2 点である。

よって，求める共有点の個数は　　2 個

(3)　$x=f(t)$，$y=g(t)$ とすると

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)=\dfrac{(t+1)(t-1)}{2t^2}$

$t>0$ であるから，$\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると　　$t=1$

また　　$\dfrac{dy}{dt}=2t-\dfrac{2}{t}=\dfrac{2(t+1)(t-1)}{t}$

$t>0$ であるから，$\dfrac{dy}{dt}=0$ とすると　　$t=1$

t (>0) に対する x，y の増減は右のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$
x		↘	1	↗
$\frac{dy}{dt}$		$-$	0	$+$
y		↘	1	↗

実数 u は $u\geqq 1$ の範囲を動くとすると　　$0<\dfrac{1}{u}\leqq 1$

$t=u$ のときの曲線 C を C_u，$t=\dfrac{1}{u}$ のときの曲線 C を $C_{\frac{1}{u}}$ とする。

$u>1$ のとき，C_u と直線 $x=\dfrac{1}{2}\left(s+\dfrac{1}{s}\right)$ の交点の座標は，

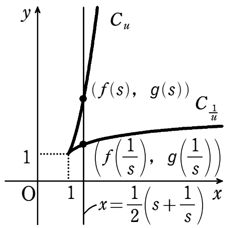
(2) から　　$(f(s),\ g(s))$

$u>1$ のとき，$C_{\frac{1}{u}}$ と直線 $x=\dfrac{1}{2}\left(s+\dfrac{1}{s}\right)$ の交点の座標は，

(2) から　$\left(f\left(\dfrac{1}{s}\right),\ g\left(\dfrac{1}{s}\right)\right)$

$s>1$ のとき，(1) から　$g(s)>g\left(\dfrac{1}{s}\right)$

よって，曲線 C の概形は右の図のようになる。



ここで，曲線 C_u において，x と t の対応は右の [1] のようになる。

曲線 $C_{\frac{1}{u}}$ において，x と t の対応は右の [2] のようになる。

[1]

x	$1\to\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$
t	$1\to a$

[2]

x	$1\to\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$
t	$1\to\dfrac{1}{a}$

ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_1^a g(t)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt-\int_1^{\frac{1}{a}} g(t)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\int_{\frac{1}{a}}^a(t^2-2\log t)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^a(t^2-1)dt-\int_{\frac{1}{a}}^a\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_{\frac{1}{a}}^a-\left[\left(t+\frac{1}{t}\right)\log t\right]_{\frac{1}{a}}^a+\int_{\frac{1}{a}}^a\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{1}{6}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)\log a+\left(a+\frac{1}{a}\right)\log\frac{1}{a}\ +\left[t-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{a}}^a$$

$$=\frac{1}{6}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)-2\left(a+\frac{1}{a}\right)\log a+a-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+a$$

$$=\frac{1}{6}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)-2\left(a+\frac{1}{a}\right)\log a$$

$\boxed{6}$

解答　$\dfrac{32}{9}$

解説

$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin 2t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t=\sqrt{1+t^2}\sin(t+\alpha)$

ただし，α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ を満たす角である。

$0<t<2\pi$ において　$\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3}{2}\pi$

$\dfrac{dy}{dt}=0$ とすると　$t=\pi-\alpha$，$2\pi-\alpha$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ における x，y の値の変化は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$2\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	1	↘	-1	↗	↗	↗	1	↘	-1	↗	↗	↗	1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗		↘	0	↘	$-\frac{3}{2}\pi$	↘		↗	0

なお，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる θ に対し，$x=\cos 2\theta$ となる t は

$t=\theta$，$\pi-\theta$，$\pi+\theta$，$2\pi-\theta$

この 4 つの t の値に対応する y の値をそれぞれ y_θ，$y_{\pi-\theta}$，$y_{\pi+\theta}$，$y_{2\pi-\theta}$ とすると

$y_\theta=\theta\sin\theta$

$y_{\pi-\theta}=(\pi-\theta)\sin(\pi-\theta)=(\pi-\theta)\sin\theta$

$y_{\pi+\theta}=(\pi+\theta)\sin(\pi+\theta)=-(\pi+\theta)\sin\theta$

$y_{2\pi-\theta}=(2\pi-\theta)\sin(2\pi-\theta)=-(2\pi-\theta)\sin\theta$

ここで　$y_{\pi-\theta}-y_\theta=(\pi-2\theta)\sin\theta>0$

$y_{\pi+\theta}-y_{2\pi-\theta}=(\pi-2\theta)\sin\theta>0$

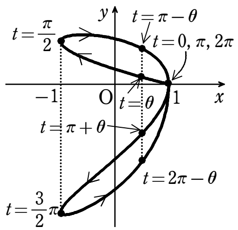
また　$y_\theta>0>y_{\pi+\theta}$

ゆえに　$y_{\pi-\theta}>y_\theta>y_{\pi+\theta}>y_{2\pi-\theta}$

よって，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$，$\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi$，

$\dfrac{3}{2}\pi<t<2\pi$ の各区間において曲線は交点をもたない。

よって，曲線の概形は右の図のようになる。



$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における y を y_1，$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ における y を y_2，$\pi\leqq t\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ における y を y_3，

$\dfrac{3}{2}\pi\leqq t\leqq 2\pi$ における y を y_4 とすると，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^1(y_2-y_1)dx+\int_{-1}^1(y_3-y_4)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}y\frac{dx}{dt}dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{dt}dt+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi}y\frac{dx}{dt}dt-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_0^{\pi}y\frac{dx}{dt}dt-\int_{\pi}^{2\pi}y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_0^{\pi}t\sin t(-2\sin 2t)dt-\int_{\pi}^{2\pi}t\sin t(-2\sin 2t)dt$$

ここで　$\displaystyle\int 2t\sin t\sin 2t\,dt=\int 4t\sin^2 t\cos t\,dt=\frac{4}{3}t\sin^3 t-\frac{4}{3}\int\sin^3 t\,dt$

$$=\frac{4}{3}t\sin^3 t-\frac{4}{3}\int(1-\cos^2 t)\sin t\,dt$$

$$=\frac{4}{3}t\sin^3 t-\frac{4}{3}\int\{\sin t+\cos^2 t(\cos t)'\}dt$$

$$=\frac{4}{3}t\sin^3 t+\frac{4}{3}\cos t-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos^3 t+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

よって　$\displaystyle S=-\left[\frac{4}{3}t\sin^3 t+\frac{4}{3}\cos t-\frac{4}{9}\cos^3 t\right]_0^{\pi}+\left[\frac{4}{3}t\sin^3 t+\frac{4}{3}\cos t-\frac{4}{9}\cos^3 t\right]_{\pi}^{2\pi}$

$$=\frac{4}{3}-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}-\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$$

$\boxed{7}$

解答　(1) 略　(2) $S_n+S_{n+1}=\dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$　(3) $1-\dfrac{1}{e^a}$

解説

(1) $f_n(x)=\dfrac{(\log x)^n}{n!}$　…… ① とする。

[1] $n=1$ のとき　$f_1(x)=\log x$ であるから，① が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　$f_k(x)=\dfrac{(\log x)^k}{k!}$

$n=k+1$ のとき，与えられた条件から

$$f_{k+1}(x)=\int_1^x\frac{f_k(t)}{t}dt=\int_1^x\frac{(\log t)^k}{k!}\cdot\frac{1}{t}dt=\frac{1}{k!}\int_1^x(\log t)^k\cdot(\log t)'dt$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}(\log t)^{k+1}\right]_1^x=\frac{(\log x)^{k+1}}{(k+1)!}$$

よって，① は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] より，① はすべての自然数 n について成り立つ。

(2) $0<a\leqq 1$ から　$e^0<a^a\leqq e^1$

ゆえに　$1<e^a\leqq e$

$f_n(x)=0$ とすると　$\dfrac{(\log x)^n}{n!}=0$

よって　$x=1$

また，$x\geqq 1$ のとき $\log x\geqq 0$ であるから　$f_n(x)\geqq 0$

よって　$S_n=\displaystyle\int_1^{e^a}f(x)dx$　($n=1$，2，3，……)

ゆえに，各 $n=1$，2，3，…… に対して

$$S_{n+1}=\int_1^{e^a}f_{n+1}(x)dx=\int_1^{e^a}\frac{(\log x)^{n+1}}{(n+1)!}dx$$

$$=\left[x\cdot\frac{(\log x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_1^{e^a}-\int_1^{e^a}x\cdot\frac{(\log x)^n}{n!}\cdot\frac{1}{x}dx$$

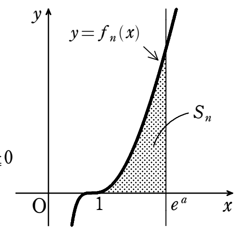
$$=\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}-\int_1^{e^a}\frac{(\log x)^n}{n!}dx$$

$$=\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}-S_n$$

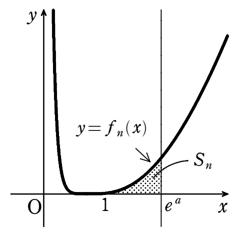
したがって　$S_n+S_{n+1}=\dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

$y=f_n(x)$ の概形

[1] n が奇数のとき



[2] n が偶数のとき



(3) (2) より　$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{1}{e^a}(S_n+S_{n+1})$　($n=1$，2，3，……)

よって，与えられた無限級数の第 n 項までの部分和を T_n とすると

$$T_n=\frac{a}{1!}-\frac{a^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}a^n}{n!}=a+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k a^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$=a+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(S_k+S_{k+1})}{e^a}$$

$$=a+\frac{1}{e^a}\{-S_1+(-1)^{n-1}S_n\}\quad\cdots\cdots ②$$

ここで，$S_n>0$，$0<a\leqq 1$ であるから

$$0<S_n<S_n+S_{n+1}=\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\frac{e^a}{(n+1)!}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^a}{(n+1)!}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=0$

ゆえに，② より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=a-\frac{1}{e^a}S_1$

$\displaystyle S_1=\int_1^{e^a}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^{e^a}=e^a a-e^a+1$ であるから，求める無限級数の和は

$$\lim_{n\to\infty}T_n=a-\frac{1}{e^a}(e^a a-e^a+1)=1-\frac{1}{e^a}$$

8

解答　(1)　$a_n=(2+\sqrt{5})e^{-n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$　　(2)　$1-\dfrac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

解説

(1)　$f_n'(x)=a_n\{n+1-x-(x-n)\}=a_n(2n+1-2x)$

$g(x)=e^{-x}$ とすると　$g'(x)=-e^{-x}$

2つの曲線が接するための条件は，$f_n(t)=g(t)$，$f_n'(t)=g'(t)$ となる実数 t があることである。

$f_n(t)=g(t)$ から　$a_n(t-n)(n+1-t)=e^{-t}$ ……①

$f_n'(t)=g'(t)$ から　$a_n(2n+1-2t)=-e^{-t}$ ……②

①+② から　$a_n\{(t-n)(n+1-t)+2n+1-2t\}=0$

$a_n>0$ であるから　$t^2-(2n-1)t+n^2-n-1=0$

よって　$t=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}}{2}=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$a_n>0$，$e^{-t}>0$ であるから，② より　$2n+1-2t<0$

ゆえに　$t>n+\dfrac{1}{2}$

よって　$t=\dfrac{2n-1+\sqrt{5}}{2}$

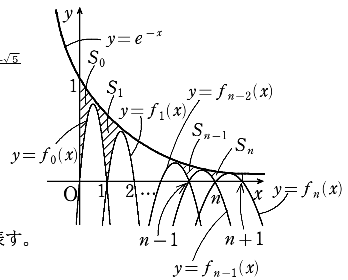
これを ② に代入して

$a_n\{2n+1-(2n-1+\sqrt{5})\}=-e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$

ゆえに　$(2-\sqrt{5})a_n=-e^{-n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

したがって

$a_n=(2+\sqrt{5})e^{-n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$



(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}S_k$ は，右の図の斜線部分の面積を表す。

面積の大小関係から

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\{e^{-x}-f_k(x)\}dx<\sum_{k=0}^{n}S_k<\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\{e^{-x}-f_k(x)\}dx \quad\cdots\cdots③$$

ここで，$\displaystyle T_n=\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\{e^{-x}-f_k(x)\}dx$　とおくと，③ から

$$T_{n-1}<\sum_{k=0}^{n}S_k<T_n \quad\cdots\cdots④$$

$$\int_k^{k+1}\{e^{-x}-f_k(x)\}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_k^{k+1}+a_k\int_k^{k+1}(x-k)\{x-(k+1)\}dx$$

$$=e^{-k}-e^{-(k+1)}-\frac{a_k}{6}\{(k+1)-k\}^3=e^{-k}-e^{-(k+1)}-\frac{a_k}{6}$$

よって　$\displaystyle T_n=\sum_{k=0}^{n}\left\{e^{-k}-e^{-(k+1)}-\frac{a_k}{6}\right\}$

$$=e^0-e^{-(n+1)}-\frac{2+\sqrt{5}}{6}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{-k}$$

$$=1-e^{-(n+1)}-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_{n-1}=\lim_{n\to\infty}T_n$ であるから，④ より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

9

解答　(1)　$T_n=T_1(e^{-k})^{n-1}$，$S_N=\dfrac{T_1(1-e^{-kN})}{1-e^{-k}}$

(2)　$N=\left[\dfrac{z}{k}\right]$　　ただし，$\left[\dfrac{z}{k}\right]$ は $\dfrac{z}{k}$ 以下の最大の整数。

$\displaystyle\lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-x}f(x)dx=\frac{T_1}{1-e^{-k}}$

(3)　$\displaystyle\lim_{z\to\infty}V(z)=\frac{2\pi\sqrt{e}+e-1}{(e-1)(\pi^2+1)}$

解説

(1)　$\displaystyle T_1=\int_0^k e^{-x}f(x)dx$ である。

$\displaystyle T_n=\int_{k(n-1)}^{kn}e^{-x}f(x)dx$ において，$x-k(n-1)=t$ とおくと　$x=t+k(n-1)$，$dx=dt$

x	$k(n-1)\ \to\ kn$
t	$0\ \to\ k$

よって　$\displaystyle T_n=\int_0^k e^{-\{t+k(n-1)\}}f(t+k(n-1))dt$

$$=e^{-k(n-1)}\int_0^k e^{-t}f(t+k(n-1))dt$$

ここで　$f(t)=f(t+k)=f(t+2k)=\cdots\cdots=f(t+k(n-1))$

ゆえに　$\displaystyle T_n=e^{-k(n-1)}\int_0^k e^{-t}f(t)dt$

$=e^{-k(n-1)}T_1$

$=T_1(e^{-k})^{n-1}$

よって，数列 $\{T_n\}$ は初項 T_1，公比 e^{-k} の等比数列である。

$k>0$ より，$0<e^{-k}<1$ であるから　$\displaystyle S_N=\sum_{n=1}^{N}T_n=\frac{T_1(1-e^{-kN})}{1-e^{-k}}$

(2)　$\displaystyle S_N=\sum_{n=1}^{N}T_n=\sum_{n=1}^{N}\int_{k(n-1)}^{kn}e^{-x}f(x)dx=\int_0^{kN}e^{-x}f(x)dx$

よって，設問の条件式は

$$\int_0^{kN}e^{-x}f(x)dx\leqq\int_0^z e^{-x}f(x)dx<\int_0^{k(N+1)}e^{-x}f(x)dx \quad\cdots\cdots①$$

ここで，$f(x)\geqq 0$ より　$e^{-x}f(x)\geqq 0$

ゆえに，不等式 ① が成立するための N の条件は

$kN\leqq z<k(N+1)$　すなわち　$\dfrac{z}{k}-1<N\leqq\dfrac{z}{k}$

z は k 以上の実数より，$\dfrac{z}{k}-1$ は 0 以上の実数であるから，求める正の整数 N は

$N=\left[\dfrac{z}{k}\right]$　　ただし，$\left[\dfrac{z}{k}\right]$ は $\dfrac{z}{k}$ 以下の最大の整数を表す。

また，$k>0$ であるから，$z\longrightarrow\infty$ のとき　$\left[\dfrac{z}{k}\right]\longrightarrow\infty$

すなわち　$N\longrightarrow\infty$

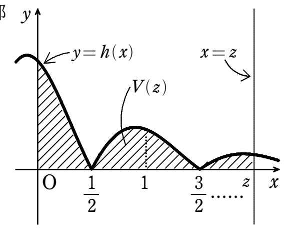
更に，(1) より　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\frac{T_1(1-e^{-kN})}{1-e^{-k}}=\frac{T_1}{1-e^{-k}}$

同様に　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_{N+1}=\frac{T_1}{1-e^{-k}}$

したがって，はさみうちの原理により

$$\lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-x}f(x)dx=\frac{T_1}{1-e^{-k}}$$

(3)　$y=h(x)$，x 軸，y 軸および $x=z$ で囲まれた部分は右の図の斜線部分のようになり



$\displaystyle V(z)=\int_0^z h(x)dx$

ここで，$f(x)=|\cos\pi x|$ とすると，関数 $f(x)$ は

$f(x)=f(x+1)$

を満たし，また，$f(x)\geqq 0$ である。

一方，$h(x)=e^{-x}f(x)$ であるから

$\displaystyle V(z)=\int_0^z e^{-x}f(x)dx$

よって，$z\geqq k=1$ として，(1)，(2) の結果を適用すると，極限

$\displaystyle\lim_{z\to\infty}V(z)=\lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-x}f(x)dx$ が存在して

$$\lim_{z\to\infty}V(z)=\frac{1}{1-e^{-1}}\int_0^1 e^{-x}|\cos\pi x|dx$$

$$=\frac{1}{1-e^{-1}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x}\cos\pi x\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x}\cos\pi x\,dx\right)$$

ここで，$\displaystyle I=\int e^{-x}\cos\pi x\,dx$ とおくと

$\displaystyle I=\int(-e^{-x})'\cos\pi x\,dx$

$\displaystyle=-e^{-x}\cos\pi x+\int e^{-x}\cdot(-\pi\sin\pi x)dx$

$\displaystyle=-e^{-x}\cos\pi x+\pi\int(e^{-x})'\cdot\sin\pi x\,dx$

$=e^{-x}(\pi\sin\pi x-\cos\pi x)-\pi^2 I$

ゆえに　$I=\dfrac{1}{\pi^2+1}e^{-x}(\pi\sin\pi x-\cos\pi x)+C$ (C は積分定数)

したがって

$\displaystyle\lim_{z\to\infty}V(z)$

$$=\frac{1}{1-e^{-1}}\cdot\frac{1}{\pi^2+1}\left\{\left[e^{-x}(\pi\sin\pi x-\cos\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}}-\left[e^{-x}(\pi\sin\pi x-\cos\pi x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\right\}$$

$$=\frac{2\pi\sqrt{e}+e-1}{(e-1)(\pi^2+1)}$$

$\boxed{10}$

解答 (1) $\dfrac{38}{105}-\dfrac{26\sqrt{2}}{105}$　　(2) 略

解説

(1) $I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\sin^3\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^2(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$

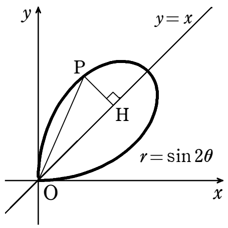
$\cos\theta=t$ とおくと　$-\sin\theta\,d\theta=dt$, $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ から　$1\geqq t\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

また　$(2t^2-1)^2(1-t^2)=(4t^4-4t^2+1)(1-t^2)=-(4t^6-8t^4+5t^2+1)$

$$I_2=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(4t^6-8t^4+5t^2-1)dt=\left[\frac{4}{7}t^7-\frac{8}{5}t^5+\frac{5}{3}t^3-t\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{8}-\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(\frac{4}{7}-\frac{8}{5}+\frac{5}{3}-1\right)=\frac{38}{105}-\frac{26\sqrt{2}}{105}$$ 答

(2) 点Pから直線 $y=x$ に下ろした垂線の足をHとする．



$r=\sin 2\theta$, $t=\mathrm{OH}=r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

ただし　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{PH}=r\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ から

$$V=\pi\int_0^1\mathrm{PH}^2dt$$

$u=\theta-\dfrac{\pi}{4}$ とおくと　$\sin 2\theta=\sin\left(2u+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 2u$

$\mathrm{PH}=\sin 2\theta\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos 2\theta\sin u$

$t=\sin 2\theta\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos 2u\cos u$ から　$dt=-(2\sin 2u\cos u+\cos 2u\sin u)du$

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から　$0\leqq u\leqq\dfrac{\pi}{4}$　また　$du=d\theta$

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2u\sin^2 u(2\sin 2u\cos u+\cos 2u\sin u)du$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2u\cos^2 u\sin^3 u\,du+\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 2u\sin^3 u\,du$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2u(1+\cos 2u)\sin^3 u\,du+\pi I_3$$

$$=2\pi(I_2+I_3)+\pi I_3=3\pi I_3+2\pi I_2$$

$\boxed{11}$

解答 (1) $L_n=L_1$　　(2) 0

解説

(1) $f_n{}'(x)n=\cos nx$ から

$$L_n=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 nx}\,dx\qquad 特に\quad L_1=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

k を整数とすると，$\cos^2 x$ の周期は π であるから

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=L_1$$

L_n において $nx=u$ とおくと

$ndx=du$ から

x	$0\longrightarrow\ \pi$
u	$0\longrightarrow n\pi$

$$L_n=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\cos^2 u}\,du$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sqrt{1+\cos^2 u}\,du=\frac{1}{n}\cdot nL_1=L_1$$

(2) $\left(1+\dfrac{1}{2}t\right)^2-(\sqrt{1+t})^2=\dfrac{1}{4}t^2>0$ から　$(\sqrt{1+t})^2<\left(1+\dfrac{1}{2}t\right)^2$

$t>0$ のとき，$\sqrt{1+t}>0$，$1+\dfrac{1}{2}t>0$ であるから　$\sqrt{1+t}<1+\dfrac{1}{2}t$

ゆえに　$L_n=L_1=\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

$$<\int_0^{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2 x\right)dx=\left[x+\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi}=\frac{5}{4}\pi\quad\cdots\cdots①$$

また　$-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\sin nx\leqq\dfrac{1}{n}$ から　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$

ゆえに　$L=\pi$　……②

①，②により　$\dfrac{4(L_n-L)}{L}<\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{5}{4}\pi-\pi\right)=1$

また，$L_n\geqq L$ であるから　$0\leqq\dfrac{4(L_n-L)}{L}=\dfrac{4(L_1-L)}{L}<1$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4(L_n-L)}{L}\right\}^n=0$

$\boxed{12}$

解答 (1) $0\leqq t\leqq 1$ のとき最大値は $\sqrt{t+2\sqrt{t}+2}$，最小値は $\sqrt{t-2\sqrt{t}+2}$，
$1\leqq t\leqq 4$ のとき最大値は $\sqrt{t+2\sqrt{t}+2}$，最小値は1

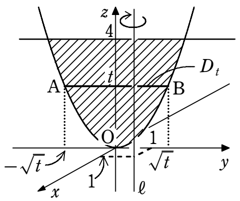
(2) $0\leqq t\leqq 1$ のとき $S(t)=4\pi\sqrt{t}$，$1\leqq t\leqq 4$ のとき $S(t)=\pi(t+2\sqrt{t}+1)$

(3) $\dfrac{45}{2}\pi$

解説

(1) 平面 $z=t$ と yz 平面上の放物線 $z=y^2$ との交点の座標は

$(0,\ -\sqrt{t},\ t)$，$(0,\ \sqrt{t},\ t)$



$\mathrm{A}(0,\ -\sqrt{t},\ t)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{t},\ t)$ とおくと，D_t は線分ABであるから，点Pは線分AB上を動く。

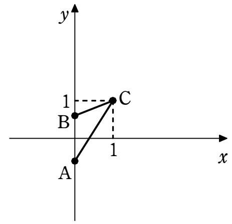
点 $(1,\ 1,\ t)$ をCとして，点Cから直線ABに垂線CHを引くと　$\mathrm{CH}=1$

点Hの座標は $\mathrm{H}(0,\ 1,\ t)$ であるから，Hが線分AB上にあるのは

$\sqrt{t}\geqq 1$ すなわち $1\leqq t\leqq 4$

のときである。

[1] $0\leqq t\leqq 1$ のとき



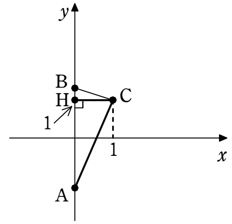
点Pと点Cの距離の最大値は

$$\mathrm{CA}=\sqrt{1+\{1-(-\sqrt{t})\}^2}$$
$$=\sqrt{t+2\sqrt{t}+2}$$

最小値は

$$\mathrm{CB}=\sqrt{1+(1-\sqrt{t})^2}$$
$$=\sqrt{t-2\sqrt{t}+2}$$

[2] $1\leqq t\leqq 4$ のとき



点Pと点Cの距離の最大値は

$$\mathrm{CA}=\sqrt{t+2\sqrt{t}+2}$$

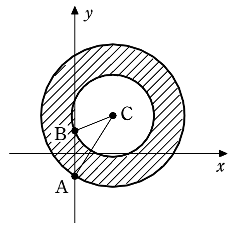
最小値は　$\mathrm{CH}=1$

[1]，[2]から，点Pと点Cの距離の最大値，最小値は

$0\leqq t\leqq 1$ のとき　最大値　$\sqrt{t+2\sqrt{t}+2}$，
　　　　　　　　最小値　$\sqrt{t-2\sqrt{t}+2}$

$1\leqq t\leqq 4$ のとき　最大値　$\sqrt{t+2\sqrt{t}+2}$，
　　　　　　　　最小値　1

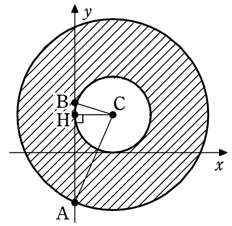
(2) 平面 $z=t$ による E の切り口は，線分ABを直線 ℓ の周りに1回転させてできる図形である。点Cは平面 $z=t$ と直線 ℓ の交点であるから，その面積は平面 $z=t$ 上で，線分ABが点Cを中心に1回転したときに通過する領域の面積に等しい。



[1] $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$$S(t)=\pi\mathrm{CA}^2-\pi\mathrm{CB}^2$$
$$=\pi(t+2\sqrt{t}+2)-\pi(t-2\sqrt{t}+2)$$
$$=4\pi\sqrt{t}$$

[2] $1\leqq t\leqq 4$ のとき



$$S(t)=\pi\mathrm{CA}^2-\pi\mathrm{CH}^2$$
$$=\pi(t+2\sqrt{t}+2)-\pi$$
$$=\pi(t+2\sqrt{t}+1)$$

(3) (2)の結果から

$$V=\int_0^4 S(t)dt$$
$$=\int_0^1 4\pi\sqrt{t}\,dt+\int_1^4\pi(t+2\sqrt{t}+1)dt$$
$$=4\pi\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1+\pi\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t\sqrt{t}+t\right]_1^4$$
$$=\frac{45}{2}\pi$$

$\boxed{13}$

解答 (1) $2\theta-\sin 2\theta$　　(2) $\dfrac{4}{3}$

解説

(1) 点Pが線分OA上を，点Qが円 W の周および内部を動くとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 0,\ t)\ (0\leqq t\leqq 1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha,\ 0)\ (0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\alpha\leqq 2\pi)$$

と表され

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t,\ 0,\ t)+(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha,\ 0)$

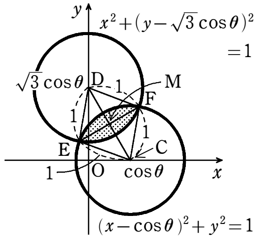
よって，点 R は平面 $z=t$ 上で，点 $(t,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 1 の周および内部を動く。

同様に，点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(0,\ \sqrt{3}\,t,\ t)+(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha,\ 0)$

$(0\leqq t\leqq 1,\ 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq \alpha\leqq 2\pi)$

と表されるから，点 R は平面 $z=t$ 上で点 $(0,\ \sqrt{3}\,t,\ t)$ を中心とする半径 1 の周および内部を動く。



ゆえに，平面 $z=\cos\theta$ による立体 V の切り口は，右の図の黒く塗った部分のようになる。右の図のように，点 C，D，E，F をとると

CE$=$CF$=$DE$=$DF$=1$

よって，四角形 CFDE はひし形であるから，対角線 CD，EF は互いにその中点で交わる。

その中点を M とすると

$$\mathrm{CM}=\frac{1}{2}\mathrm{CD}=\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\theta+(\sqrt{3}\cos\theta)^2}=\cos\theta$$

直角三角形 CEM に注目すると，CE$=1$ であることから

$\angle\mathrm{ECM}=\theta$

ゆえに，求める切り口の面積を S とすると

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 2\theta=\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

よって　$S=2\theta-\sin 2\theta$

(2)　求める立体の体積は　$\displaystyle\int_0^1 S\,dz$

$z=\cos\theta$ とすると　　$dz=-\sin\theta\,d\theta$

z	$0\longrightarrow 1$
θ	$\dfrac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

(1) の結果から

$$\int_0^1 S\,dz=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(2\theta-\sin 2\theta)(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\sin\theta-\sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{2\theta(-\cos\theta)'-2\sin^2\theta\cos\theta\}\,d\theta$$

$$=2\left(\Big[-\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta-\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=2\left(\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

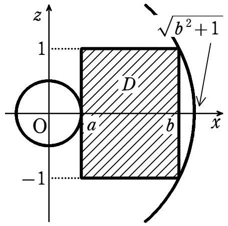
14

解答　(1)　$\dfrac{4}{3}\pi\{(\sqrt{b^2+1})^3-a^3\}$　　(2)　$\dfrac{4}{3}\pi(b^3-a^3)+2\pi b$

(3)　立体 V の体積の方が立体 W の体積よりも大きい

解説

(1)　xz 平面上で，領域 D は右の図の斜線部分である。

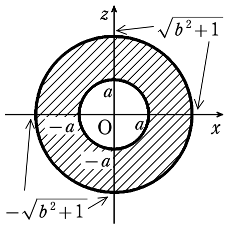


よって，原点 O を中心とする半径 r の円が D の周および内部と共有点をもつのは $a\leqq r\leqq\sqrt{b^2+1}$ のときである。

ゆえに，D を y 軸の周りに 1 回転させてできる図形 E は

$a^2\leqq x^2+z^2\leqq b^2+1,\ y=0$

であり，次の図の斜線部分のようになる。



したがって，E を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体 V の体積は

$$\frac{4}{3}\pi(\sqrt{b^2+1})^3-\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{4}{3}\pi\{(\sqrt{b^2+1})^3-a^3\}$$

(2)　D を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体 F は

$a^2\leqq x^2+y^2\leqq b^2,\ -1\leqq z\leqq 1$

を満たす立体である。

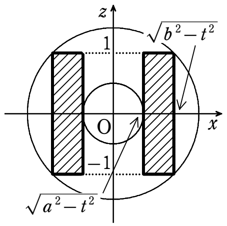
立体 F の平面 $y=t\ (-b\leqq t\leqq b)$ での切り口を G_t とし，立体 W の平面 $y=t\ (-b\leqq t\leqq b)$ での切り口の面積を $S(t)$ とする。

[1]　$-a\leqq t\leqq a$ のとき

領域 G_t は

$a^2-t^2\leqq x^2\leqq b^2-t^2,\ y=t,\ -1\leqq z\leqq 1$

を満たし，右の図の斜線部分のようになる。



(1) と同様に考えると，G_t を y 軸の周りに 1 回転させてできる図形は

$a^2-t^2\leqq x^2+z^2\leqq b^2-t^2+1,\ y=t,$

$-1\leqq z\leqq 1$

を満たす。

したがって　$S(t)=\pi(\sqrt{b^2-t^2+1})^2-\pi(\sqrt{a^2-t^2})^2$

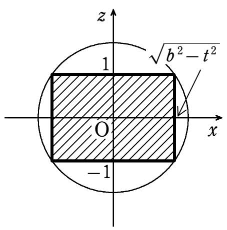
$=\pi(b^2-a^2+1)$

[2]　$-b\leqq t\leqq -a,\ a\leqq t\leqq b$ のとき

領域 G_t は

$0\leqq x^2\leqq b^2-t^2,\ y=t,\ -1\leqq z\leqq 1$

を満たし，右の図の斜線部分のようになる。



(1) と同様に考えると，G_t を y 軸の周りに 1 回転させてできる図形は

$0\leqq x^2+z^2\leqq b^2-t^2+1,\ y=t,\ -1\leqq z\leqq 1$

を満たす。

したがって，$-b\leqq t\leqq -a,\ a\leqq t\leqq b$ のとき

$S(t)=\pi(\sqrt{b^2-t^2+1})^2=\pi(b^2-t^2+1)$

立体 W が zx 平面に関して対称であることから，[1]，[2] より，求める体積は

$$2\int_0^b S(t)\,dt=2\int_0^a S(t)\,dt+2\int_a^b S(t)\,dt$$

$$=2\int_0^a\pi(b^2-a^2+1)\,dt+2\int_a^b\pi(b^2-t^2+1)\,dt$$

$$=2\pi a(b^2-a^2+1)+2\pi\left[-\frac{1}{3}t^3+(b^2+1)t\right]_a^b$$

$$=\frac{4}{3}\pi(b^3-a^3)+2\pi b$$

(3)　(1)，(2) から，立体 V と立体 W の体積の差は

$$\frac{4}{3}\pi\{(\sqrt{b^2+1})^3-a^3\}-\left\{\frac{4}{3}\pi(b^3-a^3)+2\pi b\right\}=\frac{4}{3}\pi\left\{(\sqrt{b^2+1})^3-b^3-\frac{3}{2}b\right\}$$

ここで，$(\sqrt{b^2+1})^3>0,\ b^3+\dfrac{3}{2}b>0$ で

$$\{(\sqrt{b^2+1})^3\}^2-\left(b^3+\frac{3}{2}b\right)^2=(b^2+1)^3-\left(b^3+\frac{3}{2}b\right)^2$$

$$=b^6+3b^4+3b^2+1-\left(b^6+3b^4+\frac{9}{4}b^2\right)$$

$$=\frac{3}{4}b^2+1>0$$

であるから　　$(\sqrt{b^2+1})^3>b^3+\dfrac{3}{2}b$

したがって，立体 V の体積の方が立体 W の体積よりも大きい。

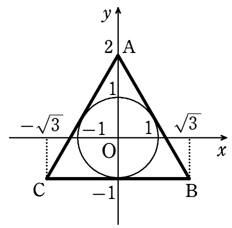
15

解答　$4\sqrt{3}-2\pi$

解説

3 点 A，B，C はすべて xy 平面上にあり

AB$=$BC$=$CA$=2\sqrt{3}$



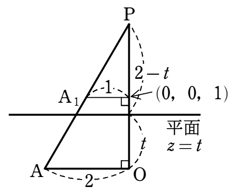
よって，△ABC は正三角形である。

また，OP⊥(xy 平面) である。

四面体 PABC の $x^2+y^2\geqq 1$ を満たす部分を K とし，立体 K を平面　$z=t\ (0\leqq t\leqq 2)$ で切ったときの切り口について考える。

平面　$z=t$　と辺 PA，PB，PC の交点をそれぞれ A_t，B_t，C_t とする。

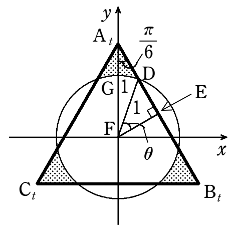
ここで，OA$=$OB$=$OC$=2$ であるから，平面 $z=1$ 上の点 $(0,\ 0,\ 1)$ と点 A_1，B_1，C_1 の距離はすべて　1



ゆえに，立体 K は $z>1$ の範囲には存在しないから，$0\leqq t\leqq 1$ として考える。

直線 AP は，$x=0,\ \dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1$ と表されるから，点 A_t の座標は　　$(0,\ 2-t,\ t)$

立体 K の平面 $z=t$ による切り口は，右の図の黒く塗った部分である。



ここで，$\triangle\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t\mathrm{C}_t$ は正三角形であり，黒く塗った 3 つの部分は，すべて合同な図形である。

よって，右の図の黒く塗った部分のうち，$y\geqq 0$ の範囲にあるものの面積 S_A について考える。

図のように点 D，E，F，G をとると

$$\frac{S_A}{2}=\triangle\mathrm{FA}_t\mathrm{E}-\triangle\mathrm{FED}-\text{扇形FGD}$$

$\angle\mathrm{FA}_t\mathrm{E}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ であるから　　$\mathrm{FE}=\mathrm{FA}_t\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2-t}{2}$

FD$=1$ であるから　　$\mathrm{DE}=\sqrt{1-\mathrm{FE}^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2-t}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{4t-t^2}}{2}$

また　$A_tE=FA_t\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)$

ゆえに，$\triangle FA_tE$ の面積は

$$\frac{1}{2}A_tE\cdot FE=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)\cdot\frac{2-t}{2}=\frac{\sqrt{3}(2-t)^2}{8}$$

$\triangle FED$ の面積は　$\frac{1}{2}DE\cdot FE=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4t-t^2}}{2}\cdot\frac{2-t}{2}=\frac{(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{8}$

扇形 FGD の面積については，$\angle EFD=\theta$ とすると，$\triangle FA_tE$ の内角の和に注目して

$$\angle A_tFD=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{\pi}{3}-\theta$$

よって，扇形 FGD の面積は　$\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\angle A_tFD=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

ゆえに　$\frac{S_A}{2}=\frac{\sqrt{3}(2-t)^2}{8}-\frac{(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{8}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

よって　$S_A=\frac{\sqrt{3}(2-t)^2}{4}-\frac{(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{4}-\frac{\pi}{3}+\theta$

したがって，立体 K の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 3S_A\,dt\\&=\int_0^1\left\{\frac{3\sqrt{3}(2-t)^2}{4}-\frac{3(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{4}-\pi+3\theta\right\}dt\\&=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[-\frac{(2-t)^3}{3}\right]_0^1-\pi\Big[t\Big]_0^1-\frac{3}{4}\int_0^1(2-t)\sqrt{4t-t^2}\,dt+3\int_0^1\theta\,dt\\&=\frac{7\sqrt{3}}{4}-\pi-\frac{3}{4}\int_0^1(2-t)\sqrt{4t-t^2}\,dt+3\int_0^1\theta\,dt\end{aligned}$$

ここで　$\int_0^1(2-t)\sqrt{4t-t^2}\,dt=\int_0^1\frac{1}{2}(4t-t^2)'\sqrt{4t-t^2}\,dt$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4t-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\sqrt{3}$$

また，直角三角形 FED において

$$\cos\theta=FE=\frac{2-t}{2}$$

よって　$t=2-2\cos\theta$　　ゆえに　$dt=2\sin\theta\,d\theta$

t と θ の対応は右のようになるから

t	$0\longrightarrow1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}\int_0^1\theta\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\cdot2\sin\theta\,d\theta\\&=2\left\{\Big[-\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,d\theta\right\}\\&=2\left(-\frac{\pi}{6}+\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

以上から　$V=\frac{7\sqrt{3}}{4}-\pi-\frac{3}{4}\sqrt{3}+3\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=4\sqrt{3}-2\pi$

$\boxed{16}$

解答　$\left(\frac{17}{3}-8\log2\right)\pi$

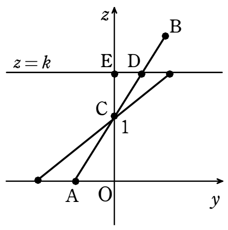
解説

K を平面 $z=k$ $(k\geqq1)$ で切った切り口が空集合でないような k の値の範囲は，A と O が一致するとき B$(0,\ 0,\ 2)$ であることに注意すると　$1\leqq k\leqq2$

特に $k=1,\ 2$ のとき，切り口は1点のみである。

$1<k<2$ のときを考える。

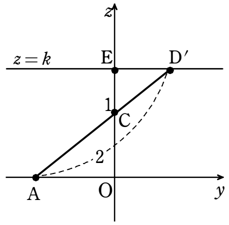
対称性から，K は平面 $x=0$ における線分 AB の通過範囲を z 軸を中心に回転させた領域である。



線分 AB と平面 $z=k$ が共有点をもつとき，その共有点を D とおき E$(0,\ 0,\ k)$ とおく。

DE が最大となるのは右下の図のように D と B が一致するときである。

2点 D，B が一致するときの点 D を D′ とすると，K を平面 $z=k$ で切った切り口は，点 E を中心とする半径 D′E の円である。



D′C : CA = EC : CO であるから

$D'C:(2-D'C)=(k-1):1$

$D'C=(k-1)(2-D'C)$

よって　$D'C=\frac{2(k-1)}{k}$

ゆえに　$D'E^2=D'C^2-EC^2=\frac{4(k-1)^2}{k^2}-(k-1)^2$

したがって，K を平面 $z=k$ で切った切り口の面積は　$\pi\left\{\frac{4(k-1)^2}{k^2}-(k-1)^2\right\}$

よって，求める体積は

$$\begin{aligned}&\int_1^2\pi\left\{\frac{4(k-1)^2}{k^2}-(k-1)^2\right\}dk=4\pi\int_1^2(1-2k^{-1}+k^{-2})\,dk-\pi\left[\frac{1}{3}(k-1)^3\right]_1^2\\&\qquad=4\pi\Big[k-2\log k-k^{-1}\Big]_1^2-\frac{1}{3}\pi=\left(\frac{17}{3}-8\log2\right)\pi\end{aligned}$$

$\boxed{17}$

解答　(1)　$H\left(\frac{p}{3},\ \frac{p}{3},\ \frac{p}{3}\right)$，$PH=\frac{\sqrt{6}}{3}p$

(2)　$I\left(\frac{q+1}{3},\ \frac{q+1}{3},\ \frac{q+1}{3}\right)$，$QI=\frac{1}{3}\sqrt{6(q^2-q+1)}$

(3)　$0\leqq u\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　$r=\sqrt{2}\,u$，

$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき　$r=\sqrt{2(u^2-\sqrt{3}\,u+1)}$，

$\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\sqrt{3}$ のとき　$r=\sqrt{2}(\sqrt{3}-u)$

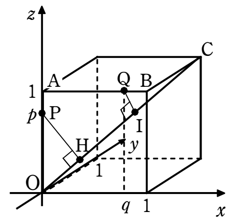
(4)　$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

解説

(1)　H は直線 OC 上の点であるから，s を実数として

$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OC}=(s,\ s,\ s)$$

と表される。



$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{OC}$ であるから　$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

ここで　$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OC}$

$$\begin{aligned}&=(s\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OC}\\&=s|\overrightarrow{OC}|^2-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=s(1^2+1^2+1^2)-(0\cdot1+0\cdot1+p\cdot1)\\&=3s-p\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ より　$3s-p=0$

ゆえに，$s=\frac{p}{3}$ であるから　$H\left(\frac{p}{3},\ \frac{p}{3},\ \frac{p}{3}\right)$

また　$PH=\sqrt{\left(0-\frac{p}{3}\right)^2+\left(0-\frac{p}{3}\right)^2+\left(p-\frac{p}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}p$

(2)　I は直線 OC 上の点であるから，t を実数として $\overrightarrow{OI}=t\overrightarrow{OC}=(t,\ t,\ t)$ と表される。

$\overrightarrow{QI}\perp\overrightarrow{OC}$ であるから　$\overrightarrow{QI}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

ここで　$\overrightarrow{QI}\cdot\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OC}=(t\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OC}$

$$\begin{aligned}&=t|\overrightarrow{OC}|^2-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=3t-(q\cdot1+0\cdot1+1\cdot1)=3t-(q+1)\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{QI}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ より　$3t-(q+1)=0$

ゆえに，$t=\frac{q+1}{3}$ であるから　$I\left(\frac{q+1}{3},\ \frac{q+1}{3},\ \frac{q+1}{3}\right)$

また　$QI=\sqrt{\left(q-\frac{q+1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{q+1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{q+1}{3}\right)^2}$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(2q-1)^2+(q+1)^2+(2-q)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{6(q^2-q+1)}$$

(3)　(1) の P が A に一致するときの H の座標は

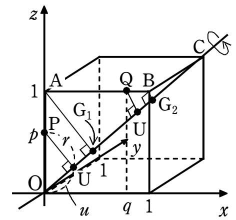
$$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

この点を G_1 とすると　$OG_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) の Q が B に一致したときの I の座標は

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

この点を G_2 とすると　$OG_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$



[1]　$0\leqq OU\leqq OG_1$　すなわち　$0\leqq u\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

U を通り OC に垂直な平面で立方体を切断したときの切り口を考えると，点 U からの距離が最大になるのは，(1) の立方体の辺上の点 P であるから　$r=PU$

このとき，(1) において　$OH=\frac{\sqrt{3}}{3}p$

これを u とおくと　$p=\sqrt{3}\,u$

よって　$r=PU=\frac{\sqrt{6}}{3}p=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{3}\,u=\sqrt{2}\,u$

[2]　$OG_1\leqq OU\leqq OG_2$　すなわち　$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき

[1] と同様に切り口を考えると，点 U からの距離が最大となるのは，(2) の立方体の辺上の点 Q であるから　　$r=\mathrm{QU}$

このとき，(2) において，$\frac{\sqrt{3}}{3}(q+1)=u$　すなわち $q=\sqrt{3}u-1$ とすればよいから

$$r=\mathrm{QU}=\frac{1}{3}\sqrt{6(q^2-q+1)}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{(\sqrt{3}u-1)^2-(\sqrt{3}u-1)+1}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{3(u^2-\sqrt{3}u+1)}=\sqrt{2(u^2-\sqrt{3}u+1)}$$

[3]　$\mathrm{OG_2}\leqq\mathrm{OU}\leqq\mathrm{OC}$　すなわち　$\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\sqrt{3}$ のとき

回転体 K は，線分 OC の中点を通り OC に垂直な平面に関して対称な図形であるから，[1] において u を $\sqrt{3}-u$ でおき換えて　　$r=\sqrt{2}(\sqrt{3}-u)$

[1]～[3] をまとめると

$0\leqq u\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　$r=\sqrt{2}u$

$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき　$r=\sqrt{2(u^2-\sqrt{3}u+1)}$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\sqrt{3}$ のとき　$r=\sqrt{2}(\sqrt{3}-u)$

(4)　(3) より，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}2u^2du+\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}2(u^2-\sqrt{3}u+1)du+\pi\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}2(\sqrt{3}-u)^2du$$

$$=2\cdot2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}u^2du+2\cdot2\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}du$$

$$=4\pi\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}+4\pi\left[\frac{1}{3}\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=4\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+4\pi\cdot\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\right\}$$

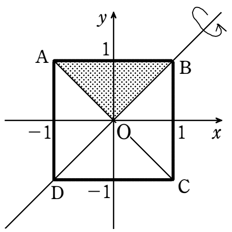
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

18

解答　(1)　$\frac{8}{3}\sqrt{2(1-t^2)}$　　(2)　$\frac{32}{9}\sqrt{2}$

解説

(1)　直角二等辺三角形 ABO を直線 BO を軸として回転させてできる円錐の側面上の点を P$(x,\ y,\ z)$ とおく。



円錐の表面上の点 P は $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ のなす角が 45° の点である。

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\cos45^\circ$ より

$(1-x)+(1-y)$

$$=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$(1-x)+(1-y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$ ……①

$|x|\leqq1,\ |y|\leqq1$ であるから　　$(1-x)+(1-y)\geqq0$

① の両辺を 2 乗すると　$\{(1-x)+(1-y)\}^2=(x-1)^2+(y-1)^2+z^2$

$2(1-x)(1-y)=z^2$

$1-x>0$ であるから　　$1-y=\frac{z^2}{2(1-x)}$

よって，円錐の表面の方程式は　　$y=1-\frac{z^2}{2(1-x)}$

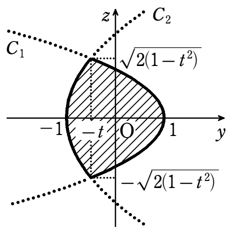
これの平面 $x=t$ による切り口は　　$y=1-\frac{z^2}{2(1-t)}$ $(-t\leqq y\leqq1)$

同様に，二等辺三角形 ADO を直線 DO を軸として回転させてできる円錐の表面上の点 D とは異なる点について考えると，この円錐の表面の方程式は

$$y=-1+\frac{z^2}{2(1+x)}$$

これの平面 $x=t$ による切り口は

$$y=-1+\frac{z^2}{2(1+t)}\ (-1\leqq y\leqq-t)$$



以上から，平面 $x=t$ による V_1 の切り口は，曲線

$C_1：y=1-\frac{z^2}{2(1-t)}$，$C_2：y=-1+\frac{z^2}{2(1+t)}$

で囲まれた図形となる。

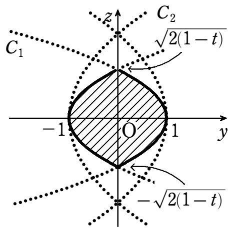
この図形は y 軸に関して対称であるから，求める面積は

$$2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left[1-\frac{z^2}{2(1-t)}-\left\{-1+\frac{z^2}{2(1+t)}\right\}\right]dz$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left(2-\frac{z^2}{1-t^2}\right)dz=2\left[2z-\frac{z^3}{3(1-t^2)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}$$

$$=2\left\{2\sqrt{2(1-t^2)}-\frac{2(1-t^2)\sqrt{2(1-t^2)}}{3(1-t^2)}\right\}=\frac{8}{3}\sqrt{2(1-t^2)}$$

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の図形は，平面 $x=0$ に関して対称であるから，求める体積は $0\leqq x\leqq1$ の範囲の体積を 2 倍したものとなる。



さらに，V_1 と V_2 の共通部分の図形は，平面 $y=0$ に関しても対称である。

よって，V_1 と V_2 の共通部分の平面 $x=t$ による切り口は，右の図のようになる。

よって，この切り口の面積は

$$4\int_0^{\sqrt{2(1-t)}}\left\{1-\frac{z^2}{2(1-t)}\right\}dz=4\left[z-\frac{z^3}{6(1-t)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t)}}$$

$$=4\left\{\sqrt{2(1-t)}-\frac{2(1-t)\sqrt{2(1-t)}}{6(1-t)}\right\}$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt{2(1-t)}$$

ゆえに，求める体積は　　$2\int_0^1\frac{8}{3}\sqrt{2(1-t)}\,dt=\frac{16}{3}\sqrt{2}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{32}{9}\sqrt{2}$