$\boxed{1}$

平面上に2つのベクトル $\vec{a}=(4,\ -3)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ をとる。

(1)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるような t の値と，そのときの最小値を求めよ。

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角が $45°$ になるような t の値を求めよ。

$\boxed{2}$

$\triangle$ABC の外接円の中心を O とし，その外接円の半径を1とする。

$13\overrightarrow{\mathrm{OA}}+12\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ であるとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ。また，$\triangle$OAB の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

座標空間における2点 A$(2,\ -3,\ -1)$ と B$(3,\ 0,\ 1)$ を通る直線を ℓ とし，直線 ℓ に関して点 C$(1,\ 5,\ -2)$ と対称な点を D とすると，D の座標は $\boxed{}$ である。

$\boxed{4}$

座標空間内に4点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 2,\ 2)$，B$(2,\ 0,\ 2)$，C$(3,\ 3,\ 3)$ がある。

(1)　$\triangle$OAB の面積を求めよ。

(2)　点 C から平面 OAB 上に引いた垂線と平面 OAB との交点を H とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，実数 s，t の値を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{5}$

平面上に，OA$=1$，OB$=2$，$\angle$AOB$=45°$ を満たす $\triangle$OAB がある。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3s+2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s+2t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たす点 P の存在範囲は，ある三角形の周および内部となる。その三角形の面積を求めよ。

$\boxed{6}$

ベクトル $\vec{a}=(3,\ 4)$ に対して，不等式 $|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq 119$ を満たすベクトル $\vec{p}=(x,\ y)$ の大きさ $|\vec{p}|=\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{7}$

三角形 ABC において，外心を O，垂心を H とする。点 O に関する点 A，B，C，H の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{h}$ とする。$\vec{h}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\{(k-1)\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ を示せ。

(2)　$\{(k-1)\vec{a}+(l-1)\vec{b}+(m-1)\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ を示せ。

(3)　$\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ であることを示せ。

$\boxed{8}$

座標空間において，原点を O，点 $(-1,\ -1,\ 2)$ を A，点 $(2,\ 1,\ 1)$ を B とする。点 P が直線 OB 上を動くとき，線分 AP の長さが最小となる P の座標を求めよ。また，そのときの $\triangle$OAP の面積を求めよ。

$\boxed{9}$

座標空間において，点 A$(2,\ 2,\ 2)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(2,\ 2,\ 1)$ に垂直な平面を α とする。

(1)　平面 α 上の点を P$(x,\ y,\ z)$ とすると，${}^{ア}\boxed{}\,x+{}^{イ}\boxed{}\,y+z={}^{ウ}\boxed{}$ が成り立つ。

(2)　点 C$(2,\ 2,\ 0)$ を中心とする球面 S と平面 α が交わってできる円の半径が $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ であるとする。このとき，この円の中心の座標は ${}^{エ}\boxed{}$ であり，球面 S の半径は ${}^{オ}\boxed{}$ である。

$\boxed{10}$

四面体 OABC の 6 つの辺の長さを $\mathrm{OA}=\sqrt{10}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{OC}=\sqrt{6}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AC}=2\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{5}$ とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のいずれとも直交するように s，t の値を定めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{1}$

解答 (1) $t=-1$ で最小値 $2\sqrt{5}$ (2) $t=1$

$\boxed{2}$

解答 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{12}{13}$, $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{5}{26}$

$\boxed{3}$

解答 $(6,\ -2,\ 6)$

$\boxed{4}$

解答 (1) 3 (2) $s=\dfrac{4}{3}$, $t=\dfrac{1}{2}$ (3) 1

$\boxed{5}$

解答 $2\sqrt{2}$

$\boxed{6}$

解答 17

$\boxed{7}$

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略

$\boxed{8}$

解答 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{1}{6}\right)$, $\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{\sqrt{35}}{12}$

$\boxed{9}$

解答 (1) (ア) 2 (イ) 2 (ウ) 10 (2) (エ) $\left(\dfrac{22}{9},\ \dfrac{22}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$ (オ) 2

$\boxed{10}$

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=5$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$

(2) $s=\dfrac{1}{5}$, $t=\dfrac{2}{5}$ (3) $\dfrac{5}{3}$

$\boxed{1}$

解説

(1) $\vec{a}+t\vec{b}=(4,\ -3)+t(2,\ 1)=(2t+4,\ t-3)$ であるから

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2t+4)^2+(t-3)^2=5t^2+10t+25$$
$$=5(t+1)^2+20 \quad \cdots\cdots ①$$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は, $t=-1$ で最小値 20 をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから, $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき, $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

よって, $|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-1$ で最小値 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ をとる。

(2) ① から $|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{5(t^2+2t+5)}$

また $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=(2t+4)\times 2+(t-3)\times 1=5(t+1)$

$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45° になるとき

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=|\vec{a}+t\vec{b}||\vec{b}|\cos 45^\circ$

ゆえに $5(t+1)=\sqrt{5(t^2+2t+5)}\times\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって $\sqrt{2}(t+1)=\sqrt{t^2+2t+5} \quad \cdots\cdots ②$

両辺を 2 乗して $2(t+1)^2=t^2+2t+5$

よって $t^2+2t-3=0$

ゆえに $(t+3)(t-1)=0$ よって $t=-3,\ 1$

このうち, ② を満たすのは $t=1$

したがって, 求める t の値は $t=1$

参考 $\sqrt{t^2+2t+5}>0$ であるから, ② より $t+1>0$

すなわち $t>-1$

よって ② $\Longleftrightarrow$ $t>-1$ かつ $2(t+1)^2=t^2+2t+5$

ゆえに, $2(t+1)^2=t^2+2t+5$ の解 $t=-3,\ 1$ のうち, $t>-1$ を満たしているものが, ② を満たす t である。

$\boxed{2}$

(解説)

$13\overrightarrow{OA}+12\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ から

$$\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{5}(13\overrightarrow{OA}+12\overrightarrow{OB})$$

O は △ABC の外接円の中心であり，外接円の半径が 1 であるから

$$|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2=1^2$$

ここで　$|\overrightarrow{OC}|^2=\left|-\frac{1}{5}(13\overrightarrow{OA}+12\overrightarrow{OB})\right|^2$

$$=\frac{1}{5^2}(13^2|\overrightarrow{OA}|^2+2\times13\times12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+12^2|\overrightarrow{OB}|^2)$$

$$=\frac{1}{5^2}(13^2+2\times13\times12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+12^2)$$

よって，$\frac{1}{5^2}(13^2+2\times13\times12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+12^2)=1$ から

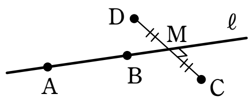
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{13^2+12^2-5^2}{2\times13\times12}=-\frac{288}{2\times13\times12}=-\frac{12}{13}$$

ゆえに　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\times1^2-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{13}=\frac{5}{26}$$

$\boxed{3}$

(解説)



点 D は，直線 ℓ に関して点 C と対称であるから，$\overrightarrow{CD}$ は直線 ℓ と垂直である。

直線 ℓ の方向ベクトルは $\overrightarrow{AB}$ であるから　$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

点 D の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$\overrightarrow{CD}=(x-1,\ y-5,\ z+2)$ であり，$\overrightarrow{AB}=(1,\ 3,\ 2)$ であるから

$$1\times(x-1)+3\times(y-5)+2\times(z+2)=0$$

すなわち　$x+3y+2z=12$　……①

また，線分 CD の中点を M とすると，M は直線 ℓ 上にある。

よって，原点を O とすると，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t が存在する。

すなわち

$$\left(\frac{1+x}{2},\ \frac{5+y}{2},\ \frac{-2+z}{2}\right)=(2,\ -3,\ -1)+t(1,\ 3,\ 2)$$

よって　$x=2(t+2)-1=2t+3$

$y=2(3t-3)-5=6t-11$

$z=2(2t-1)+2=4t$

これらを ① に代入して　$(2t+3)+3(6t-11)+2\times4t=12$

すなわち　$28t=42$　　よって　$t=\frac{3}{2}$

このとき　$x=2\times\frac{3}{2}+3=6$,

$y=6\times\frac{3}{2}-11=-2$,

$z=4\times\frac{3}{2}=6$

したがって，点 D の座標は　$(6,\ -2,\ 6)$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$\overrightarrow{OA}=(1,\ 2,\ 2)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ 0,\ 2)$ であるから

$$|\overrightarrow{OA}|^2=1^2+2^2+2^2=9,\quad |\overrightarrow{OB}|^2=2^2+0^2+2^2=8,$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times2+2\times0+2\times2=6$$

よって　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\times8-6^2}=\frac{6}{2}=3$$

(2)　$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$=s(1,\ 2,\ 2)+t(2,\ 0,\ 2)-(3,\ 3,\ 3)$

$=(s+2t-3,\ 2s-3,\ 2s+2t-3)$

$\overrightarrow{CH}$ は平面 OAB と垂直であるから

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$　かつ　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$　かつ　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$

よって　$(s+2t-3)\times 1+(2s-3)\times 2+(2s+2t-3)\times 2=0$

かつ　$(s+2t-3)\times 2+(2s-3)\times 0+(2s+2t-3)\times 2=0$

ゆえに　$3s+2t=5$，$3s+4t=6$

これを解いて　$s=\dfrac{4}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$

(3)　四面体 OABC の底面を △OAB と考えると，高さは CH である。

(2) から

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \left(\frac{4}{3}+2\times\frac{1}{2}-3,\ 2\times\frac{4}{3}-3,\ 2\times\frac{4}{3}+2\times\frac{1}{2}-3\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = 1$

ゆえに，求める体積は　$\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \dfrac{1}{3}\times 3\times 1 = 1$

$\boxed{5}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (3s+2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (s+2t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　…… ①

① の式を変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) + t(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

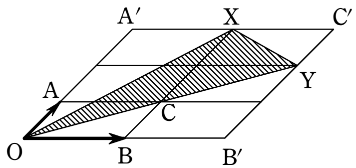
$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OX}} + t\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

よって，①，$s+t \leqq 1$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ を満たす点 P の存在範囲は，△OXY の周および内部となる。

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とすると，点 P の存在範囲は右の図の斜線部分となる。



ここで，平行四辺形 OACB の面積を S とすると

$$S = \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\sin\angle\mathrm{AOB} = 1\times 2\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

よって，求める面積は

$$\triangle\mathrm{OXY} = 6S - \triangle\mathrm{OXA'} - \triangle\mathrm{OYB'} - \triangle\mathrm{C'XY}$$

$$= 6S - \frac{3}{2}S - 2S - \frac{1}{2}S = 2S = 2\sqrt{2}$$

$\boxed{6}$

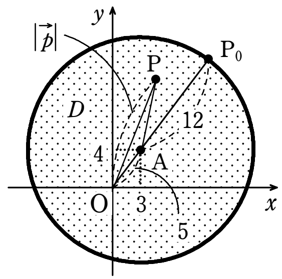
解説

$|\vec{p}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{p} \leqq 119$ から　$(x^2+y^2)-2(3x+4y) \leqq 119$

すなわち　$(x-3)^2+(y-4)^2 \leqq 144$

よって，点 P$(x,\ y)$ が存在する領域 D を xy 平面上に図示すると，右の図の網目部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



このとき，$|\vec{p}| = \sqrt{x^2+y^2}$ は，点 P と原点の距離を表す。

よって，$|\vec{p}|$ が最大となるのは，領域 D 内を動く点 P$(x,\ y)$ が原点 O から最も遠くなるときである。

A$(3,\ 4)$ とし，直線 OA と円 $(x-3)^2+(y-4)^2=144$ の交点のうち，原点 O から遠い方の交点を $\mathrm{P_0}$ とする。

点 P が領域 D を動くとき

$$|\vec{p}| = \mathrm{OP} \leqq \mathrm{OP_0} = \mathrm{OA}+\mathrm{AP_0} = 5+12 = 17$$

したがって，求める $|\vec{p}|$ の最大値は　17

参考　$\mathrm{P_0}$ の座標は　$\mathrm{P_0}\left(\dfrac{51}{5},\ \dfrac{68}{5}\right)$

よって，$|\vec{p}|$ は $\vec{p} = \left(\dfrac{51}{5},\ \dfrac{68}{5}\right)$ のとき最大となる。

$\boxed{7}$

（解説）

(1)　AH⊥BC より $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ であるから

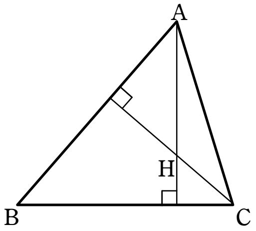
$(\vec{h}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

ゆえに

$(k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

よって

$\{(k-1)\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$



参考　垂心 H が点 A と一致するとき，$\overrightarrow{AH}=\vec{0}$ であるから，このときも $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ が成り立つ。

(2)　$\{(k-1)\vec{a}+(l-1)\vec{b}+(m-1)\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$=\{(k-1)\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}-(\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$=\{(k-1)\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})-(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$=\{(k-1)\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2$

(1) から　$\{(k-1)\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

また，O は △ABC の外心であるから　$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

すなわち　$|\vec{b}|=|\vec{c}|$　　ゆえに　$|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2=0$

したがって　$\{(k-1)\vec{a}+(l-1)\vec{b}+(m-1)\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

(3)　(2) の結果から　$\{k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

すなわち　$\{\vec{h}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

また，(1)，(2) と同様に考えて　$\{\vec{h}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

ここで，$\vec{c}-\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，$\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ であり，$\overrightarrow{BC}\not\parallel\overrightarrow{AC}$ であるから，$\vec{h}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ と $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}$ の少なくとも一方は垂直でない。

さらに，$\vec{c}-\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}-\vec{a}\neq\vec{0}$ であるから

$\vec{h}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$　　よって　$\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\boxed{8}$

（解説）

$\overrightarrow{OA}=(-1,\ -1,\ 2)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ 1,\ 1)$ である。

点 P は直線 OB 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OB}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=k(2,\ 1,\ 1)=(2k,\ k,\ k)$　…… ①

ゆえに　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(2k+1,\ k+1,\ k-2)$

よって　$|\overrightarrow{AP}|^2=(2k+1)^2+(k+1)^2+(k-2)^2$

$=6k^2+2k+6=6\left(k+\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{35}{6}$

ここで，点 P は直線 OB 上を動くから，k は実数全体を動く。

ゆえに，$|\overrightarrow{AP}|^2$ は，$k=-\dfrac{1}{6}$ のとき，最小値 $\dfrac{35}{6}$ をとる。

ここで，$|\overrightarrow{AP}|\geqq 0$ であるから，$|\overrightarrow{AP}|^2$ が最小のとき $|\overrightarrow{AP}|$ も最小となる。

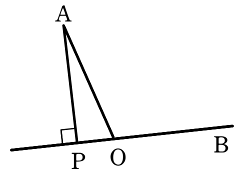
したがって，$|\overrightarrow{AP}|$ は，$k=-\dfrac{1}{6}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{35}{6}}$ をとる。

このとき，① から　$\overrightarrow{OP}=\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{1}{6}\right)$

すなわち，点 P の座標は　$\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{1}{6}\right)$

AP の長さが最小になるとき，AP⊥OP であるから

$\triangle OAP=\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{OP}|\times|\overrightarrow{AP}|$



ここで

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{6}{36}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

したがって　$\triangle OAP=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{6}\times\sqrt{\dfrac{35}{6}}=\dfrac{\sqrt{35}}{12}$

別解　（△OAP の面積）

$\triangle OAP=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})^2}$ である。

ここで　$|\overrightarrow{OA}|^2=(-1)^2+(-1)^2+2^2=6$,

$|\overrightarrow{OP}|^2=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{6}$,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(-1)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+(-1)\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)+2\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)$

$=\dfrac{1}{6}$

よって　$\triangle OAP\times\dfrac{1}{2}\sqrt{6\times\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{35}}{12}$

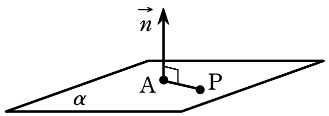
9

（解説）

(1)　平面 α 上の点 P について，

$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ または $\overrightarrow{AP}=\vec{0}$

が成り立つ。



これは，$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ と同値である。

$\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y-2,\ z-2)$，$\vec{n}=(2,\ 2,\ 1)$ であるから，

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ より　$(x-2)\times2+(y-2)\times2+(z-2)\times1=0$

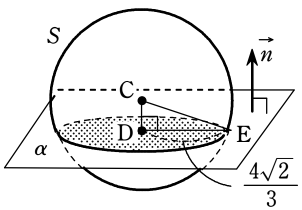
よって　ア$2x+$イ$2y+z=$ウ10

参考　$2x+2y+z=10$ を 平面 α の方程式 といい，$\vec{n}$ を平面 α の法線ベクトル という。

(2)　球面 S と平面 α が交わってできる円の中心を D $(x,\ y,\ z)$ とすると，D は平面 α 上にあるから，

(1) より

$2x+2y+z=10$ ……①



また，$\overrightarrow{CD}=(x-2,\ y-2,\ z)$ は $\vec{n}$ と平行であるから

$\overrightarrow{CD}=k\vec{n}$

すなわち　$(x-2,\ y-2,\ z)=k(2,\ 2,\ 1)$

を満たす実数 k が存在する。

よって　$x=2k+2$，$y=2k+2$，$z=k$

これを ① に代入すると　$2(2k+2)+2(2k+2)+k=10$

よって　$k=\dfrac{2}{9}$

このとき　$x=\dfrac{22}{9}$，$y=\dfrac{22}{9}$，$z=\dfrac{2}{9}$

ゆえに，求める円の中心の座標は　エ$\left(\dfrac{22}{9},\ \dfrac{22}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$

また，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{9}(2,\ 2,\ 1)$ であるから

$|\overrightarrow{CD}|=\dfrac{2}{9}\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\dfrac{2}{3}$

球面 S と平面 α が交わってできる円上の点の 1 つを E とすると，直角三角形 CDE において，三平方の定理により

$CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2}=2$

したがって，球面 S の半径は　オ2

参考　(点と平面の距離)

一般に，点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離 h は

$$h=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

このことを使うと，$|\overrightarrow{CD}|$ は次のように求められる。

$|\overrightarrow{CD}|$ は，点 C $(2,\ 2,\ 0)$ と平面 α：$2x+2y+z-10=0$ の距離であるから

$$|\overrightarrow{CD}|=\frac{|2\times2+2\times2+0-10|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{3}$$

$\boxed{10}$

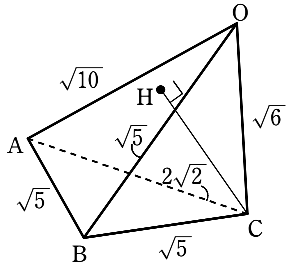
（解説）

(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$

$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$=(\sqrt{5})^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+(\sqrt{10})^2$

$=15-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$



また，$|\overrightarrow{AB}|^2=(\sqrt{5})^2$ であるから，

$15-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5$ より　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5$

同様にして，$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2=16-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$，

$|\overrightarrow{AC}|^2=(2\sqrt{2})^2$ から　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=4$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=11-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$|\overrightarrow{BC}|^2=(\sqrt{5})^2$ から

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

(2) $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$ より，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ であるから

$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}=0$

すなわち　　$s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

よって　　$10s+5t-4=0$ ……①

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$ より，同様に　$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

よって　　$5s+5t-3=0$ ……②

①，② を解くと　　$s=\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{2}{5}$

(3) (2) より，$\overrightarrow{CH}$ は平面 OAB に垂直であるから，四面体 OABC の体積 V は

$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle OAB\times|\overrightarrow{CH}|$

ここで　　$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{10})^2(\sqrt{5})^2-5^2}=\dfrac{5}{2}$

また

$|\overrightarrow{CH}|^2=\left|\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right|^2$

$=\dfrac{1}{25}|\overrightarrow{OA}|^2+\dfrac{4}{25}|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+\dfrac{4}{25}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{1}{25}\times10+\dfrac{4}{25}\times5+6+\dfrac{4}{25}\times5-\dfrac{4}{5}\times3-\dfrac{2}{5}\times4$

$=4$

$|\overrightarrow{CH}|\geqq0$ であるから　　$|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{4}=2$

したがって　　$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{2}\times2=\dfrac{5}{3}$