1

a を正の定数とする。不等式 $||x|-2|<a$ を満たす整数 x の個数がちょうど 6 個となるような a の値の範囲を求めよ。

2

正の整数 n に対して，次の 6 つの条件を考える。

条件 A：n は偶数である。　　　条件 ⓪：n は 3 で割ると 1 余る。

条件 ①：n^2 は 4 の倍数である。　　　条件 ②：n^2 は 6 で割ると 1 余る。

条件 ③：$n(n+1)$ は 6 の倍数である。　　　条件 ④：$n(n+2)$ は 12 の倍数である。

このとき，次の $\boxed{}$ に適する条件の番号を，⓪ ～ ④ の中から選べ。

(1)　条件 A と条件 ア$\boxed{}$ は同値である。

(2)　条件 イ$\boxed{}$ は，条件 ウ$\boxed{}$ が成り立つための必要条件であるが十分条件ではない。

(3)　すべての正の整数 n は，条件 エ$\boxed{}$ または条件 オ$\boxed{}$ を満たす。ただし，解答の順序を問わない。

3

(1)　命題「自然数 n が平方数でないならば，$\sqrt{n}$ は無理数である」の対偶を述べ，もとの命題が真であることを証明せよ。ただし，平方数とは，ある自然数の 2 乗で表される数である。

(2)　実数の集合 $A=\{a+b\sqrt{2}\mid a,\ b\text{ は整数}\}$ がある。このとき，$\sqrt{3}$ は A の要素ではないことを示せ。

4

2 つの関数 $f(x)=x^2+4x+4$，$g(x)=-2x^2+4x+k$ がある。すべての x について $f(x)>g(x)$ となる実数 k の値の範囲は ア$\boxed{}$ であり，すべての x_1，x_2 の組について $f(x_1)>g(x_2)$ となる k の値の範囲は イ$\boxed{}$ である。

5

次の表は，あるクラスの生徒 10 人があるゲームをしたときの得点をまとめたものである。ただし，ゲームの得点は整数値をとり，表の数値はすべて四捨五入されていない正確な値である。

生徒	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	平均値
得点	10	14	20	22	28	30	33	35	38	40	27

その後，得点を集計した際にデータの入力ミスがあったことが判明した。この誤りを修正したところ，2 人の生徒の得点がともに 10 点上がり，残りの 8 人の生徒の得点は変わらなかった。

(1)　修正した後での，10 人の得点の平均値を求めよ。

(2)　修正する前と後で，10 人の得点の第 1 四分位数と第 3 四分位数の値はともに変わらなかった。このとき，修正の前後で得点が変わった可能性がある生徒は誰と誰か，すべての場合を答えよ。

(3)　(2) で求めた場合のうち，修正後での 10 人の得点の標準偏差が 1 番小さくなるものを答えよ。

6

右の表は，あるクラスの生徒 10 人に対して行った英語と国語のテストの結果である。ただし，英語の得点を変量 x，国語の得点を変量 y とする。定数 x_0，y_0 と正の定数 c を用いて，$u=\dfrac{x-x_0}{c}$，$v=\dfrac{y-y_0}{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

x	9	9	8	6	8	9	8	9	7	7
y	9	10	4	7	10	5	5	7	6	7

(1)　u の平均値 $\overline{u}$ が $\overline{u}=0$ となるとき，x_0 の値を求めよ。

(2)　v の分散 ${S_v}^2$ と y の分散 ${S_y}^2$ の比が $1:2$ となるとき，c の値を求めよ。

(3)　x と y の相関係数 r_{xy} を求めよ。また，任意の定数 x_0，y_0 と正の定数 c について，

u と v の相関係数 r_{uv} が r_{xy} に等しくなることを示せ。

7

7つの文字 A，A，A，D，I，M，Y すべてを1列に並べてできる文字列について，次の問いに答えよ。

(1) 文字列は全部で何通りあるか求めよ。

(2) A と D が隣り合う文字列は全部で何通りあるか求めよ。

(3) 2つ以上の A が隣り合う文字列は全部で何通りあるか求めよ。

(4) 全部の文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき，文字列 YAMADAI は何番目の文字列か求めよ。

8

箱の中に9枚のカード($\boxed{A}$，$\boxed{A}$，$\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{B}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$，$\boxed{C}$，$\boxed{D}$)が入っている。カードを1枚ずつ取り出して左から順に4枚並べる。

(1) ABCD という語になる確率を求めよ。

(2) この試行を独立に1000回繰り返し，ABCD という語が r 回現れる確率を P_r とする。

このとき，$\dfrac{P_{r+1}}{P_r}=\dfrac{\overset{\text{ア}}{\boxed{}}-r}{\overset{\text{イ}}{\boxed{}}(r+1)}$ $(0\leqq r\leqq 999)$ である。また，P_r が最大となる r の値は $r=\overset{\text{ウ}}{\boxed{}}$ である。

9

(1) 図1のように，直線 AD と BC は点 P で交わっている。
PA・PD＝PB・PC が成り立つとき，四角形 ABCD は円に内接することを示せ。

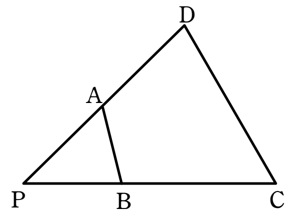


図1

(2) 図2のように，鋭角三角形 ABC の内部に点 P をとり，直線 AP，BP，CP と，辺 BC，CA，AB との交点をそれぞれ D，E，F とする。
次の(i)，(ii)がともに成り立つとき，四角形 ACDF は円に内接することを示し，さらに，点 P は △ABC の垂心であることを示せ。

(i) 四角形 AFPE は円に内接する。

(ii) 四角形 CEPD は円に内接する。

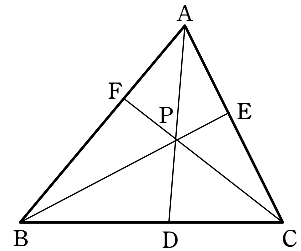


図2

10

正 p 角形，正 q 角形，正 r 角形の内角をそれぞれ α，β，γ とする。
$\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) $p\leqq q\leqq r$ の関係があるとき，p がとりうる最大値を求めよ。

(3) $p=4$ のとき，$q\leqq r$ となる p，q，r の組を求めよ。

(4) $p\leqq q\leqq r$ の関係を満たす p，q，r の組の個数を求めよ。

$\boxed{1}$

$a>0$ であるから，$||x|-2|<a$ より　　$-a<|x|-2<a$

すなわち　　$2-a<|x|<2+a$　……①

[1]　$2-a<0$ すなわち $a>2$ のとき

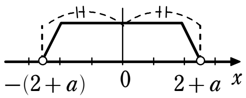
$|x|\geqq 0$ であるから，$2-a<|x|$ は常に成り立つ。

よって，① は $|x|<2+a$ と同値である。

これを解くと

$-(2+a)<x<2+a$

これを満たす x の値の範囲は，右の数直線のように 0 に関して対称であるから，これを満たす整数 x は奇数個である。

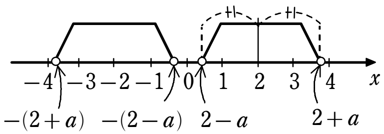


よって，不等式を満たす整数 x の個数がちょうど 6 個となることはない。

[2]　$2-a\geqq 0$ すなわち $0<a\leqq 2$ のとき

① から　　$-(2+a)<x<-(2-a)$，$2-a<x<2+a$

これを満たす x の値の範囲は，下の数直線のように 0 に関して対称である。



よって，不等式を満たす整数 x の個数がちょうど 6 個となるのは，$2-a<x<2+a$ の範囲にちょうど 3 個の整数を含むときである。

$2-a<x<2+a$ を満たす x の値の範囲は 2 に関して対称であるから，図より

$0\leqq 2-a<1$

したがって　　$1<a\leqq 2$　　　これは $0<a\leqq 2$ を満たす。

[1]，[2] より，求める a の値の範囲は　　$1<a\leqq 2$

別解　不等式 $||x|-2|<a$ ……(*) について，$x=k$ (k は整数) が (*) を満たすとすると，$||k|-2|<a$ が成り立つ。

このとき，$||-k|-2|=||k|-2|<a$ であるから，$x=-k$ も (*) を満たす。

よって，(*) の解に $x=0$ が含まれるとすると，(*) を満たす整数 x は奇数個である。

ゆえに，(*) を満たす整数 x がちょうど 6 個であるとき，$x=0$ は解に含まれないから，

$a>0$ より　　$||0|-2|\geqq a$　　　すなわち　$0<a\leqq 2$

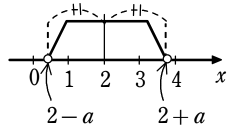
よって，$0<a\leqq 2$ で，$|x-2|<a$ を満たす正の整数 x がちょうど 3 個となるような a の値の範囲を求めればよい。

$|x-2|<a$ を解くと　　$2-a<x<2+a$

これを満たす a の値の範囲は 2 に関して対称である。

よって，$0<a\leqq 2$ であることと条件より　　$0\leqq 2-a<1$

したがって，求める a の値の範囲は　　$1<a\leqq 2$



$\boxed{2}$

(1)　条件 A と同値な条件は ア ① である。

(理由)　n が偶数のとき，n^2 は 4 の倍数である。

一方，n が奇数のとき，n^2 は奇数であって 4 の倍数ではない。

よって，n^2 が 4 の倍数のとき，n は偶数である。

(2)　条件 イ ① は，条件 ウ ④ が成り立つための必要条件であるが十分条件ではない。

(理由)　(1) より，条件 ① は条件 A と同値であるから，条件 A が，条件 ④ が成り立つための必要条件であるが十分条件ではないことを示す。

「n が偶数ならば，$n(n+2)$ は 12 の倍数である」は偽である。

(反例)　$n=2$

「$n(n+2)$ が 12 の倍数ならば，n は偶数である」は真である。

(証明)　n が奇数のとき，n と $n+2$ は奇数であるから，$n(n+2)$ は奇数である。

よって，対偶「n が奇数ならば，$n(n+2)$ は 12 の倍数でない」が真であるから，もとの命題も真である。

(3)　条件 ③ は，n を 3 で割った余りが 0 または 2 であることと同値である。

(証明)　まず，$n(n+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから，偶数である。

したがって，$n(n+1)$ が 6 の倍数になるのは，$n(n+1)$ が 3 の倍数になるとき，すなわち，n が 3 の倍数になるか，または $n+1$ が 3 の倍数になるときである。

ここで，$n+1$ が 3 の倍数であるための条件は，n を 3 で割った余りが 2 であることである。

よって，$n(n+1)$ が 6 の倍数であることと，n を 3 で割った余りが 0 または 2 であることは同値である。

したがって，すべての正の整数 n は，条件 ^{エ} ⓪ または条件 ^{オ} ③ を満たす。

((エ)，(オ) は順不同)

参考　条件 k ($k=0$，1，2，3，4) を満たす正の整数全体の集合を A_k とすると

$A_0=\{n \mid n$ は3で割った余りが1$\}$，

$A_1=\{n \mid n$ は偶数$\}$，

$A_2=\{n \mid n$ は6で割った余りが1，5のいずれか$\}$，

$A_3=\{n \mid n$ は3で割った余りが0，2のいずれか$\}$，

$A_4=\{n \mid n$ は6で割った余りが0，4のいずれか$\}$

ここで，A_0，A_1，A_3 については，次のようにも表される。

$A_0=\{n \mid n$ は6で割った余りが1，4のいずれか$\}$，

$A_1=\{n \mid n$ は6で割った余りが0，2，4のいずれか$\}$，

$A_3=\{n \mid n$ は6で割った余りが0，2，3，5のいずれか$\}$

よって，$A_4 \subset A_1$ が成り立ち，他に包含関係のある2つの集合の組はない。

したがって，「条件 ④ ならば条件 ①」のみが真であり，他の組み合わせは偽である。

$\boxed{3}$

(1)　与えられた命題の対偶は，次の命題である。

「自然数 n に対して，$\sqrt{n}$ が有理数ならば，n は平方数である」

この命題を証明する。

(証明)　自然数 n に対して，$\sqrt{n}$ が有理数であるとき，

$$\sqrt{n}=\frac{p}{q}\ (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数})$$

と表される。

両辺を2乗すると　$n=\dfrac{p^2}{q^2}$　　よって　$p^2=nq^2$

n は自然数であるから，q^2 は p^2 の約数である。

よって，p^2，q^2 の最大公約数は　q^2

また，p，q は互いに素であるから，p^2，q^2 は互いに素である。

よって，p^2，q^2 の最大公約数は　1

ゆえに　$q^2=1$　　$q>0$ であるから　$q=1$

したがって，$n=p^2$ であるから，n は平方数である。

対偶が示されたから，もとの命題も真である。

参考　「p，q が互いに素であるならば，p^2，q^2 は互いに素である」は，次のようにして証明できる。

(証明)　命題の対偶「p^2，q^2 が互いに素でないならば，p，q は互いに素でない」を証明する。

p^2，q^2 が互いに素ではないとき，p^2，q^2 は共通の素因数 g をもつ。

このとき，p^2 は g の倍数であり，かつ g は素数であるから，p は g の倍数となる。

同様に，q^2 は g の倍数であり，かつ g は素数であるから，q も g の倍数である。

よって，p，q は共通の素因数 g をもつから，p，q は互いに素でない。

対偶が示されたから，もとの命題も真である。

(2)　$\sqrt{3} \in A$ であると仮定する。

このとき，$a+b\sqrt{2}=\sqrt{3}$ を満たす整数 a，b が存在する。

$a=\sqrt{3}-b\sqrt{2}$ の両辺を2乗すると　$a^2=(\sqrt{3}-b\sqrt{2})^2$

すなわち　$a^2=3+2b^2-2b\sqrt{6}$

整理すると　$a^2-2b^2-3+2b\sqrt{6}=0$　……①

ここで，(1)の命題が真であることから，平方数でない自然数6に対して，$\sqrt{6}$ は無理数である。

a^2-2b^2-3，$2b$ は有理数であるから，① より

$$a^2-2b^2-3=0,\ 2b=0$$

これを解くと　$a=\pm\sqrt{3}$，$b=0$

3は平方数でないから，$\sqrt{3}$ も無理数であり，$a=\pm\sqrt{3}$ は a が整数であることと矛盾する。

したがって，$\sqrt{3}$ は A の要素ではない。

別解　$\sqrt{3} \in A$ であると仮定する。

$\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$ となる整数 a，b に対して，$\sqrt{3}$ は x の2次方程式 $(x-a)^2=(b\sqrt{2})^2$

すなわち　$x^2-2ax+a^2-2b^2=0$ ……② の解である。

ここで，$-2a$，a^2-2b^2 は有理数であるから，$-\sqrt{3}$ も②の解となる。

よって，解と係数の関係から　$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=2a$，$\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})=a^2-2b^2$

これを解くと　$a=0$，$b=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

これは，b が整数であることと矛盾する。

したがって，$\sqrt{3}$ は A の要素ではない。

$\boxed{4}$

$f(x)-g(x)=x^2+4x+4-(-2x^2+4x+k)=3x^2+4-k$

すべての x について $f(x)>g(x)$ となるとき，$f(x)-g(x)>0$ がすべての x について成り立つから　$3x^2+4-k>0$

$3x^2\geqq 0$ であるから，この不等式がすべての x について成り立つための条件は

$4-k>0$　すなわち　${}^{ア}k<4$

すべての x_1，x_2 の組について $f(x_1)>g(x_2)$ となるとき，

$\{f(x)の最小値\}>\{g(x)の最大値\}$ が成り立つ。

$f(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2$

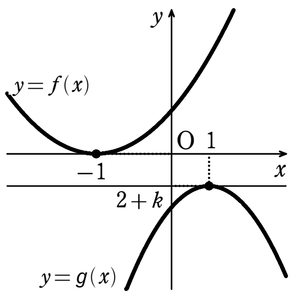
より，最小値は　0

$g(x)=-2x^2+4x+k$

$=-2(x-1)^2+2+k$

より，最大値は　$2+k$

よって　$0>2+k$　すなわち　${}^{イ}k<-2$



$\boxed{5}$

(1)　修正前の10人の得点の総和は　$27\times 10=270$

よって，修正後の10人の得点の総和は　$270+10\times 2=290$

したがって，修正後の得点の平均値は　$\dfrac{290}{10}=29$

(2)　修正前の得点の第1四分位数は，Cの得点で　20

第3四分位数は，Hの得点で　35

この2人の得点が変わった場合，第1四分位数，第3四分位数が変わるから，CとHの得点は変わっていない。

また，修正後の第1四分位数と第3四分位数が修正前と変わらないのは，2人の得点が10点上がったときに，修正前の第1四分位数20や第3四分位数35を超えることなく変わる場合である。

よって，得点が変わった可能性があるのは，10点のA，22点のD，38点のI，40点のJの4人である。

したがって，得点が変わった可能性がある生徒2人の組は

AとD，　AとI，　AとJ，　DとI，　DとJ，　IとJ

(3)　標準偏差が最も小さくなるのは，偏差の2乗の和が最も小さくなるときである。

得点が変わった可能性があるA，D，I，Jについて，偏差の2乗の値は，次のようになる。

A：$(20-29)^2=81$　　D：$(32-29)^2=9$

I：$(48-29)^2=361$　　J：$(50-29)^2=441$

したがって，修正後の得点の偏差の2乗の値の総和が最も小さくなるのは，AとDの得点が変わった場合である。

$\boxed{別解}$　修正後の得点の標準偏差は

$$\sqrt{(得点の2乗の平均値)-(得点の平均値)^2}=\sqrt{\frac{1}{10}\times(得点の2乗の総和)-29^2}$$

よって，標準偏差が最も小さくなるのは，得点の2乗の総和が最も小さくなるときである。

得点が変わった可能性があるA，D，I，Jについて，修正後の得点の2乗の値は，次のようになる。

A：$20^2=400$　　D：$32^2=1024$

I：$48^2=2304$　　J：$50^2=2500$

したがって，修正後の得点の2乗の総和が最も小さくなるのは，AとDの得点が変わった場合である。

$\boxed{6}$

(1)　$u=\dfrac{x-x_0}{c}$ であるから　$\overline{u}=\dfrac{\overline{x}-x_0}{c}$

よって，$\overline{u}=0$ のとき　$x_0=\overline{x}$

ゆえに　$x_0=\dfrac{1}{10}(9+9+8+6+8+9+8+9+7+7)=8$

(2)　$v=\dfrac{y-y_0}{c}$ であるから　${S_v}^2=\dfrac{1}{c^2}{S_y}^2$

よって，$S_v{}^2 : S_y{}^2 = 1 : 2$，すなわち $S_v{}^2 = \frac{1}{2}S_y{}^2$ となるとき

$c^2 = 2$　　　$c > 0$ であるから　　$c = \sqrt{2}$

(3)　(1) より，x の平均値 $\overline{x}$ は　　$\overline{x} = 8$

x の分散 $S_x{}^2$ は

$$S_x{}^2 = \frac{1}{10}\{(9-8)^2+(9-8)^2+(8-8)^2+(6-8)^2 +(8-8)^2+(9-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(7-8)^2+(7-8)^2\} = 1$$

また，y の平均値 $\overline{y}$ は

$$\overline{y} = \frac{1}{10}(9+10+4+7+10+5+5+7+6+7) = 7$$

y の分散 $S_y{}^2$ は

$$S_y{}^2 = \frac{1}{10}\{(9-7)^2+(10-7)^2+(4-7)^2+(7-7)^2 +(10-7)^2+(5-7)^2+(5-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2\} = 4$$

x と y の共分散 S_{xy} は

$$S_{xy} = \frac{1}{10}\{(9-8)(9-7)+(9-8)(10-7)+(8-8)(4-7) +(6-8)(7-7)+(8-8)(10-7)+(9-8)(5-7) +(8-8)(5-7)+(9-8)(7-7)+(7-8)(6-7)+(7-8)(7-7)\}$$

$$= \frac{4}{10} = 0.4$$

よって，x と y の相関係数 r_{xy} は

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{0.4}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}} = 0.2$$

また，x，y のデータを順に x_i，y_i ($i=1$，2，……，10) とし，$u_i = \frac{x_i - x_0}{c}$，$v_i = \frac{y_i - y_0}{c}$ とする。

このとき　　$u_i - \overline{u} = \frac{x_i - x_0}{c} - \frac{\overline{x} - x_0}{c} = \frac{1}{c}(x_i - \overline{x})$，

$v_i - \overline{v} = \frac{y_i - y_0}{c} - \frac{\overline{y} - y_0}{c} = \frac{1}{c}(y_i - \overline{y})$

よって，u の分散 $S_u{}^2$ について

$$S_u{}^2 = \frac{1}{10}\{(u_1-\overline{u})^2+(u_2-\overline{u})^2+\cdots\cdots+(u_{10}-\overline{u})^2\}$$
$$= \frac{1}{10}\left\{\frac{1}{c^2}(x_1-\overline{x})^2+\frac{1}{c^2}(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+\frac{1}{c^2}(x_{10}-\overline{x})^2\right\}$$
$$= \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{10}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2\}$$
$$= \frac{1}{c^2}S_x{}^2$$

同様に，v の分散 $S_v{}^2$ について　　$S_v{}^2 = \frac{1}{c^2}S_y{}^2$

$c > 0$ であるから，u の標準偏差 S_u，v の標準偏差 S_v について

$$S_u = \frac{1}{c}S_x,\quad S_v = \frac{1}{c}S_y$$

また，u と v の共分散 S_{uv} について

$$S_{uv} = \frac{1}{10}\{(u_1-\overline{u})(v_1-\overline{v})+(u_2-\overline{u})(v_2-\overline{v})+\cdots\cdots+(u_{10}-\overline{u})(v_{10}-\overline{v})\}$$
$$= \frac{1}{10}\left\{\frac{1}{c}(x_1-\overline{x})\cdot\frac{1}{c}(y_1-\overline{y})+\frac{1}{c}(x_2-\overline{x})\cdot\frac{1}{c}(y_2-\overline{y}) +\cdots\cdots+\frac{1}{c}(x_{10}-\overline{x})\cdot\frac{1}{c}(y_{10}-\overline{y})\right\}$$
$$= \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{10}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_{10}-\overline{x})(y_{10}-\overline{y})\}$$
$$= \frac{1}{c^2}S_{xy}$$

したがって，u と v の相関係数 r_{uv} について

$$r_{uv}=\frac{S_{uv}}{S_uS_v}=\frac{\frac{1}{c^2}S_{xy}}{\frac{1}{c}S_x\cdot\frac{1}{c}S_y}=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}=r_{xy}$$

$\boxed{7}$

(1)　7文字のうちAは3個あるから，文字列は全部で

$$\frac{7!}{3!}=840\ (通り)$$

(2)　AとDが隣り合わない場合を考える。

A以外の4文字を1列に並べる方法は　　$4!$ 通り

4文字の間と両端の5か所のうち，Dの両隣を除いた3か所から重複を許して3か所選び，3つのAを入れる方法は

$${}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3\ (通り)$$

よって，AとDが隣り合わない文字列は

$$4!\times{}_5\mathrm{C}_3=240\ (通り)$$

したがって，求める文字列は全部で　　$840-240=600$ (通り)

(3)　2つ以上のAが隣り合わない場合を考える。

A以外の4文字を1列に並べ，4文字の間と両端の5か所から3か所選んで，3つのAを入れればよい。

よって，2つ以上のAが隣り合わない文字列は

$$4!\times{}_5\mathrm{C}_3=240\ (通り)$$

したがって，求める文字列は全部で　　$840-240=600$ (通り)

(4)　YAMADAIより後に並んでいる文字列のうち

YAMAD□□ の形のものは　　1個

YAMAI□□ の形のものは　　$2!=2$ (個)

YAMD□□□ の形のものは　　$\frac{3!}{2!}=3$ (個)

YAMI□□□ の形のものは　　3個

YD□□□□□ の形のものは　　$\frac{5!}{3!}=20$ (個)

YI□□□□□ の形のものは　　20個

YM□□□□□ の形のものは　　20個　ある。

よって　　$840-(1+2+3+3+20+20+20)=771$ (番目)

$\boxed{8}$

(1)　カードをすべて区別して考える。

並べ方の総数は　　${}_9\mathrm{P}_4$ 通り

ABCDという順になるには，1枚目にA，2枚目にB，3枚目にC，4枚目にDを選べばよいから，求める確率は

$$\frac{3\cdot3\cdot2\cdot1}{{}_9\mathrm{P}_4}=\frac{3\cdot3\cdot2}{9\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{1}{168}$$

(2)　ABCDという語が1000回中 r 回現れる確率 P_r は

$$P_r={}_{1000}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{168}\right)^r\left(\frac{167}{168}\right)^{1000-r}$$

$$=\frac{1000!}{r!(1000-r)!}\cdot\frac{167^{1000-r}}{168^{1000}}$$

よって，$0\leqq r\leqq 999$ のとき

$$\frac{P_{r+1}}{P_r}=\frac{\cancel{1000!}}{(r+1)!(999-r)!}\cdot\frac{167^{999-r}}{\cancel{168^{1000}}}\times\frac{r!(1000-r)!}{\cancel{1000!}}\cdot\frac{\cancel{168^{1000}}}{167^{1000-r}}$$

$$=\frac{\cancel{r!}\times(1000-r)\cdot\cancel{(999-r)!}}{(r+1)\cdot\cancel{r!}\times\cancel{(999-r)!}}\times\frac{\cancel{167^{999-r}}}{167\cdot\cancel{167^{999-r}}}$$

$$=\frac{{}^{ア}1000-r}{{}^{イ}167(r+1)}$$

ここで，$\frac{P_{r+1}}{P_r}>1$ とすると　　$\frac{1000-r}{167(r+1)}>1$

すなわち　　$1000-r>167r+167$

ゆえに　　$r<\frac{833}{168}=4.9\cdots\cdots$

不等号の向きを変えて $\frac{P_{r+1}}{P_r}<1$ とすると　　$r>4.9\cdots\cdots$

よって，$0\leqq r\leqq 4$ のとき　　$\frac{P_{r+1}}{P_r}>1$　すなわち　$P_r<P_{r+1}$

$5 \leqq r \leqq 999$ のとき　$\dfrac{P_{r+1}}{P_r} < 1$ すなわち $P_r > P_{r+1}$

ゆえに　$P_0 < P_1 < \cdots\cdots < P_4 < P_5 > P_6 > \cdots\cdots > P_{1000}$

したがって，P_r が最大となる r の値は　$r = {}^{ウ}5$

9

(1) △PAB と △PCD において，PA・PD＝PB・PC から

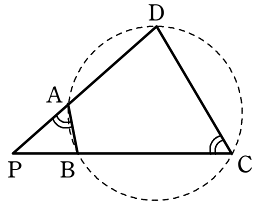
PA：PC＝PB：PD

また　∠P は共通

よって　△PAB∽△PCD

ゆえに　∠PAB＝∠PCD

1 つの内角が，その対角の外角に等しいから，四角形 ABCD は円に内接する。



(2) まず，四角形 ACDF が円に内接することを示す。

方べきの定理により

BF・BA＝BP・BE，BP・BE＝BD・BC

よって　BF・BA＝BD・BC

ゆえに，(1) により，四角形ACDF は円に内接する。

次に，点 P が △ABC の垂心であることを示す。

四角形 AFPE が円に内接するから

∠AFP＋∠AEP＝180°

四角形 CEPD が円に内接するから

∠AEP＝∠PDC

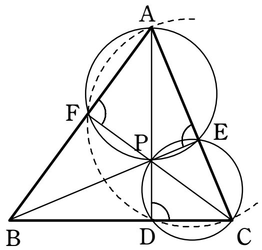
これらより　∠AFC＋∠ADC＝180°　……①

また，四角形 ACDF は円に内接するから，円周角の定理により

∠AFC＝∠ADC

これと ① から　∠AFC＝∠ADC＝90°

したがって，点 P は △ABC の垂心である。



10

(1) 正 n 角形の 1 つの内角は　$\dfrac{n-2}{n} \times 180°$

よって，

$$\alpha = \frac{p-2}{p} \times 180°,\ \beta = \frac{q-2}{q} \times 180°,\ \gamma = \frac{r-2}{r} \times 180°$$

であるから，$\alpha + \beta + \gamma = 360°$ より

$$\left(\frac{p-2}{p} + \frac{q-2}{q} + \frac{r-2}{r}\right) \times 180° = 360°$$

よって　$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2}$

(2) $3 \leqq p \leqq q \leqq r$ より，$\dfrac{1}{r} \leqq \dfrac{1}{q} \leqq \dfrac{1}{p}$ であるから

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{3}{p}$$

よって，$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{3}{p}$ から　$p \leqq 6$

$p = 6$ のとき　$\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2}$

すなわち　$\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{3}$　　ゆえに　$(q-3)(r-3) = 9$

$3 \leqq q-3 \leqq r-3$ であるから　$(q-3,\ r-3) = (3,\ 3)$

よって　$(q,\ r) = (6,\ 6)$

したがって，p の最大値は　6

(3) $p = 4$ のとき　$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2}$

すなわち　$\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{4}$

ゆえに　$(q-4)(r-4) = 16$

$-1 \leqq q-4 \leqq r-4$ であるから

$(q-4,\ r-4) = (1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4)$

よって　$(q,\ r) = (5,\ 20),\ (6,\ 12),\ (8,\ 8)$

したがって　$(p,\ q,\ r) = (4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12),\ (4,\ 8,\ 8)$

(4) [1] $p = 5$ のとき　$\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2}$

よって　$\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{3}{10}$　……①

$\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}\leqq\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{2}{q}$ であるから　$3q\leqq 20$

これを満たす5以上の整数 q は　$q=5,\ 6$

(i)　$q=6$ のとき

①から　$\dfrac{1}{r}=\dfrac{2}{15}$　　よって　$r=\dfrac{15}{2}$

これは整数でないから，不適。

(ii)　$q=5$ のとき

①から　$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{10}$　　よって　$r=10$

これは5以上の整数であり，適する。

[2]　$p=3$ のとき　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$(q-6)(r-6)=36$

$-3\leqq q-6\leqq r-6$ であるから

$(q-6,\ r-6)=(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9),\ (6,\ 6)$

したがって

$(q,\ r)=(7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15),\ (12,\ 12)$

以上から，$p\leqq q\leqq r$ を満たす $p,\ q,\ r$ の組は

$(p,\ q,\ r)=(6,\ 6,\ 6),\ (4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12),\ (4,\ 8,\ 8),\ (5,\ 5,\ 10),$

$(3,\ 7,\ 42),\ (3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 9,\ 18),\ (3,\ 10,\ 15),\ (3,\ 12,\ 12)$

の10組