$\boxed{1}$

2 次不等式 $ax^2+x+b>0$ の解が $x<-3$，$2<x$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=1$，$b=-6$

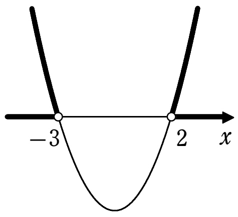
解説

条件から，$y=ax^2+x+b$ のグラフは $x<-3$，$2<x$ の範囲で x 軸より上側にある。

すなわち，下に凸の放物線で，2 点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから　$a>0$　……①

$9a-3+b=0$　……②

$4a+2+b=0$　……③



②，③ を解くと　$a=1$，$b=-6$

これは ① を満たす。

$\boxed{2}$

不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ を満たす整数 x がちょうど 2 個だけ存在するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-2\leqq a<-1$，$3<a\leqq 4$

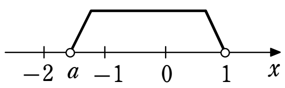
解説

左辺を因数分解すると　$(x-1)(x-a)<0$　……①

[1]　$a<1$ のとき，① の解は　$a<x<1$

これを満たす整数 x がちょうど 2 個あるとき，その整数 x は -1，0 となる。

よって　$-2\leqq a<-1$



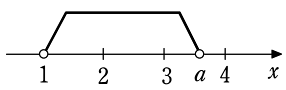
[2]　$a=1$ のとき，① は $(x-1)^2<0$ となるから，解はない。

よって，条件を満たさない。

[3]　$a>1$ のとき，① の解は　$1<x<a$

これを満たす整数 x がちょうど 2 個あるとき，その整数 x は 2，3 となる。

よって　$3<a\leqq 4$



以上から，求める a の値の範囲は　$-2\leqq a<-1$，$3<a\leqq 4$

$\boxed{3}$

2 次方程式 $x^2-ax+1=0$ の 1 つの解が $0<x<1$ の範囲にあり，他の解が $2<x<3$ の範囲にあるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

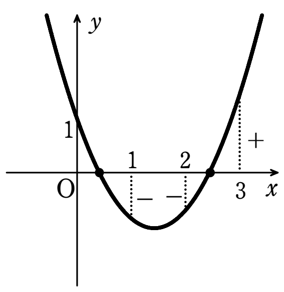
解答　$\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{10}{3}$

解説

$f(x)=x^2-ax+1$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$f(0)=1>0$ であるから，2 次方程式 $f(x)=0$ の 1 つの解が $0<x<1$ の範囲にあり，他の解が $2<x<3$ の範囲にあるための必要十分条件は

$f(1)<0$　かつ　$f(2)<0$　かつ　$f(3)>0$



よって　$2-a<0$，$5-2a<0$，$10-3a>0$

すなわち　$a>2$，$a>\dfrac{5}{2}$，$a<\dfrac{10}{3}$

これらの共通範囲を求めて　$\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{10}{3}$

$\boxed{4}$

2 次関数 $y=x^2+mx+2$ が次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　この 2 次関数のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わる。

(2)　この 2 次関数のグラフと x 軸の $x<-1$ の部分が異なる 2 点で交わる。

解答　(1)　$m<-2\sqrt{2}$　　(2)　$2\sqrt{2}<m<3$

解説

$f(x)=x^2+mx+2$ とおく。

これを変形すると　$f(x)=\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=-\dfrac{m}{2}$ である。

(1)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$m^2-4\cdot1\cdot2>0$

よって　$(m+2\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})>0$

ゆえに　$m<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<m$　……①

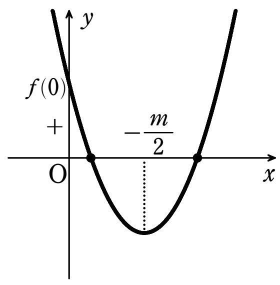
[2]　軸 $x=-\dfrac{m}{2}$ について

$-\dfrac{m}{2}>0$　　よって　$m<0$　……②

[3]　$f(0)>0$

$f(0)=2>0$ であるから，成り立つ。

①，② の共通範囲を求めて　$m<-2\sqrt{2}$



参考　① は次のように求めてもよい。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

放物線 $y=\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+2$ の頂点の y 座標は負であるから　$-\dfrac{m^2}{4}+2<0$

すなわち　$m^2-8>0$

よって　$(m+2\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})>0$

ゆえに　$m<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<m$　……①

(2)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x<-1$ の部分が異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$m^2-4\cdot1\cdot2>0$

よって　$(m+2\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})>0$

ゆえに　$m<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<m$　……①

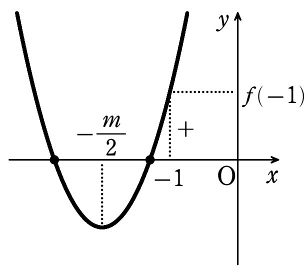
[2]　軸 $x=-\dfrac{m}{2}$ について

$-\dfrac{m}{2}<-1$　　よって　$m>2$　……②

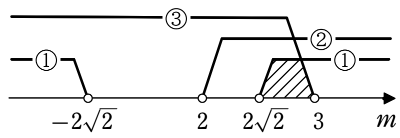
[3]　$f(-1)>0$

よって　$(-1)^2+m\cdot(-1)+2>0$

ゆえに　$m<3$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて　$2\sqrt{2}<m<3$



$\boxed{5}$

不等式 $x^2-5x+6<0$ を満たすすべての x が，不等式 $x^2-3ax+2a^2<0$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$\frac{3}{2} \leqq a \leqq 2$

解説

$x^2-3ax+2a^2<0$ の左辺を因数分解すると　$(x-a)(x-2a)<0$ ……①

[1]　$a<2a$ すなわち $a>0$ のとき　　① の解は　$a<x<2a$

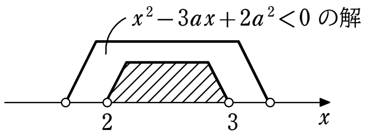
[2]　$a=2a$ すなわち $a=0$ のとき　　① は $x^2<0$ となるから，解はない。

[3]　$a>2a$ すなわち $a<0$ のとき　　① の解は　$2a<x<a$

$x^2-5x+6<0$ から　$(x-2)(x-3)<0$

よって　$2<x<3$

条件を満たすのは，$2<x<3$ が ① の解に含まれるときである。

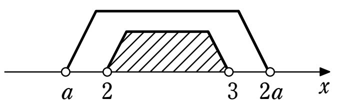


[1]　$a>0$ のとき

$2<x<3$ が $a<x<2a$ に含まれるから

$a \leqq 2$　かつ　$3 \leqq 2a$

よって　$\frac{3}{2} \leqq a \leqq 2$



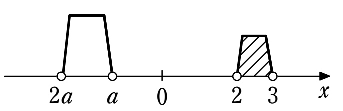
これは $a>0$ を満たす。

[2]　$a=0$ のとき

① の解はないから，条件を満たさない。

[3]　$a<0$ のとき

$2<x<3$ が $2a<x<a$ に含まれることはないから，条件を満たさない。



[1]，[2]，[3] から　$\frac{3}{2} \leqq a \leqq 2$

$\boxed{6}$

関数 $y=|x+1|+|x-1|+|x-2|$ $(-2 \leqq x \leqq 3)$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　$x=-2$ で最大値 8，$x=1$ で最小値 3

解説

$-2 \leqq x<-1$ のとき　$y=-(x+1)-(x-1)-(x-2)=-3x+2$

$-1 \leqq x<1$ のとき　$y=(x+1)-(x-1)-(x-2)=-x+4$

$1 \leqq x<2$ のとき　$y=(x+1)+(x-1)-(x-2)=x+2$

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき　$y=(x+1)+(x-1)+(x-2)=3x-2$

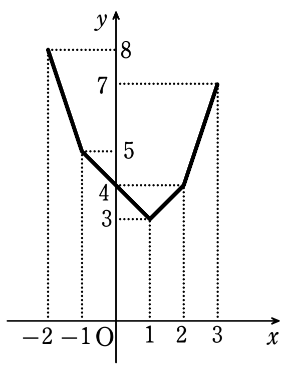
よって，グラフは右の図の実線部分のようになる。

したがって，

$x=-2$ で最大値 8，

$x=1$　で最小値 3

をとる。



$\boxed{7}$

$x^2+y^2=1$ のとき，x^2-y^2+2x の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=1$，$y=0$ で最大値 3；$x=-\frac{1}{2}$，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

解説

$x^2+y^2=1$ から　$y^2=1-x^2$

$y^2 \geqq 0$ であるから　$1-x^2 \geqq 0$　　よって　$-1 \leqq x \leqq 1$

このとき　$x^2-y^2+2x=x^2-(1-x^2)+2x=2x^2+2x-1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

よって，x^2-y^2+2x は，$x=1$ で最大値 3，$x=-\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$ をとる。

また，$y^2=1-x^2$ であるから　$x=1$ のとき $y=0$，$x=-\frac{1}{2}$ のとき $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$x=1$，$y=0$ で最大値 3

$x=-\frac{1}{2}$，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

$\boxed{8}$

x の 2 次不等式 $x^2-2(k-1)x+2k^2+2k-4<0$ ……① がある。

(1)　$x=-1$ が ① を満たすような k の値の範囲を求めよ。

(2)　① を満たす x の値が存在するような k の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$\frac{-2-\sqrt{14}}{2}<k<\frac{-2+\sqrt{14}}{2}$　　(2)　$-5<k<1$

解説

(1)　① に $x=-1$ を代入すると　$(-1)^2-2(k-1)\cdot(-1)+2k^2+2k-4<0$

ゆえに　$2k^2+4k-5<0$ ……②

$2k^2+4k-5=0$ を解くと　$k=\frac{-2\pm\sqrt{14}}{2}$

よって，② の解は　$\frac{-2-\sqrt{14}}{2}<k<\frac{-2+\sqrt{14}}{2}$

(2)　$x^2-2(k-1)x+2k^2+2k-4=0$ の判別式を D とすると

$D=\{-2(k-1)\}^2-4\cdot1\cdot(2k^2+2k-4)=4(k-1)^2-4(2k^2+2k-4)$

$=-4(k^2+4k-5)$

条件を満たすのは $D>0$ のときであるから　$-4(k^2+4k-5)>0$

すなわち　$(k-1)(k+5)<0$

したがって　$-5<k<1$

参考　$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-1\cdot(2k^2+2k-4)=-k^2-4k+5$

としてもよい。

$\boxed{9}$

$f(x)=-x^2+ax+a-2$，$g(x)=x^2-(a-2)x+3$ について，次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1)　どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

解答　(1)　$-3<a<3$　　(2)　$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

解説

(1)　$f(x)<g(x)$ から　$-x^2+ax+a-2<x^2-(a-2)x+3$

よって　$2x^2-2(a-1)x-a+5>0$ ……①

どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つのは，不等式 ① がすべての実数 x について成り立つときである。

$2x^2-2(a-1)x-a+5=0$ の判別式を D とすると

$D=\{-2(a-1)\}^2-4\cdot2\cdot(-a+5)=4(a-1)^2-8(-a+5)$

$=4a^2-36=4(a^2-9)$

不等式 ① がすべての実数 x について成り立つための必要十分条件は $D<0$ であるから

$a^2-9<0$　　よって　$(a+3)(a-3)<0$

したがって　$-3<a<3$

参考　$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-2\cdot(-a+5)=a^2-9$ としてもよい。

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つための必要十分条件は，$f(x)$ の最大値より $g(x)$ の最小値の方が大きいことである。

$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a-2$，

$g(x)=\left(x-\frac{a-2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}+3$

よって　$\frac{a^2}{4}+a-2<-\frac{(a-2)^2}{4}+3$

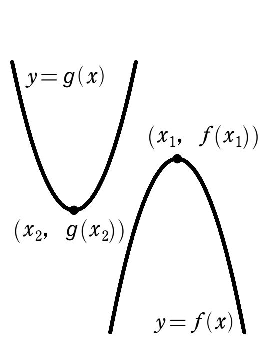
整理すると　$a^2-8<0$

ゆえに　$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})<0$

したがって　$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

参考　(1) の条件と (2) の条件は，似ているが異なる条件である。

たとえば，右の図において，どんな x に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つ（(1) の条件を満たす）が，$y=g(x)$ の頂点を $(x_2,\ g(x_2))$，$y=f(x)$ の頂点を $(x_1,\ f(x_1))$ とすると $f(x_1)>g(x_2)$ となり，(2) の条件は満たさない。



$\boxed{10}$

方程式 $|x|(x-3)+2x-k=0$ が異なる 3 個の実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

解答　$-\frac{1}{4}<k<0$

解説

方程式を変形すると　$|x|(x-3)+2x=k$

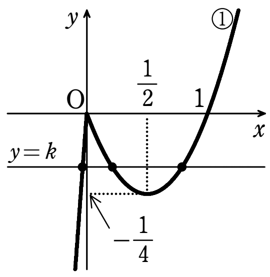
この方程式の異なる実数解の個数は，$y=|x|(x-3)+2x$　……①　のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数と一致する。

① について，$x\geqq 0$ のとき　$y=x(x-3)+2x=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$x<0$ のとき　$y=-x(x-3)+2x=-x^2+5x=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

よって，① のグラフは右の図のようになる。

図から，① のグラフと直線 $y=k$ が異なる 3 点で交わるような k の値の範囲は　$-\frac{1}{4}<k<0$



$\boxed{11}$

地点 A から木の先端 P の仰角を測ると 45° である。木に向かって水平に 4 m 近づいた地点 B から P の仰角を測ると 60° である。木の高さを求めよ。

解答　$2(3+\sqrt{3})$ m

解説

木の根もとを H とする。

PH$=x$ (m) とおくと

$\tan 60^\circ=\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{BH}}$　すなわち　$\sqrt{3}=\frac{x}{\mathrm{BH}}$

よって　$\mathrm{BH}=\frac{x}{\sqrt{3}}$

△AHP について　$\mathrm{PH}=\mathrm{AH}\tan 45^\circ$

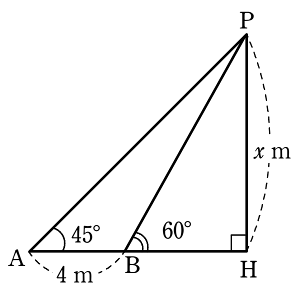
すなわち　$\mathrm{PH}=(\mathrm{AB}+\mathrm{BH})\tan 45^\circ$

ゆえに　$x=\left(4+\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cdot 1$

整理して　$(\sqrt{3}-1)x=4\sqrt{3}$

よって　$x=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4(3+\sqrt{3})}{3-1}=2(3+\sqrt{3})$

したがって，木の高さは　$2(3+\sqrt{3})$ m



$\boxed{12}$

二等辺三角形 ABC の頂角 A の大きさを 36°，底角 B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とし，BC$=2$ とする。これを用いて，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

解答　$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

解説

△ABC において，$\angle \mathrm{A}=36^\circ$，$\angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{C}$ であるから

$\angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{C}=\frac{180^\circ-36^\circ}{2}=72^\circ$

よって，△BCD において

$\angle \mathrm{DBC}=\frac{72^\circ}{2}=36^\circ$，$\angle \mathrm{C}=72^\circ$

ゆえに，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△BCD

よって　AB : BC＝BC : CD　……①

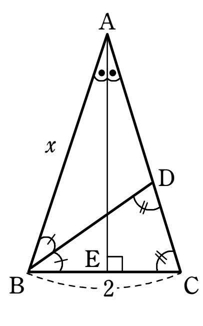
ここで，∠DAB＝∠DBA＝36° より △DAB は DA＝DB の二等辺三角形であり，△ABC∽△BCD より △BCD は BC＝BD の二等辺三角形である。

ゆえに　DA＝DB＝BC＝2

よって，AB$=x$ とおくと，CD＝AC−AD$=x-2$ であるから，① より

$x:2=2:(x-2)$

すなわち　$x(x-2)=4$



ゆえに　$x^2-2x-4=0$

$x>0$ であるから　$x=1+\sqrt{5}$

したがって，A から辺 BC に垂線 AE を下ろすと，∠BAE＝18° であるから

$$\sin 18^\circ=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$\boxed{13}$

次の 2 直線のなす鋭角 θ を求めよ。

(1)　$y=-\sqrt{3}x$，$y=-x$　　　(2)　$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$，$y=x$

解答　(1)　15°　(2)　75°

解説

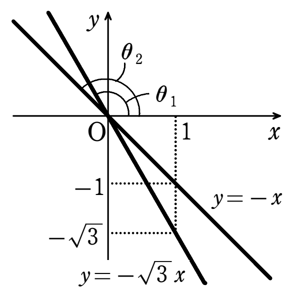
(1)　2 直線 $y=-\sqrt{3}x$，$y=-x$ と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ θ_1，θ_2 とすると

$\tan\theta_1=-\sqrt{3}$，$\tan\theta_2=-1$

よって　$\theta_1=120^\circ$，$\theta_2=135^\circ$

したがって，2 直線のなす鋭角 θ は

$\theta=\theta_2-\theta_1=135^\circ-120^\circ=15^\circ$



(2)　2 直線 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$，$y=x$ と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ θ_1，θ_2 とすると

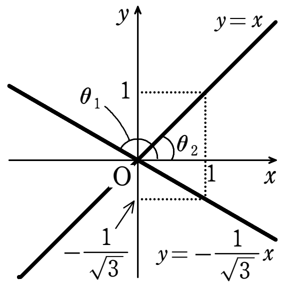
$\tan\theta_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\tan\theta_2=1$

よって　$\theta_1=150^\circ$，$\theta_2=45^\circ$

したがって，2 直線のなす鋭角 θ は

$\theta=180^\circ-(\theta_1-\theta_2)=180^\circ-(150^\circ-45^\circ)$

$=180^\circ-105^\circ=75^\circ$



注意　$\theta_1-\theta_2>90^\circ$ ならば，$\theta_1-\theta_2$ は鈍角となる。

求めるのは 2 直線のなす鋭角だから，このとき $\theta=180^\circ-(\theta_1-\theta_2)$ となる。

$\boxed{14}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

解答　$\frac{3}{8}$

解説

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗して　$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

よって　$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$　　ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$\boxed{15}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。$\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解答　$\tan\theta=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

解説

$\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$ から　$\cos\theta=\sin\theta+\frac{1}{2}$　……①

① を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して　$\sin^2\theta+\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2=1$

ゆえに　$2\sin^2\theta+\sin\theta-\frac{3}{4}=0$　　よって　$8\sin^2\theta+4\sin\theta-3=0$

これを $\sin\theta$ の 2 次方程式とみて，$\sin\theta$ について解くと

$$\sin\theta=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-8\cdot(-3)}}{8}=\frac{-2\pm 2\sqrt{7}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{4}$$

$0\leqq\sin\theta\leqq 1$ であるから　$\sin\theta=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$

このとき，① から　$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

したがって　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-1+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

$\boxed{16}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(3)　$\sin\theta-\cos\theta$

解答　(1)　$-\dfrac{4}{9}$　(2)　$\dfrac{13}{27}$　(3)　$\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

解説

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗して　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$　　ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{4}{9}\right)\right\}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{13}{9}=\dfrac{13}{27}$

別解　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\dfrac{4}{9}\right)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}+\dfrac{12}{27}=\dfrac{13}{27}$

(3)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\dfrac{4}{9}\right)=1+\dfrac{8}{9}=\dfrac{17}{9}$

(1) から　$\sin\theta\cos\theta<0$

これと $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ から　$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

よって，$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{17}{9}}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

$\boxed{17}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$0\leqq\tan\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解答　(1)　$0^\circ\leqq\theta<60^\circ$，$120^\circ<\theta\leqq180^\circ$　(2)　$0^\circ\leqq\theta\leqq30^\circ$，$\theta=180^\circ$

解説

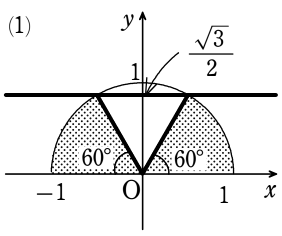
(1)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　$\theta=60^\circ$，120°

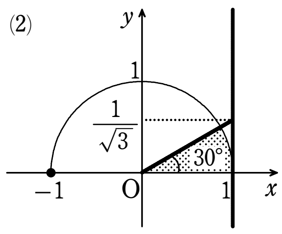
図から　$0^\circ\leqq\theta<60^\circ$，$120^\circ<\theta\leqq180^\circ$

(2)　$\tan\theta=0$ を満たす θ は　$\theta=0^\circ$，180°

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は　$\theta=30^\circ$

図から　$0^\circ\leqq\theta\leqq30^\circ$，$\theta=180^\circ$

(1)


(2)


$\boxed{18}$

θ は鋭角とする。$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\theta$　　(2)　$\sin(90^\circ-\theta)$　　(3)　$\tan(90^\circ-\theta)$

解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(2)　$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(3)　$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

解説

(1)　等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$

$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(2)　$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(3)　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{3}\div\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって　$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{19}$

次の式の値を求めよ。

(1)　$\cos(90^\circ-\theta)\sin(180^\circ-\theta)-\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$

(2)　$\cos^2\theta+\cos^2(90^\circ-\theta)+\cos^2(90^\circ+\theta)+\cos^2(180^\circ-\theta)$

(3)　$\cos56^\circ\cos124^\circ+\sin56^\circ\cos146^\circ$

(4)　$\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\tan^2 130^\circ$

解答　(1)　1　(2)　2　(3)　-1　(4)　1

解説

(1)　(与式)$=\sin\theta\sin\theta-\cos\theta(-\cos\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(2)　(与式)$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+(-\sin\theta)^2+(-\cos\theta)^2$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

(3)　$\cos124^\circ=\cos(180^\circ-56^\circ)=-\cos56^\circ$

$\cos146^\circ=\cos(90^\circ+56^\circ)=-\sin56^\circ$

よって　(与式)$=\cos56^\circ(-\cos56^\circ)+\sin56^\circ(-\sin56^\circ)$

$=-\cos^2 56^\circ-\sin^2 56^\circ$

$=-(\sin^2 56^\circ+\cos^2 56^\circ)=-1$

(4)　$\tan130^\circ=\tan(90^\circ+40^\circ)=-\dfrac{1}{\tan40^\circ}$

よって　(与式)$=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\dfrac{1}{\tan40^\circ}\right)^2=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\dfrac{\cos40^\circ}{\sin40^\circ}\right)^2$

$=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\dfrac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\dfrac{1-\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\dfrac{\sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=1$

$\boxed{20}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta-\cos\theta-1\leqq0$　　(2)　$2\cos^2\theta+3\sin\theta<3$

解答　(1)　$0^\circ\leqq\theta\leqq60^\circ$，$\theta=180^\circ$　(2)　$0^\circ\leqq\theta<30^\circ$，$150^\circ<\theta\leqq180^\circ$

解説

(1)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから　$2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta-1\leqq0$

整理すると　$2\cos^2\theta+\cos\theta-1\geqq0$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき　$-1\leqq t\leqq1$　……①

不等式は　$2t^2+t-1\geqq0$　　ゆえに　$(t+1)(2t-1)\geqq0$

よって　$t\leqq-1$，$\dfrac{1}{2}\leqq t$

① との共通範囲を求めて　$t=-1$，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq1$

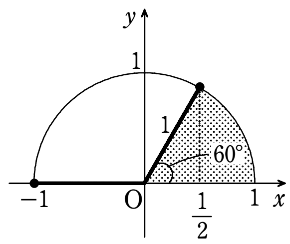
$t=-1$　すなわち　$\cos\theta=-1$ を解いて

$\theta=180^\circ$

$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq1$　すなわち　$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq1$ を解いて

$0^\circ\leqq\theta\leqq60^\circ$

以上から　$0^\circ\leqq\theta\leqq60^\circ$，$\theta=180^\circ$



(2)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから　$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta<3$

整理すると　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1>0$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき　$0\leqq t\leqq1$　……①

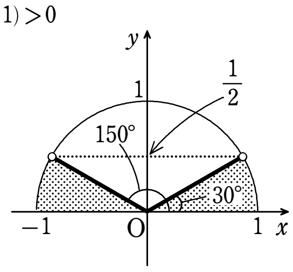
不等式は　$2t^2-3t+1>0$　　ゆえに　$(2t-1)(t-1)>0$

よって　$t<\dfrac{1}{2}$，$1<t$

① との共通範囲を求めて　$0\leqq t<\dfrac{1}{2}$

求める解は，$0\leqq t<\dfrac{1}{2}$　すなわち　$0\leqq\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

を解いて　$0^\circ\leqq\theta<30^\circ$，$150^\circ<\theta\leqq180^\circ$



$\boxed{1}$

2 次不等式 $ax^2+x+b>0$ の解が $x<-3$，$2<x$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{2}$

不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ を満たす整数 x がちょうど 2 個だけ存在するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{3}$

2 次方程式 $x^2-ax+1=0$ の 1 つの解が $0<x<1$ の範囲にあり，他の解が $2<x<3$ の範囲にあるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{4}$

2 次関数 $y=x^2+mx+2$ が次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　この 2 次関数のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わる。

(2)　この 2 次関数のグラフと x 軸の $x<-1$ の部分が異なる 2 点で交わる。

$\boxed{5}$

不等式 $x^2-5x+6<0$ を満たすすべての x が，不等式 $x^2-3ax+2a^2<0$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{6}$

関数 $y=|x+1|+|x-1|+|x-2|$ $(-2\leqq x\leqq 3)$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{7}$

$x^2+y^2=1$ のとき，x^2-y^2+2x の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{8}$

x の 2 次不等式 $x^2-2(k-1)x+2k^2+2k-4<0$ …… ① がある。

(1)　$x=-1$ が ① を満たすような k の値の範囲を求めよ。

(2)　① を満たす x の値が存在するような k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{9}$

$f(x)=-x^2+ax+a-2$，$g(x)=x^2-(a-2)x+3$ について，次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1)　どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

10

方程式 $|x|(x-3)+2x-k=0$ が異なる 3 個の実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

11

地点 A から木の先端 P の仰角を測ると 45° である。木に向かって水平に 4 m 近づいた地点 B から P の仰角を測ると 60° である。木の高さを求めよ。

12

二等辺三角形 ABC の頂角 A の大きさを 36°，底角 B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とし，BC＝2 とする。これを用いて，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

13

次の 2 直線のなす鋭角 θ を求めよ。

(1)　$y=-\sqrt{3}\,x$，$y=-x$　　　(2)　$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$，$y=x$

14

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

15

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{16}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$　　(3)　$\sin\theta - \cos\theta$

$\boxed{17}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$0 \leqq \tan\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{18}$

θ は鋭角とする。$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\theta$　　(2)　$\sin(90^\circ - \theta)$　　(3)　$\tan(90^\circ - \theta)$

$\boxed{19}$

次の式の値を求めよ。

(1)　$\cos(90^\circ - \theta)\sin(180^\circ - \theta) - \sin(90^\circ - \theta)\cos(180^\circ - \theta)$

(2)　$\cos^2\theta + \cos^2(90^\circ - \theta) + \cos^2(90^\circ + \theta) + \cos^2(180^\circ - \theta)$

(3)　$\cos 56^\circ \cos 124^\circ + \sin 56^\circ \cos 146^\circ$

(4)　$\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ} - \tan^2 130^\circ$

$\boxed{20}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 \leqq 0$　　(2)　$2\cos^2\theta + 3\sin\theta < 3$