高2理系数学総合S　課題（1月23日まで）　～式と証明・複素数と方程式・確率統計～

$\boxed{1}$

$x>0$ とする。式 $\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ の値は $x=$ ${}^{ア}\boxed{}$ のとき最小となり，最小値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{2}$

次の等式を証明せよ。ただし，n は $n\geqq 2$ を満たす整数で，k は $1\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする。

(1)　$k\cdot {}_n\mathrm{C}_k=n\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

(2)　${}_n\mathrm{C}_1+2\cdot {}_n\mathrm{C}_2+3\cdot {}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n\cdot {}_n\mathrm{C}_n=n\cdot 2^{n-1}$

(3)　${}_n\mathrm{C}_0+2\cdot {}_n\mathrm{C}_1+3\cdot {}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot {}_n\mathrm{C}_n=(n+2)\cdot 2^{n-1}$

$\boxed{3}$

(1)　x，y の間に，$x+y=a\ (\fallingdotseq 0)$，$x^3+y^3=a^3$ が成り立っている。このとき，x，y のいずれか一方は，a に等しいことを証明せよ。

(2)　x，y，z の間に，$x+y+z=a\ (\fallingdotseq 0)$，$x^3+y^3+z^3=a^3$ が成り立っている。このとき，x，y，z のうち少なくとも 1 つは，a に等しいことを証明せよ。

$\boxed{4}$

$f(x)=x^3-5x^2+9x-5$ とする。3 次方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=$ ${}^{ア}\boxed{}$ であり，$(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{5}$

a を実数，i を虚数単位とする。2 次方程式 $x^2-2(a+i)x+3+2i=0$ が実数解をもつとき，その実数解と a の値を求めよ。また，もう 1 つの解を求めよ。

$\boxed{6}$

2 次方程式 $x^2-(m^3-26)x+p=0$ が 2 つの整数を解にもつような正の整数 m と素数 p の組を求めよ。

$\boxed{7}$

1，2，3，4，5，6 の数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードを袋の中に入れる。この袋の中から 2 枚のカードを同時に抜き出し，それらのカードの数の大きい方を X，小さい方を Y とする。

(1)　確率変数 X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(2)　確率変数 X と Y は互いに独立であるか，独立でないか，答えよ。

(3)　確率変数 XY の期待値 $E(XY)$ を求めよ。

$\boxed{8}$

3 種類の品物 A，B，C がある。A を 3 個，B を 2 個，C を 1 個任意に選んで 1 つにまとめて 1 個の商品とする。

(1)　「A には A 全体の $\dfrac{1}{16}$ の不良品が含まれ，B には B 全体の $\dfrac{1}{9}$，C には C 全体の $\dfrac{1}{25}$ の不良品が含まれている」という仮説のもとで，全商品の中から，無作為に 1 個の商品を取り出したとき，それが完全な商品である確率を求めよ。ここで，完全な商品とは不良品が含まれていない商品のことである。

(2)　商品 960 個を無作為に抽出したところ，完全な商品は 640 個であった。このことから，(1) の仮説が正しくないと判断してよいかどうかを，有意水準 (危険率) 5 % で検定せよ。

$\boxed{9}$

大小 2 個のさいころを同時に投げる。大きいさいころの出る目を十の位，小さいさいころの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を X とし，小さいさいころの出る目を十の位，大きいさいころの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を Y とする。

(1)　確率 $P(X-Y>0)$ を求めよ。

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

(3) 確率変数 $X-Y$ の標準偏差 $\sigma(X-Y)$ を求めよ。

$\boxed{10}$

ある企業の入社試験について，採用枠 300 名のところ 500 名の応募があった。試験の結果は 500 点満点の試験に対し，平均点 245 点，標準偏差 50 点であった。得点の分布が正規分布であるとみなされるとき，合格最低点はおよそ何点であるか。小数点以下を切り捨てて答えよ。

$\boxed{11}$

箱の中にボールが m 個入っており，そのうち当たりのボールは 1 個だけである。箱の中から無作為にボールを 1 個取り出し，当たりかどうかを確認して箱に戻すという試行を n 回繰り返す。

(1) $m=4$，$n=4$ のとき，少なくとも 1 回当たりが出る確率を求めよ。

(2) 1 回の試行で当たる確率を p，当たりが出た回数を X とする。X が近似的に正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に従うことを利用して，$m=10$，$n=100$ のときの $P(X \geqq 10)$ を求めよ。

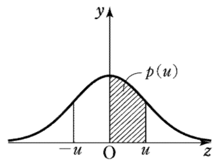
(3) 標準正規分布に従う確率変数を Z とする。確率変数 Y が二項分布 $B(n,\ p)$ に従い，y が 0 以上の整数であるとき，

$$P(Y \geqq y) \fallingdotseq P\left(Z \geqq \frac{y-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

として近似を行うと，(2) の近似より精度が高いといわれている。このことを用いて，$m=10$，$n=100$ のときの $P(X \geqq 10)$ を求めよ。また，以下の数表を用いてよい。

u	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$P(0 \leqq Z \leqq u)$	0.000	0.040	0.044	0.050	0.057	0.066	0.079

正規分布表



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900

$\boxed{1}$

解答　(ア)　1　　(イ)　3

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　略

$\boxed{4}$

解答　(ア)　5　　(イ)　4

$\boxed{5}$

解答　実数解は 1；$a=2$；もう 1 つの解は $3+2i$

$\boxed{6}$

解答　$(m,\ p)=(2,\ 17),\ (4,\ 37)$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\dfrac{14}{3}$　　(2)　互いに独立でない　　(3)　$\dfrac{35}{3}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$\dfrac{5}{8}$　　(2)　判断してよい

$\boxed{9}$

解答　(1)　$\dfrac{5}{12}$　　(2)　順に $\dfrac{77}{2}$，$\dfrac{3535}{12}$　　(3)　$\dfrac{3\sqrt{210}}{2}$

$\boxed{10}$

解答　232 点

$\boxed{11}$

解答　(1)　$\dfrac{175}{256}$　　(2)　0.5　　(3)　0.566

$\boxed{1}$

解説

$$\frac{x^2+x+4}{x+1}=\frac{x(x+1)+4}{x+1}=x+\frac{4}{x+1}=(x+1)+\frac{4}{x+1}-1$$

$x>0$ より，$x+1>0$，$\dfrac{4}{x+1}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$(x+1)+\frac{4}{x+1}-1\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=4-1=3$$

等号が成り立つのは，$x+1=\dfrac{4}{x+1}$，$x+1>0$ のときである。

$x+1=\dfrac{4}{x+1}$ から　　$(x+1)^2=4$

$x+1>0$ であるから　　$x+1=2$　　　すなわち　$x=1$

したがって，$\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ は，$x=^{ア}1$ のとき最小となり，最小値は $^{イ}3$ である。

$\boxed{2}$

解説

(1)　$k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=k\cdot\dfrac{n\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!(n-k)!}$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

(2)　(1) から　　${}_n\mathrm{C}_1+2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+3\cdot{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

$$=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_0+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

$$=n({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})\quad\cdots\cdots①$$

ここで，二項定理により

$$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}$$

$$={}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

①，② から　　${}_n\mathrm{C}_1+2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+3\cdot{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

$$=n({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})$$

$$=n\cdot 2^{n-1}$$

(3)　(2) より

$${}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+3\cdot{}_nC_3+\cdots\cdots+n\cdot{}_nC_n=n\cdot 2^{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$

また，二項定理により

$$2^n=(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n$$

すなわち　${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=2\cdot 2^{n-1}$　……④

③，④の辺々を加えると

$${}_nC_0+2\cdot{}_nC_1+3\cdot{}_nC_2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot{}_nC_n=(n+2)\cdot 2^{n-1}$$

$\boxed{3}$

解説

(1)　$x+y=a$ から　$y=a-x$ ……①

$x^3+y^3=a^3$ に代入して　$x^3+(a-x)^3=a^3$

よって　$x^3+a^3-3a^2x+3ax^2-x^3=a^3$

すなわち　$3ax(x-a)=0$

$a\neq 0$ であるから　$x=0$ または $x=a$

ここで，$x=0$ のとき，① から　$y=a$

よって，x，y のいずれか一方は a に等しい。

(2)　$x+y+z=a$ から　$z=a-(x+y)$ ……②

$x^3+y^3+z^3=a^3$ に代入して　$x^3+y^3+\{a-(x+y)\}^3=a^3$

よって　$x^3+y^3+a^3-3a^2(x+y)+3a(x+y)^2-(x+y)^3=a^3$

すなわち

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-3a^2(x+y)+3a(x+y)^2-(x+y)^3=0$$

この式の左辺を因数分解すると

$$(x+y)\{(x^2-xy+y^2)-3a^2+3a(x+y)-(x^2+2xy+y^2)\}$$
$$=(x+y)\{-3a^2+3a(x+y)-3xy\}$$
$$=-3(x+y)(a-x)(a-y)$$

これが0に等しいから

$$x+y=0 \text{ または } x=a \text{ または } y=a$$

ここで，$x+y=0$ のとき，② から　$z=a$

よって，x，y，z のうち少なくとも1つは a に等しい。

別解　(1)　$(x-a)(y-a)=0$ を示す。

$x+y=a$ から　$x-a=-y$，　$y-a=-x$

よって　$(x-a)(y-a)=xy$ ……③

また，ここで　$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$x+y=a$，$x^3+y^3=a^3$ であるから　$a^3=a^3+3xya$

$a\neq 0$ であるから　$xy=0$

よって，③ から　$(x-a)(y-a)=0$

ゆえに　$x=a$ または $y=a$

したがって，x，y のいずれか一方は a に等しい。

(2)　$(x-a)(y-a)(z-a)=0$ を示す。

$x+y+z=a$ から

$$x-a=-(y+z),\quad y-a=-(z+x),\quad z-a=-(x+y)$$

よって

$$(x-a)(y-a)(z-a)=-(y+z)(z+x)(x+y) \quad \cdots\cdots ④$$

ここで　$(x+y+z)^3$

$$=\{x+(y+z)\}^3$$
$$=x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3$$
$$=x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+\{y^3+z^3+3yz(y+z)\}$$
$$=x^3+y^3+z^3+3(y+z)\{x^2+x(y+z)+yz\}$$
$$=x^3+y^3+z^3+3(y+z)(z+x)(x+y)$$

$x+y+z=a$，$x^3+y^3+z^3=a^3$ であるから

$$a^3=a^3+3(y+z)(z+x)(x+y)$$

よって　$(y+z)(z+x)(x+y)=0$

ゆえに，④ から　$(x-a)(y-a)(z-a)=0$

よって　$x=a$ または $y=a$ または $z=a$

したがって，x，y，z のうち少なくとも1つは a に等しい。

$\boxed{4}$

解説

3次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=5,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=9,\quad \alpha\beta\gamma=5$$

（ア）　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=5\cdot(5^2-3\cdot 9)+3\cdot 5={}^{ア}5$

別解　α，β，γ は3次方程式 $f(x)=0$ の解であるから

$\alpha^3-5\alpha^2+9\alpha-5=0$　すなわち　$\alpha^3=5\alpha^2-9\alpha+5$

$\beta^3-5\beta^2+9\beta-5=0$　すなわち　$\beta^3=5\beta^2-9\beta+5$

$\gamma^3-5\gamma^2+9\gamma-5=0$　すなわち　$\gamma^3=5\gamma^2-9\gamma+5$

よって　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(5\alpha^2-9\alpha+5)+(5\beta^2-9\beta+5)+(5\gamma^2-9\gamma+5)$

$=5(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-9(\alpha+\beta+\gamma)+15$

$=5\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}-9(\alpha+\beta+\gamma)+15$

$=5\cdot(5^2-2\cdot 9)-9\cdot 5+15={}^{ア}5$

（イ）　$(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$

$=(9-3\alpha-3\beta+\alpha\beta)(3-\gamma)$

$=27-9\gamma-9\alpha+3\gamma\alpha-9\beta+3\beta\gamma+3\alpha\beta-\alpha\beta\gamma$

$=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=27-9\cdot 5+3\cdot 9-5={}^{イ}4$

別解　3次方程式 $f(x)=0$ の解が α，β，γ であるから

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$x=3$ を代入すると　$f(3)=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$

したがって　$(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=f(3)=3^3-5\cdot 3^2+9\cdot 3-5={}^{イ}4$

5

解説

方程式の実数解を α とすると　$\alpha^2-2(a+i)\alpha+3+2i=0$

i について整理して　$(\alpha^2-2a\alpha+3)+(-2\alpha+2)i=0$

a，α は実数であるから，$\alpha^2-2a\alpha+3$，$-2\alpha+2$ も実数である。

よって　$\alpha^2-2a\alpha+3=0$，$-2\alpha+2=0$

これを解いて　$\alpha=1$，$a=2$

このとき，方程式は　$x^2-(4+2i)x+3+2i=0$

すなわち　$(x^2-4x+3)-2(x-1)i=0$

よって　$(x-1)(x-3)-2(x-1)i=0$

ゆえに　$(x-1)(x-3-2i)=0$

したがって，もう1つの解は　$3+2i$

6

解説

2次方程式 $x^2-(m^3-26)x+p=0$ の2つの整数解を α，$\beta\ (\alpha\leqq\beta)$ とすると，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=m^3-26$ ……①，　$\alpha\beta=p$ ……②

p は素数であり，α，β は $\alpha\leqq\beta$ を満たす整数であるから，② より

$\alpha=1$，$\beta=p$ または $\alpha=-p$，$\beta=-1$

[1]　$\alpha=1$，$\beta=p$ のとき

① から　$p+1=m^3-26$

よって　$p=m^3-27=(m-3)(m^2+3m+9)$

ここで　$m^2+3m+9=\left(m+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}>1$

p は素数であるから　$m-3=1$，$m^2+3m+9=p$

このとき　$m=4$，$p=4^2+3\cdot 4+9=37$

4は正の整数であり，37は素数であるから，$m=4$，$p=37$ は適する。

[2]　$\alpha=-p$，$\beta=-1$ のとき

① から　$-p-1=m^3-26$

よって　$p=25-m^3$ ……③

$p\geqq 2$ であるから　$25-m^3\geqq 2$

ゆえに　$m^3\leqq 23$

これを満たす正の整数 m は　$m=1$，2

(i)　$m=1$ のとき

③ から　$p=25-1^3=24$

24は素数ではないから，不適。

(ii)　$m=2$ のとき

③から　　$p=25-2^3=17$

17 は素数であるから，$m=2$，$p=17$ は適する。

したがって　　$(m,\ p)=(2,\ 17),\ (4,\ 37)$

7

解説

2 枚のカードの抜き出し方は　　${}_6C_2=15$（通り）

(1)　X のとりうる値は 2，3，4，5，6 で

$$P(X=2)=\frac{1}{15},\ P(X=3)=\frac{2}{15},\ P(X=4)=\frac{3}{15},$$

$$P(X=5)=\frac{4}{15},\ P(X=6)=\frac{5}{15}$$

よって　　$E(X)=2\cdot\frac{1}{15}+3\cdot\frac{2}{15}+4\cdot\frac{3}{15}+5\cdot\frac{4}{15}+6\cdot\frac{5}{15}=\frac{70}{15}=\frac{14}{3}$

(2)　Y のとりうる値は 1，2，3，4，5 であり，X と Y の同時分布は次の表のようになる。

X ＼ Y	1	2	3	4	5	計
2	$\frac{1}{15}$	0	0	0	0	$\frac{1}{15}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	0	$\frac{2}{15}$
4	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{3}{15}$
5	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{4}{15}$
6	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{15}$
計	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$P(Y=1)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ であるから

$$P(X=2)P(Y=1)=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{45}$$

また，$P(X=2,\ Y=1)=\frac{1}{15}$ より

$$P(X=2,\ Y=1)\neq P(X=2)P(Y=1)$$

であるから，X と Y は互いに独立でない。

(3)　(2) の表から

$$\begin{aligned}E(XY)&=2\cdot1\cdot\frac{1}{15}+3\cdot1\cdot\frac{1}{15}+3\cdot2\cdot\frac{1}{15}\\&\quad+4\cdot1\cdot\frac{1}{15}+4\cdot2\cdot\frac{1}{15}+4\cdot3\cdot\frac{1}{15}\\&\quad+5\cdot1\cdot\frac{1}{15}+5\cdot2\cdot\frac{1}{15}+5\cdot3\cdot\frac{1}{15}+5\cdot4\cdot\frac{1}{15}\\&\quad+6\cdot1\cdot\frac{1}{15}+6\cdot2\cdot\frac{1}{15}+6\cdot3\cdot\frac{1}{15}+6\cdot4\cdot\frac{1}{15}+6\cdot5\cdot\frac{1}{15}\\&=\frac{175}{15}=\frac{35}{3}\end{aligned}$$

8

解説

(1)　仮説のもとでは，A，B，C が不良品でない確率はそれぞれ $\frac{15}{16}$，$\frac{8}{9}$，$\frac{24}{25}$ であるから，1 個の商品が完全な商品である確率は　$\left(\frac{15}{16}\right)^3\times\left(\frac{8}{9}\right)^2\times\frac{24}{25}=\frac{5}{8}$

(2)　(1) の仮説が正しいとすると，960 個中完全な商品の個数 X は，二項分布 $B\left(960,\ \frac{5}{8}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=960\cdot\frac{5}{8}=600,\qquad \sigma=\sqrt{960\cdot\frac{5}{8}\left(1-\frac{5}{8}\right)}=15$$

であり，標本の大きさ 960 は十分大きいから，X は近似的に正規分布 $N(600,\ 15^2)$ に従う。

よって，$Z=\frac{X-600}{15}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)=0.95$ であるから，有意水準 5 % の棄却域は

$Z \leqq -1.96$，$1.96 \leqq Z$

$X=640$ のとき $Z=\dfrac{X-600}{15}=2.66\cdots$ であり，これは棄却域に入るから，仮説は棄却できる。

したがって，(1) の仮説は正しくないと判断してよい。

$\boxed{9}$

解説

(1)　大きいさいころ，小さいさいころの出る目をそれぞれ A，B とすると

$X=10A+B$，$Y=10B+A$

よって　　$X-Y=10A+B-(10B+A)=9(A-B)$

$X-Y>0$ から　　$A-B>0$　　すなわち　　$A>B$

$A>B$ を満たす A，B の組 $(A,\ B)$ は

$(2,\ 1)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$，

$(5,\ 1)$，$(5,\ 2)$，$(5,\ 3)$，$(5,\ 4)$，$(6,\ 1)$，$(6,\ 2)$，$(6,\ 3)$，$(6,\ 4)$，$(6,\ 5)$

の 15 通りである。

ゆえに　　$P(X-Y>0)=\dfrac{15}{6^2}=\dfrac{5}{12}$

(2)　$E(A)=1\cdot\dfrac{1}{6}+2\cdot\dfrac{1}{6}+3\cdot\dfrac{1}{6}+4\cdot\dfrac{1}{6}+5\cdot\dfrac{1}{6}+6\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{2}$

よって　　$V(A)=E(A^2)-\{E(A)\}^2$

$$=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

$E(B)=E(A)=\dfrac{7}{2}$ であるから

$$E(X)=E(10A+B)=10E(A)+E(B)=11\cdot\frac{7}{2}=\frac{77}{2}$$

$V(B)=V(A)=\dfrac{35}{12}$ であり，確率変数 A，B は互いに独立であるから

$$V(X)=V(10A+B)=10^2V(A)+V(B)$$

$$=101\cdot\frac{35}{12}=\frac{3535}{12}$$

(3)　$V(B)=V(A)=\dfrac{35}{12}$ であり，確率変数 A，B は互いに独立であるから

$$V(X-Y)=V(9A-9B)=9^2V(A)+(-9)^2V(B)=\frac{9^2\cdot35}{6}$$

したがって　　$\sigma(X-Y)=\sqrt{\dfrac{9^2\cdot35}{6}}=\dfrac{3\sqrt{210}}{2}$

$\boxed{10}$

解説

得点 X について，$Z=\dfrac{X-245}{50}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

ここで，$P(Z\geqq u)=\dfrac{300}{500}=0.6$ となる u の値を求める。

$0.6>0.5$ であるから，$u<0$ であり

$0.5+P(0\leqq Z\leqq|u|)=0.6$

すなわち　　$P(0\leqq Z\leqq|u|)=0.1$

正規分布表から　　$|u|\fallingdotseq0.25$　　　$u<0$ より　$u=-0.25$

$\dfrac{X-245}{50}=-0.25$ から　　$X=232.5$

小数点以下を切り捨てて，合格最低点は　　232 点

$\boxed{11}$

解説

(1)　A：「少なくとも 1 回当たりが出る」とすると，余事象 $\overline{A}$ は「4 回とも当たりが出ない」であり，その確率は

$$P(\overline{A})=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$$

よって，求める確率は　　$P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{175}{256}$

(2)　X は二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{10}\right)$ に従う。

よって，X の期待値は　　$m=100\cdot\dfrac{1}{10}=10$

標準偏差は　　$\sigma=\sqrt{100\cdot\dfrac{1}{10}\left(1-\dfrac{1}{10}\right)}=3$

$n=100$ は大きいから，この X は近似的に正規分布 $N(10,\ 3^2)$ に従う。

ゆえに，$Z=\dfrac{X-10}{3}$ とおくと，Z は近似的に $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって

$$P(X\geqq 10)=P\left(Z\geqq\frac{10-10}{3}\right)=P(Z\geqq 0)=0.5$$

(3)　X は二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{10}\right)$ に従う。

$$P(X\geqq 10)\fallingdotseq P\left(Z\geqq\frac{10-0.5-10}{3}\right)$$

$$=P\left(Z\geqq-\frac{1}{6}\right)=0.5+P\left(0\leqq Z\leqq\frac{1}{6}\right)$$

$$=0.5+0.066=0.566$$

参考　$P(Y\geqq y)\fallingdotseq P\left(Z\geqq\dfrac{y-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ の近似は，二項分布の正規分布の近似

$P(Y\geqq y)\fallingdotseq P\left(Z\geqq\dfrac{y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ について，右辺の y を $y-0.5$ におき換えたもの

である。

これを 半整数補正 という。