1

解説

(1) $f(x)=-a^2x^2+4ax=-a^2\left(x-\dfrac{2}{a}\right)^2+4$

よって，$y=f(x)$ のグラフは上に凸である放物線で，軸は $x=\dfrac{2}{a}$，頂点の座標は

$\left(\dfrac{2}{a},\ 4\right)$ である。

ここで，a は正の実数であるから　$\dfrac{2}{a}>0$

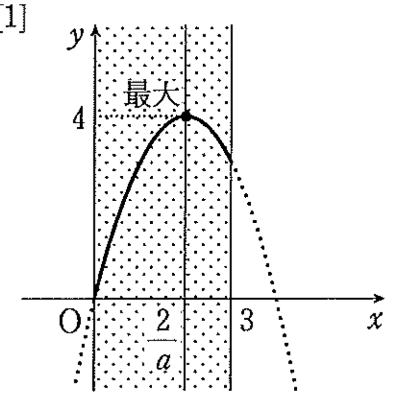
[1]　$0<\dfrac{2}{a}\leqq 3$ すなわち $a\geqq\dfrac{2}{3}$ のとき

$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値は　$f\left(\dfrac{2}{a}\right)=4$

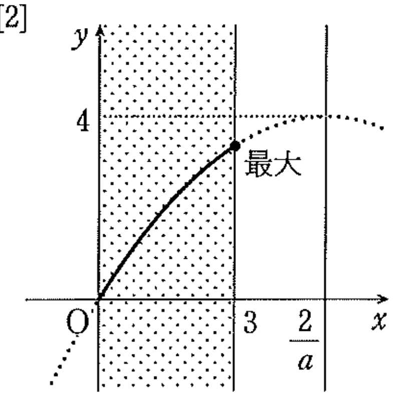
[2]　$\dfrac{2}{a}>3$ すなわち $0<a<\dfrac{2}{3}$ のとき

$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値は　$f(3)=-9a^2+12a$

[1]



[2]



(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=3$ の共有点の x 座標は，$-a^2x^2+4ax=3$ から

$$a^2x^2-4ax+3=0$$

$$(ax-1)(ax-3)=0$$

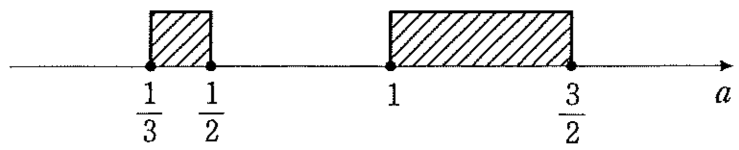
よって　$x=\dfrac{1}{a},\ \dfrac{3}{a}$

曲線 $y=f(x)$ と線分 ℓ が共有点をもつための条件は

$$2\leqq\frac{1}{a}\leqq 3 \quad \text{または} \quad 2\leqq\frac{3}{a}\leqq 3$$

よって，求める a の値の範囲は　$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$　または　$1\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$

数直線上に図示すると，次のようになる。



2

解説

(1) 勝敗表を作ると，次のようになる。

A＼B	石	はさみ	紙
石	△	○	×
はさみ	×	△	○
紙	○	×	△

○：A が勝つ
×：B が勝つ
△：引き分け

よって　A が B に勝つ確率は　$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$，　引き分ける確率は　$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(2) 勝敗表を作ると，次のようになる。

A＼B	石	はさみ	紙	水
石	△	○	×	×
はさみ	×	△	○	×
紙	○	×	△	○
水	○	○	×	△

よって　A が B に勝つ確率は　$\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$，　引き分ける確率は　$\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

(3) A が勝つ確率と B が勝つ確率は等しい。

よって，A が勝つ確率は　$\left(1-\dfrac{5}{25}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{10}{25}=\dfrac{2}{5}$

A の勝つ確率が A の「手」によらないとき，それぞれの「手」で A が勝つ確率は

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$$

よって，1 つの「手」は，2 つに勝ち 2 つに負けるように勝敗規則を定めるとよい。
ゆえに，「土」は「紙」と「水」に勝ち，「石」と「はさみ」に負けるように定めればよい。

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$ であるから

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\
&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\
&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2\\
&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2
\end{aligned}
$$

よって，与えられた不等式から　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\leqq 1$　すなわち　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 1$

したがって，点 P 全体のなす図形は，点 O を中心とする半径 1 の円周および内部であり，求める面積は　$\pi\cdot 1^2=\pi$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1$ であるから，(1) と同様にして，与えられた不等式より　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 1$

したがって，点 P 全体のなす図形は，点 O を中心とする半径 1 の球面および内部であり，求める体積は　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\dfrac{4}{3}\pi$