

1

【解答】 (1) 1 (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{1}{49}$ (4) $-\frac{1}{216}$ (5) 7 (6) 16 (7) $\frac{1}{243}$

【解説】

- (1) $(-3)^0 = 1$
 (2) $10^{-1} = \frac{1}{10}$
 (3) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$
 (4) $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = -\frac{1}{216}$
 (5) $49^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7^{2 \times \frac{1}{2}} = 7$
 (6) $8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^{3 \times \frac{4}{3}} = 2^4 = 16$
 (7) $81^{-\frac{5}{4}} = (3^4)^{-\frac{5}{4}} = 3^{4 \times (-\frac{5}{4})} = 3^{-5} = \frac{1}{243}$

2

【解答】 (1) 5 (2) 0.1 (3) 25 (4) 3 (5) 2

【解説】

- (1) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$
 (2) $\sqrt[3]{0.00001} = \sqrt[3]{0.1^5} = 0.1$
 (3) $(\sqrt[4]{5})^8 = \sqrt[4]{5^8} = \sqrt{(5^2)^4} = 5^2 = 25$
 (4) $\frac{\sqrt[4]{567}}{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[4]{\frac{567}{7}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
 (5) $\sqrt[4]{256} = 2^4 \sqrt[4]{256} = 8 \sqrt[4]{2^8} = 2$

3

【解答】 (1) $2\sqrt[3]{6}$ (2) 2 (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $4\sqrt[3]{2}$ (5) $-2 - 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4}$
 (6) 0

【解説】

- (1) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 6} = \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{6} = 2\sqrt[3]{6}$
 (2) $\sqrt[3]{\sqrt{32}} \times \sqrt{8} \div \sqrt[3]{16} = \{(32)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \div 16^{\frac{1}{3}} = (2^5)^{\frac{1}{6}} \times (2^3)^{\frac{1}{2}} \times (2^4)^{-\frac{1}{3}}$
 $= 2^{\frac{5}{6}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{5}{6} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3}} = 2^1 = 2$
 (3) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$
 【別解】 $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$
 (4) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 2}$
 $= 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2}$
 $= (3-1+2)\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$
 (5) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})^3 = (\sqrt[3]{2})^3 - 3(\sqrt[3]{2})^2 \times \sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4})^2 - (\sqrt[3]{4})^3$
 $= 2 - 3\sqrt[3]{2^2 \times 4} + 3\sqrt[3]{2 \times 4^2} - 4$
 $= -2 - 3\sqrt[3]{2^3 \times 2} + 3\sqrt[3]{2^3 \times 4}$

$$= -2 - 3(\sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2}) + 3(\sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{4})$$

$$= -2 - 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4}$$

(6) $\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$

$$= -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{3}$$

$$= -2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3}$$

$$= (-2+3-1)\sqrt[3]{3} = 0$$

4

【解答】 (1) ① 52 ② $3\sqrt{6}$ (2) ① $x+x^{-1}=18$ ② $x^3+x^{-3}=5778$

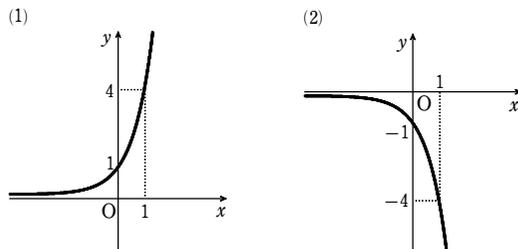
【解説】

- (1) ① $a+a^{-1} = (a^{\frac{1}{3}})^3 + (a^{-\frac{1}{3}})^3 = (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 - 3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})$
 $= (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 - 3(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})$
 $= 4^3 - 3 \cdot 4 = 64 - 12 = 52$
 ② $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 + 2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}} + (a^{-\frac{1}{2}})^2$
 $= a + a^{-1} + 2 = 52 + 2 = 54$
 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} > 0$ であるから $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

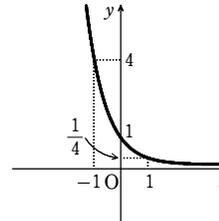
- (2) ① $x+x^{-1} = (x^{\frac{1}{3}})^3 + (x^{-\frac{1}{3}})^3$
 $= (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^3 - 3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})$
 $= (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^3 - 3(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})$
 $= 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$
 ② $x^3+x^{-3} = (x+x^{-1})^3 - 3xx^{-1}(x+x^{-1})$
 $= (x+x^{-1})^3 - 3(x+x^{-1})$
 $= 18^3 - 3 \cdot 18 = 5778$

5

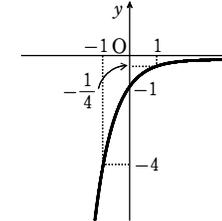
- 【解答】 (1) [図] (2) [図] (1)のグラフと x 軸に関して対称
 (3) [図] (1)のグラフと y 軸に関して対称
 (4) [図] (1)のグラフと原点に関して対称
 (5) [図] (1)のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの
 (または x 軸をもとにして y 軸方向に 4 倍に拡大したもの)



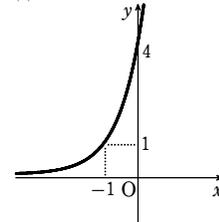
(3)



(4)



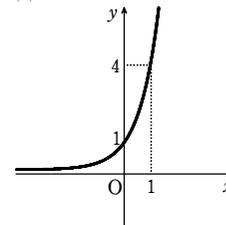
(5)



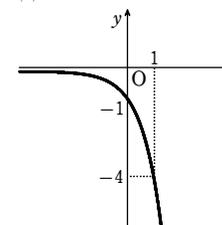
【解説】

- (1) [図]
 (2) [図] このグラフは、(1)のグラフと x 軸に関して対称である。

(1)



(2)

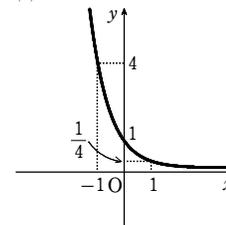


- (3) [図] このグラフは、(1)のグラフと y 軸に関して対称である。

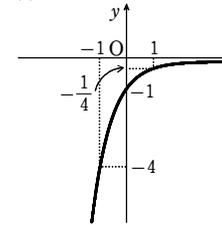
【参考】 $y = (\frac{1}{4})^x = 4^{-x}$

- (4) [図] このグラフは、(1)のグラフと原点に関して対称である。

(3)



(4)

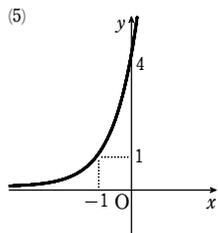


第1講 例題

(5) $y=4 \cdot 4^x=4^{x+1}$ [図]

このグラフは、(1)のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

別解 (1)のグラフを、 x 軸をもとにして y 軸方向に4倍に拡大したものである。



[6]

解答 (1) $\sqrt[3]{4} < 2 < \sqrt[5]{64}$ (2) $2^{30} < 3^{20} < 10^{10}$ (3) $\sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

解説

(1) $2=2^1$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$

底2は1より大きく、 $\frac{2}{3} < 1 < \frac{6}{5}$ であるから $2^{\frac{2}{3}} < 2^1 < 2^{\frac{6}{5}}$

すなわち $\sqrt[3]{4} < 2 < \sqrt[5]{64}$

(2) $2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$, $3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$ であり、 $8 < 9 < 10$ であるから $8^{10} < 9^{10} < 10^{10}$

すなわち $2^{30} < 3^{20} < 10^{10}$

(3) $x=\sqrt[3]{5}$, $y=\sqrt{3}$, $z=\sqrt[4]{8}$ とすると

$$x^{12}=(\sqrt[3]{5})^{12}=5^4=625$$

$$y^{12}=(\sqrt{3})^{12}=3^6=729$$

$$z^{12}=(\sqrt[4]{8})^{12}=8^3=512$$

よって $z^{12} < x^{12} < y^{12}$

$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ であるから $z < x < y$

すなわち $\sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

[7]

解答 (1) $x=2$ (2) $x=-3$ (3) $x=4$ (4) $x \geq 2$ (5) $x < 3$

(6) $x > -3$ (7) $x = -\frac{4}{3}$ (8) $x = -3$ (9) $x \geq \frac{1}{2}$ (10) $x < -\frac{1}{2}$

解説

(1) $7^x=49$ から $7^x=7^2$ よって $x=2$

(2) $4^x=\frac{1}{64}$ から $4^x=4^{-3}$ よって $x=-3$

(3) $(\frac{1}{3})^x=\frac{1}{81}$ から $(\frac{1}{3})^x=(\frac{1}{3})^4$ よって $x=4$

(4) $5^x \geq 25$ から $5^x \geq 5^2$
底5は1より大きいから $x \geq 2$

(5) $(\frac{1}{2})^x > \frac{1}{8}$ から $(\frac{1}{2})^x > (\frac{1}{2})^3$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $x < 3$

(6) $1000=10^3=(\frac{1}{10})^{-3}=0.1^{-3}$

よって、 $0.1^x < 1000$ から $0.1^x < 0.1^{-3}$

底0.1は1より小さいから $x > -3$

別解 $0.1^x < 1000$ から $10^{-x} < 10^3$

底10は1より大きいから $-x < 3$ よって $x > -3$

(7) $5^{3x+1}=\frac{1}{125}$ から $5^{3x+1}=5^{-3}$

よって $3x+1=-3$ ゆえに $x=-\frac{4}{3}$

(8) $4^{2x-1}=2^{2x-5}$ から $2^{2(2x-1)}=2^{3x-5}$

よって $2(2x-1)=3x-5$ これを解いて $x=-3$

(9) $2^{x-2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ から $2^{x-2} \geq 2^{-(1+\frac{1}{2})}$ すなわち $2^{x-2} \geq 2^{-\frac{3}{2}}$

底2は1より大きいから $x-2 \geq -\frac{3}{2}$ よって $x \geq \frac{1}{2}$

(10) $(\frac{1}{27})^x > (\frac{1}{3})^{x-1}$ から $(\frac{1}{3})^{3x} > (\frac{1}{3})^{x-1}$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $3x < x-1$ よって $x < -\frac{1}{2}$

[8]

解答 (1) $x=0, 2$ (2) $x=4$ (3) $x < 1$ (4) $x \leq -1, 0 \leq x$

解説

(1) 方程式を変形すると $(3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

$3^x=t$ とおくと、 $t > 0$ であり、方程式は $t^2 - 10t + 9 = 0$

よって $(t-1)(t-9) = 0$ $t > 0$ であるから $t=1, 9$

ゆえに $3^x=1, 9$ すなわち $3^x=3^0, 3^2$

したがって $x=0, 2$

(2) 方程式を変形すると $(2^x)^2 - 12 \cdot 2^x - 64 = 0$

$2^x=t$ とおくと、 $t > 0$ であり、方程式は $t^2 - 12t - 64 = 0$

よって $(t+4)(t-16) = 0$ $t > 0$ であるから $t=16$

ゆえに $2^x=16$ すなわち $2^x=2^4$

したがって $x=4$

(3) 不等式を変形すると $(4^x)^2 - 3 \cdot 4^x - 4 < 0$

$4^x=t$ とおくと、 $t > 0$ であり、不等式は $t^2 - 3t - 4 < 0$

よって $(t+1)(t-4) < 0$

$t+1 > 0$ であるから $t-4 < 0$ すなわち $t < 4$

ゆえに $4^x < 4$ すなわち $4^x < 4^1$

底4は1より大きいから $x < 1$

(4) 不等式の両辺に $4^x (> 0)$ を掛けて $1 \geq 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 4^x$

ゆえに $2 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 1 \geq 0$

$2^x=t$ とおくと、 $t > 0$ であり、不等式は $2t^2 - 3t + 1 \geq 0$

よって $(t-1)(2t-1) \geq 0$ これを解くと $t \leq \frac{1}{2}, 1 \leq t$

$t > 0$ であるから $0 < t \leq \frac{1}{2}, 1 \leq t$

ゆえに $0 < 2^x \leq \frac{1}{2}, 1 \leq 2^x$ すなわち $0 < 2^x \leq 2^{-1}, 2^0 \leq 2^x$

底2は1より大きいから $x \leq -1, 0 \leq x$

[9]

解答 $x=2$ で最大値1, $x=1$ で最小値 -3

解説

$y=(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1$ ($-1 \leq x \leq 2$)

$2^x=t$ とおく。

$-1 \leq x \leq 2$ から $2^{-1} \leq 2^x \leq 2^2$

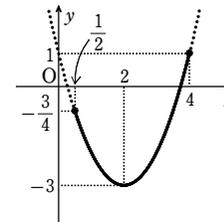
よって $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$ ……①

また $y=t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3$

①の範囲で、 y は

$t=4$ すなわち $x=2$ で最大値1,

$t=2$ すなわち $x=1$ で最小値 -3 をとる。



[10]

解答 (1) $y=4t^2 - 34t + 73$ (2) $x=-2$, 2のとき最小値 $\frac{3}{4}$

解説

(1) $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$ であるから

$$y=4(t^2-2)-34t+81=4t^2-34t+73$$

(2) (1)から $y=4\left(t-\frac{17}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ から、相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t=2^x+2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$$

等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

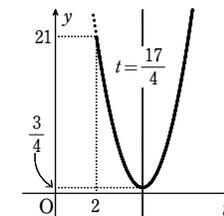
よって、 t の値の範囲は $t \geq 2$

したがって、関数 y は $t=\frac{17}{4}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。

$2^x + 2^{-x} = \frac{17}{4}$ とすると $4(2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 4 = 0$

$$(4 \cdot 2^x - 1)(2^x - 4) = 0$$

よって $2^x = \frac{1}{4}, 4$ ゆえに $x = -2, 2$



第1講 例題演習

1

解答

- (1) 27 (2) $\frac{1}{16}$ (3) 0.008 (4) $\frac{16}{25}$ (5) 6 (6) 1 (7) $\frac{1}{3}$ (8) $\frac{5}{4}$

解説

- (1) $9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$
 (2) $8^{-\frac{4}{3}} = (2^3)^{-\frac{4}{3}} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$
 (3) $0.04^{1.5} = (0.2^2)^{1.5} = 0.2^3 = 0.008$
 (4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left\{\left(\frac{5}{4}\right)^3\right\}^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{25}$
 (5) $6^{\frac{1}{2}} \times 36^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{2}{4}} = 6^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 6^1 = 6$
 (6) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}} = 2^0 = 1$
 (7) $(9^{\frac{2}{3}} \times 3^{-2})^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} \times 3^{-2 \times \frac{3}{2}} = 3^2 \times 3^{-3} = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
 (8) $\left\{\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}} = \left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2 \times (-\frac{1}{2})} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{4}$

2

- 解答 (1) 5 (2) 3 (3) 100 (4) 0.1 (5) 6 (6) 2 (7) 2 (8) 2

解説

- (1) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$
 (2) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
 (3) $\sqrt[3]{1000000} = \sqrt[3]{100^3} = 100$
 (4) $\sqrt[3]{0.001} = \sqrt[3]{(0.1)^3} = 0.1$
 (5) $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{4 \times 54} = \sqrt[3]{2^2 \times (2 \cdot 3^3)} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6$
 (6) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
 (7) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{2^2 \sqrt{64}} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2^6} = 2$
 (8) $\sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{2^{2 \times 3}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

3

- 解答 (1) $3\sqrt{2}$ (2) -5 (3) $\sqrt{2}$ (4) $2\sqrt[3]{2}$ (5) -3 (6) $4\sqrt[3]{2}$

解説

- (1) (与式) $= \sqrt{6} \times \sqrt[4]{\frac{54}{6}} = \sqrt{6} \times \sqrt[4]{9} = \sqrt{6} \times \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$
 (2) (与式) $= \sqrt[6]{125} \times (-\sqrt[3]{25}) \div \sqrt[6]{5}$
 $= -(5^3)^{\frac{1}{6}} \times (5^2)^{\frac{1}{3}} \div 5^{\frac{1}{6}} = -5^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = -5$

参考 n が奇数のとき $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

- (3) (与式) $= \sqrt[4]{2 \times 2^4} + \sqrt[4]{2 \times 3^4} - \sqrt[4]{2 \times (2^2)^4} = (2+3-4)\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$
 (4) (与式) $= \sqrt[3]{3^3 \times 2} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$
 (5) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3 \times 2})^3 = (\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2})^3 = (-\sqrt[3]{2})^3 = -2$

$$\left\{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}} = \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}^{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

よって (与式) $= (-2) \times \frac{3}{2} = -3$

(6) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = 3\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[3]{2}$,

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{4}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = -\sqrt[3]{\frac{2}{2^3}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

よって (与式) $= 3\sqrt[3]{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = 4\sqrt[3]{2}$

4

- 解答 (1) 4 (2) $2\sqrt{3}$ (3) 52 (4) $30\sqrt{3}$

解説

- (1) $(3^a + 3^{-a})^2 = 9^a + 2 \cdot 3^a \cdot 3^{-a} + 9^{-a} = 14 + 2 \cdot 1 = 16$
 $3^a + 3^{-a} > 0$ であるから $3^a + 3^{-a} = 4$
 (2) $(3^a - 3^{-a})^2 = 9^a - 2 \cdot 3^a \cdot 3^{-a} + 9^{-a} = 14 - 2 \cdot 1 = 12$
 $a > 0$ より $a > -a$ であり, 底 3 は 1 より大きいから $3^a > 3^{-a}$
 ゆえに $3^a - 3^{-a} > 0$ よって $3^a - 3^{-a} = 2\sqrt{3}$
 (3) $27^a + 27^{-a} = (3^a + 3^{-a})(9^a - 3^a \cdot 3^{-a} + 9^{-a})$
 $= 4 \cdot (14 - 1) = 52$
 (4) $27^a - 27^{-a} = (3^a - 3^{-a})(9^a + 3^a \cdot 3^{-a} + 9^{-a})$
 $= 2\sqrt{3}(14 + 1) = 30\sqrt{3}$

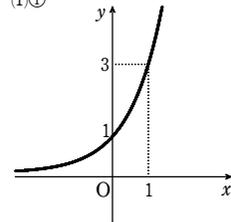
5

解答 (1) ① [図] ② [図] (1) のグラフと x 軸に関して対称

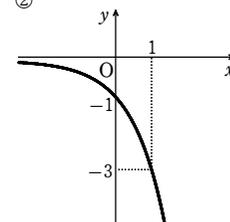
③ [図] (1) のグラフと y 軸に関して対称

④ [図] (1) のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したもの (または, x 軸をもとにして y 軸方向に 9 倍に拡大したもの)

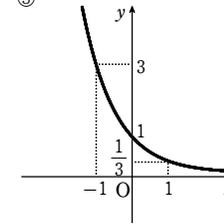
(1) ①



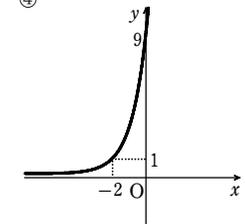
②



③

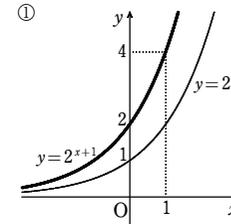


④

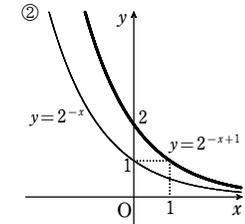


- (2) ① x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの [図]
 ② y 軸に関して対称移動し, 更に x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの [図]
 ③ y 軸方向に -1 だけ平行移動したもの [図]

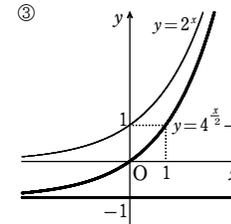
①



②



③



解説

(1)

① [図]

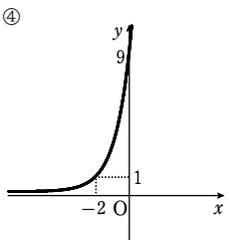
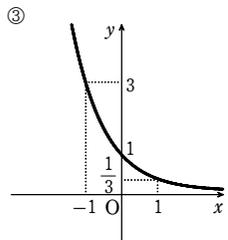
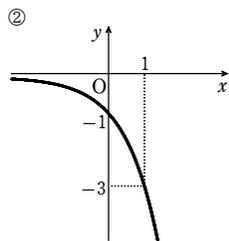
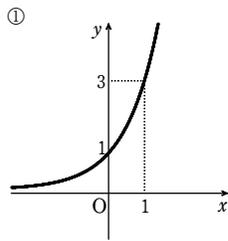
② [図] このグラフは, (1) のグラフと x 軸に関して対称である。

③ [図] このグラフは, (1) のグラフと y 軸に関して対称である。

④ $y = 9 \cdot 3^x = 3^2 \cdot 3^x = 3^{x+2}$ [図]

このグラフは, (1) のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。

別解 (1) のグラフを, x 軸をもとにして y 軸方向に 9 倍に拡大したものである。

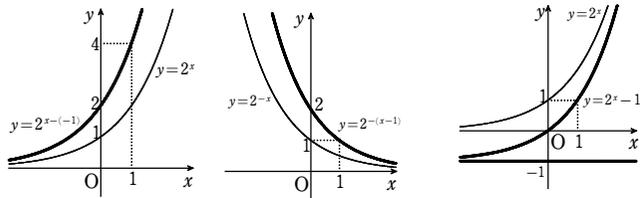


(2) ① $y=2^{x+1}$ のグラフは、 $y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。[図]

② $2^{-x+1}=2^{-(x-1)}$
よって、 $y=2^{-x+1}$ のグラフは $y=2^{-x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの、すなわち $y=2^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動し、更に x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。[図]

③ $4^{\frac{x}{2}}-1=(2^2)^{\frac{x}{2}}-1=2^x-1$

よって、 $y=4^{\frac{x}{2}}-1$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。[図]



[6]

[解答] (1) $2^{-1} < 2^0 < 2^{\frac{1}{2}} < 2^3$ (2) $0.7^2 < 0.7^0 < 0.7^{-1} < 0.7^{-3}$

(3) $\sqrt[5]{8} < \sqrt[5]{16} < \sqrt[5]{64}$

[解説]

(1) $2^3, 2^{-1}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^0$

底 2 は 1 より大きく、 $-1 < 0 < \frac{1}{2} < 3$ であるから

$2^{-1} < 2^0 < 2^{\frac{1}{2}} < 2^3$

(2) $0.7^2, 0.7^{-3}, 0.7^0, 0.7^{-1}$

底 0.7 は 1 より小さく、 $-3 < -1 < 0 < 2$ であるから

$0.7^2 < 0.7^0 < 0.7^{-1} < 0.7^{-3}$

(3) $\sqrt[5]{8}=(2^3)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{3}{5}}, \sqrt[5]{16}=(2^4)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{4}{5}}, \sqrt[5]{64}=(2^6)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{6}{5}}$

底 2 は 1 より大きく、 $\frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ であるから

$2^{\frac{3}{5}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$ すなわち $\sqrt[5]{8} < \sqrt[5]{16} < \sqrt[5]{64}$

[7]

[解答] (1) $x=3$ (2) $x=3$ (3) $x=\frac{1}{2}$ (4) $x < 1$ (5) $x < -2$

(6) $x \leq \frac{5}{6}$

[解説]

(1) $2^{3x-2}=128$ から $2^{3x-2}=2^7$

よって $3x-2=7$ これを解いて $x=3$

(2) $125^{x-1}=(\frac{1}{25})^{x-6}$ から $5^{3(x-1)}=5^{-2(x-6)}$

よって $3(x-1)=-2(x-6)$ これを解いて $x=3$

(3) $3^{x-2}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ から $3^{x-2}=3^{-\frac{5}{2}}$

よって $x-2=-\frac{5}{2}$ これを解いて $x=\frac{1}{2}$

(4) $243^x < 3^{2x+3}$ から $3^{5x} < 3^{2x+3}$

底 3 は 1 より大きいから $5x < 2x+3$ これを解いて $x < 1$

(5) $(\frac{1}{2})^{5x+4} > (\frac{1}{8})^x$ から $(\frac{1}{2})^{5x+4} > (\frac{1}{2})^{3x}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $5x+4 < 3x$ これを解いて $x < -2$

(6) $(0.2)^{2x-1} \geq \frac{1}{3\sqrt{25}}$ から $(\frac{1}{5})^{2x-1} \geq \frac{1}{3\sqrt{5^2}}$ よって $5^{-(2x-1)} \geq 5^{-\frac{3}{2}}$

底 5 は 1 より大きいから $-(2x-1) \geq -\frac{3}{2}$ これを解いて $x \leq \frac{5}{6}$

[8]

[解答] (1) $x=\frac{1}{2}$ (2) $x=0$ (3) $x > 1$ (4) $x \geq -2$

[解説]

(1) 方程式を変形すると $(4^x)^2+4 \cdot 4^x-12=0$

$4^x=t$ とおくと、 $t > 0$ であり、方程式は $t^2+4t-12=0$

よって $(t+6)(t-2)=0$

$t > 0$ であるから $t=2$ すなわち $4^x=2$

ゆえに $2^{2x}=2^1$ よって $2x=1$

したがって $x=\frac{1}{2}$

(2) 方程式を変形すると $(10^x)^2+10^x-2=0$

$10^x=t$ とおくと、 $t > 0$ であり、方程式は $t^2+t-2=0$

よって $(t+2)(t-1)=0$

$t > 0$ であるから $t=1$ すなわち $10^x=10^0$

したがって $x=0$

(3) 不等式を変形すると $(3^x)^2+2 \cdot 3^x-15 > 0$

$3^x=t$ とおくと、 $t > 0$ であり、不等式は $t^2+2t-15 > 0$

よって $(t+5)(t-3) > 0$

$t+5 > 0$ であるから $t-3 > 0$ ゆえに $t > 3$

すなわち $3^x > 3^1$ 底 3 は 1 より大きいから $x > 1$

(4) $\frac{1}{4^x}=2^{-2x}=(\frac{1}{2})^{2x}$

よって、不等式を変形すると $\left\{(\frac{1}{2})^x\right\}^2-3 \cdot (\frac{1}{2})^x-4 \leq 0$

$(\frac{1}{2})^x=t$ とおくと、 $t > 0$ であり、不等式は $t^2-3t-4 \leq 0$

よって $(t+1)(t-4) \leq 0$

$t+1 > 0$ であるから $t-4 \leq 0$ ゆえに $t \leq 4$

すなわち $(\frac{1}{2})^x \leq 4$ よって $(\frac{1}{2})^x \leq (\frac{1}{2})^{-2}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $x \geq -2$

[9]

[解答] (1) $x=1$ で最小値 -3 、最大値はない

(2) $x=-1$ で最大値 $\frac{9}{4}$ 、 $x=2$ で最小値 -10

[解説]

(1) $y=(2^x)^2-4 \cdot 2^x+1$

$2^x=t$ とおくと、 $t > 0$ であり、関数は

$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

$t > 0$ であるから、 y は $t=2$ で最小値 -3 をとる。

$t=2$ のとき $2^x=2$ ゆえに $x=1$

よって、 y は $x=1$ で最小値 -3 をとる。また、最大値はない。

(2) $y=-(2^x)^2+2^x+2$ ($-1 \leq x \leq 2$)

$2^x=t$ とおく。

$-1 \leq x \leq 2$ から $2^{-1} \leq 2^x \leq 2^2$

よって $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$ ……①

また $y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

①の範囲で y は

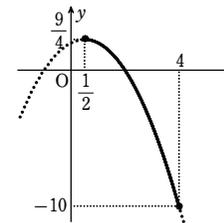
$t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$ 、 $t=4$ で最小値 -10

をとる。

$t=\frac{1}{2}$ のとき $2^x=\frac{1}{2}$ ゆえに $x=-1$

$t=4$ のとき $2^x=4$ ゆえに $x=2$

よって、 y は



$x = -1$ で最大値 $\frac{9}{4}$, $x = 2$ で最小値 -10

をとる。

10

解答 -2

解説

$2^x + 2^{-x} = t$ とおく。

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ から、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} \quad (\text{等号成立は } x=0 \text{ のとき}) \quad \text{すなわち} \quad t \geq 2 \quad \text{…… ①}$$

ここで $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2, -2^{3+x} - 2^{3-x} = -8(2^x + 2^{-x}) = -8t$ であるから

$$\begin{aligned} y &= (t^2 - 2) - 8t + 16 \\ &= t^2 - 8t + 14 = (t - 4)^2 - 2 \end{aligned}$$

① から、 y は $t = 4$ で最小値 -2 をとる。

1

解答 (1) $\frac{16}{81}$ (2) 0.027 (3) 2 (4) $\sqrt[4]{2}$ (5) $\sqrt{2}$ (6) $3\sqrt[3]{3}$

解説

$$(1) \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3 \times (-\frac{4}{3})} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$(2) 0.09^{1.5} = 0.09^{\frac{3}{2}} = (0.3^2)^{\frac{3}{2}} = 0.3^{2 \times \frac{3}{2}} = 0.3^3 = 0.027$$

$$\text{別解} \quad 0.09^{1.5} = \left(\frac{9}{100}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{3}{10}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{27}{1000} = 0.027$$

$$(3) \sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$\text{別解} \quad \sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \text{ であるから } \sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \sqrt{4} = 2$$

$$(4) \sqrt{2} \div \sqrt[4]{4} \times \sqrt[12]{32} \div \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{12}} \div 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\begin{aligned} (5) \frac{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{6} \sqrt[3]{1.5}} &= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}} \\ &= 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \sqrt[3]{24} + \frac{4}{3}\sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-\frac{1}{9}} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \frac{4}{3}\sqrt[6]{3^2} - \sqrt[3]{\frac{3}{3^3}} \\ &= 2\sqrt[3]{3} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \\ &= \left(2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

2

解答 (1) (ア) $a^2 - b$ (イ) $a - b^{-1}$ (2) 36

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ (ア) } (\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2}) \\ &= (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{b}} + (\sqrt[3]{b})^2) \\ &= (\sqrt[3]{a^2})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a^2 - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ (イ) } (a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{-\frac{1}{4}}) &= (a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{-\frac{1}{4}}) \\ &= a - b^{-1} \end{aligned}$$

$$(2) 2^{3x} - 2^{-3x} = (2^x - 2^{-x})^3 + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}(2^x - 2^{-x}) = 3^3 + 3 \cdot 3 = 36$$

別解 $(2^x - 2^{-x})^2 = 3^2$ から $2^{2x} + 2^{-2x} = 11$

$$\text{よって } 2^{3x} - 2^{-3x} = (2^x - 2^{-x})(2^{2x} + 1 + 2^{-2x}) = 3(11 + 1) = 36$$

3

解答 (1) $x = \frac{8}{7}$ (2) $x = 0, 1$ (3) $x = 3, y = 4$

解説

$$(1) 16^{2-x} = 8^x \text{ から } 2^{4(2-x)} = 2^{3x}$$

$$\text{ゆえに } 4(2-x) = 3x \quad \text{よって} \quad x = \frac{8}{7}$$

$$(2) 3^x = X \text{ とおくと } X > 0 \quad \text{方程式は} \quad X^3 - 4X^2 + 3X = 0$$

$$\text{よって} \quad X(X-1)(X-3) = 0$$

$X > 0$ であるから $X = 1, 3$

$$X = 1 \text{ から } 3^x = 3^0 \quad X = 3 \text{ から } 3^x = 3^1$$

したがって $x = 0, 1$

(3) $2^x = X, 3^y = Y$ とおくと $X > 0, Y > 0$

$$\text{連立方程式は} \quad \begin{cases} \frac{Y}{3} - X = 19 & \text{…… ①} \\ X^2 + 2X - Y = -1 & \text{…… ②} \end{cases}$$

① から $Y = 3X + 57$ …… ③

③ を ② に代入して整理すると $X^2 - X - 56 = 0$

ゆえに $(X+7)(X-8) = 0$ よって $X = -7, 8$

$X > 0$ であるから $X = 8$ このとき、③ から $Y = 81$

$X = 8$ から $2^x = 8 \quad Y = 81$ から $3^y = 81$

したがって $x = 3, y = 4$

4

解答 $-\frac{1}{3} < a < -\frac{1}{4}$

解説

左辺を変形すると $(2^t)^2 + 4a \cdot 2^t + 3a + 1 = 0$

ここで、 $2^t = t$ とおくと、 $t > 0$ であり $t^2 + 4at + 3a + 1 = 0$

これが異なる2つの正の実数解をもてばよい。

この方程式の判別式を D , $f(t) = t^2 + 4at + 3a + 1$ とすると、条件は

$$D > 0 \quad \text{…… ①}$$

$y = f(t)$ の軸について

$$-2a > 0 \quad \text{…… ②}$$

$$f(0) > 0 \quad \text{…… ③}$$

$$\begin{aligned} \text{① から } \frac{D}{4} &= (2a)^2 - (3a + 1) = 4a^2 - 3a - 1 \\ &= (4a + 1)(a - 1) > 0 \end{aligned}$$

よって $a < -\frac{1}{4}, 1 < a$

② から $a < 0$

③ から $3a + 1 > 0$ よって $-\frac{1}{3} < a$

以上から、求める a の範囲は $-\frac{1}{3} < a < -\frac{1}{4}$

5

解答 (1) $2^{\sqrt{3}} < 4 < \sqrt[3]{3^4} < 3^{\sqrt{2}}$ (2) $9^{\frac{1}{5}} < 3^{\frac{1}{4}} < 10^{\frac{1}{3}}$

解説

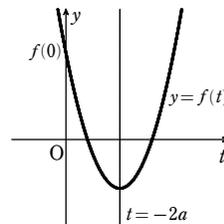
(1) $\sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}$ である。

$$4, 3^{\frac{4}{3}} \text{ をそれぞれ } 3 \text{ 乗すると } 4^3 = 64, (3^{\frac{4}{3}})^3 = 3^4 = 81$$

$$\text{ゆえに } 4^3 < (3^{\frac{4}{3}})^3 \quad \text{よって} \quad 4 < 3^{\frac{4}{3}} \quad \text{…… ①}$$

$$\text{また、} \sqrt{3} < 2 \text{ から } 2^{\sqrt{3}} < 2^2 \quad \text{すなわち} \quad 2^{\sqrt{3}} < 4 \quad \text{…… ②}$$

$$\text{更に、} \frac{4}{3} < \sqrt{2} \text{ から } 3^{\frac{4}{3}} < 3^{\sqrt{2}} \quad \text{…… ③}$$



第1講 レベルA

①, ②, ③から $2^{\sqrt{3}} < 4 < \sqrt[3]{3^4} < 3^{\sqrt{2}}$
 (2) $9^{\frac{1}{5}} = (3^2)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{5}}$ であり, 底3は1より大きいから, $\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$ より
 $3^{\frac{2}{5}} < 3^{\frac{4}{7}}$ すなわち $9^{\frac{1}{5}} < 3^{\frac{4}{7}}$ ……①
 次に, $3^{\frac{4}{7}}, 10^{\frac{1}{3}}$ をそれぞれ7乗すると
 $(3^{\frac{4}{7}})^7 = 3^4 = 81 < 10^2$, $(10^{\frac{1}{3}})^7 = 10^{\frac{7}{3}} = 10^2 \cdot 10^{\frac{1}{3}} > 10^2$
 ゆえに $(3^{\frac{4}{7}})^7 < (10^{\frac{1}{3}})^7$ よって $3^{\frac{4}{7}} < 10^{\frac{1}{3}}$ ……②
 したがって, ①, ②から $9^{\frac{1}{5}} < 3^{\frac{4}{7}} < 10^{\frac{1}{3}}$
 [別解] $1 < a \leq b$ のとき $0 < p < q$ なら $a^p < b^q$ であることを利用する。
 $3^{\frac{4}{7}} = (3^2)^{\frac{2}{7}} = 9^{\frac{2}{7}}$ であり, $1 < 9 < 10$, $\frac{1}{5} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$ から $9^{\frac{1}{5}} < 9^{\frac{2}{7}} < 10^{\frac{1}{3}}$
 よって $9^{\frac{1}{5}} < 3^{\frac{4}{7}} < 10^{\frac{1}{3}}$

第1講 レベルB

1

[解答] (ア) 3 (イ) 1 (ウ) 1 (エ) 0 (オ) 1

[解説]

$$(2^{x-1} + 2^{-x})^2 = 2^{2(x-1)} + 2 \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{-x} + 2^{-2x} = 4^{x-1} + 4^{-x} + 1$$

$$(2^{x-1} + 2^{-x})^3 = 2^{3(x-1)} + 3 \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{-x} (2^{x-1} + 2^{-x}) + 2^{-3x}$$

$$= 8^{x-1} + 8^{-x} + \frac{3}{2} (2^{x-1} + 2^{-x})$$

よって $4^{x-1} + 4^{-x} = (2^{x-1} + 2^{-x})^2 - 1 = t^2 - 1$

$$8^{x-1} + 8^{-x} = (2^{x-1} + 2^{-x})^3 - \frac{3}{2} (2^{x-1} + 2^{-x}) = t^3 - \frac{3}{2}t$$

ゆえに $h(x) = 2\left(t^3 - \frac{3}{2}t\right) - 3(t^2 - 1) + t = 2t^3 - 3t^2 - 2t + 3$
 $= t^2(2t - 3) - (2t - 3) = (2t - 3)(t^2 - 1) = (2t - 3)(t + 1)(t - 1)$

方程式 $h(x) = 0$ は t についての3次方程式 $(2t - 3)(t + 1)(t - 1) = 0$ となる。

これを解くと $t = \frac{3}{2}, \pm 1$

ここで, $2^{x-1} > 0, 2^{-x} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係により

$$2^{x-1} + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^{x-1} \cdot 2^{-x}} = 2\sqrt{2^{-1}} = \sqrt{2}$$

よって $t \geq \sqrt{2}$ これを満たす t の値は $t = \frac{3}{2}$

$2^{x-1} + 2^{-x} = \frac{3}{2}$ の両辺に 2^{x+1} を掛けて整理すると

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (2^x - 1)(2^x - 2) = 0$$

よって $2^x = 1, 2$ ゆえに $x = 0, 1$

したがって, $h(x) = 0$ の解 x の値は小さい順に $x = 0, x = 1$ となる。

2

[解答] (1) $a \leq \frac{1}{9}$ (2) $-\frac{1}{6} \leq a \leq 4$

[解説]

$3^x = t$ とおく。このとき, $x \geq -1$ から $t \geq \frac{1}{3}$

(1) $2 \cdot 3^x + a \cdot 3^{-x} \leq 1$ から $2t + \frac{a}{t} \leq 1$

この両辺に $t (> 0)$ を掛けると $2t^2 + a \leq t$ すなわち $a \leq -2t^2 + t$ ……①

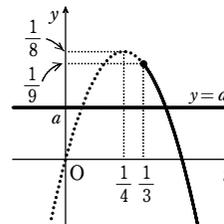
よって, 連立不等式が解をもつための条件は, ①を満たす t の値が $t \geq \frac{1}{3}$ の範囲に存在することである。

$f(t) = -2t^2 + t$ とすると $f(t) = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$

$y = f(t)$ のグラフは右の図のような放物線になる。

この図から, ①を満たす t の値が $t \geq \frac{1}{3}$ の範囲に存在

するような実数 a の範囲は $a \leq \frac{1}{9}$

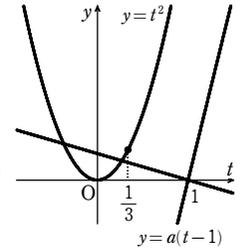


(2) $3^x + a \cdot 3^{-x} \geq a$ から $t + \frac{a}{t} \geq a$

この両辺に $t (> 0)$ を掛けると

$$t^2 + a \geq at \quad \text{すなわち} \quad t^2 \geq a(t-1) \quad \text{……②}$$

$t \geq \frac{1}{3}$ を満たすすべての実数 t に対し, 不等式②が成り立つのは, 放物線 $y = t^2$ と直線 $y = a(t-1)$ の位置関係を考えると, 次の[1]または[2]のいずれかの場合である。



[1] ②がすべての実数 t に対して成り立つ。

[2] $a < 0$ かつ $t = \frac{1}{3}$ で②が成り立つ。

[1]について ②から $t^2 - at + a \geq 0$

2次方程式 $t^2 - at + a = 0$ の判別式を D とすると, ②がすべての実数 t に対して成り立つための条件は $D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = a(a-4) \leq 0$

すなわち $a(a-4) \leq 0$

これを解くと $0 \leq a \leq 4$ ……③

[2]について

$t = \frac{1}{3}$ で②が成り立つから $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \geq a\left(\frac{1}{3} - 1\right)$

これを解くと $a \geq -\frac{1}{6}$

$a < 0$ との共通範囲をとって $-\frac{1}{6} \leq a < 0$ ……④

求める a の値の範囲は, ③または④であるから $-\frac{1}{6} \leq a \leq 4$

3

[解答] 最小なものは1, 最大なものは5

[解説]

$(n^2 - 3n + 3)^{n^2 - 8n + 15} = 1$ ……①とする。

$n^2 - 3n + 3 = \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ であるから, ①が成り立つのは,

$$n^2 - 3n + 3 = 1 \quad \text{または} \quad n^2 - 8n + 15 = 0$$

のときである。

$n^2 - 3n + 3 = 1$ から $(n-1)(n-2) = 0$ よって $n = 1, 2$

$n^2 - 8n + 15 = 0$ から $(n-3)(n-5) = 0$ よって $n = 3, 5$

したがって, ①を満たす自然数 n は 1, 2, 3, 5

このうち, 最小なものは1, 最大なものは5である。

第2講 例題

1

【解答】 (1) 3 (2) 4 (3) 1 (4) 0 (5) -2 (6) $-\frac{2}{3}$ (7) $-\frac{3}{2}$

(8) -6

【解説】

(1) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

(2) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

(3) $\log_5 5 = 1$

(4) $\log_7 1 = 0$

(5) $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$

(6) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25} = \log_{\frac{1}{5}} 5^{\frac{2}{3}} = \log_{\frac{1}{5}} (5^{-1})^{-\frac{2}{3}} = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}$

(7) $\log_{0.5} \sqrt{8} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} (2^{-1})^{-\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$

(8) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = \log_{\sqrt{3}} 3^{-3} = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^{-6} = -6$

2

【解答】 (1) 2 (2) 1 (3) 4 (4) 1 (5) $\frac{3}{5}$

【解説】

(1) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4 = \log_{10} (25 \times 4) = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

(2) $\log_6 42 - \log_6 7 = \log_6 \frac{42}{7} = \log_6 6 = 1$

(3) (与式) $= \log_3 54 + \log_3 6 - \log_3 2^2 = \log_3 \frac{54 \times 6}{2^2} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

【別解】 (与式) $= \log_3 (2 \times 3^3) + \log_3 (2 \times 3) - 2 \log_3 2 = (\log_3 2 + 3 \log_3 3) + (\log_3 2 + \log_3 3) - 2 \log_3 2 = 4 \log_3 3 = 4$

(4) (与式) $= \log_{10} \frac{75}{13} - \log_{10} \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \log_{10} \frac{130}{243} = \log_{10} \frac{75}{13} \times \frac{130}{243} = \log_{10} \left(\frac{75}{13} \times \frac{130}{243} \times \frac{9^2}{5^2}\right) = \log_{10} 10 = 1$

【別解】 (与式) $= \log_{10} \frac{3 \times 5^2}{13} - 2 \log_{10} \frac{5}{3^2} + \log_{10} \frac{2 \times 5 \times 13}{3^5} = (\log_{10} 3 + 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 13) - 2(\log_{10} 5 - 2 \log_{10} 3) + (\log_{10} 2 + \log_{10} 5 + \log_{10} 13 - 5 \log_{10} 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} (2 \times 5) = \log_{10} 10 = 1$

(5) (与式) $= \log_2 \sqrt[5]{72} - \log_2 \sqrt[5]{9} = \log_2 \frac{\sqrt[5]{72}}{\sqrt[5]{9}} = \log_2 \sqrt[5]{\frac{72}{9}} = \log_2 \sqrt[5]{8} = \log_2 2^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$

【別解】 (与式) $= \frac{1}{5} \log_2 (2^3 \times 3^2) - \frac{2}{5} \log_2 3$

3

【解答】 (1) 3 (2) $\frac{14}{3}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

【解説】

(1) 与式 $= \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7} = \log_2 8 = 3$

(2) 与式 $= \left(\log_2 9 + \frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{\log_2 4}{\log_2 9}\right) = \left(2 \log_2 3 + \frac{\log_2 3}{3}\right) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{2}{2 \log_2 3}\right) = \frac{7}{3} \log_2 3 \cdot \frac{2}{\log_2 3} = \frac{14}{3}$

(3) 与式 $= \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 25}{\log_2 9} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 5} = \frac{\log_2 3}{2} \cdot \frac{2 \log_2 5}{2 \log_2 3} \cdot \frac{3}{\log_2 5} = \frac{3}{2}$

(4) 与式 $= \log_2 10 \cdot \frac{\log_2 10}{\log_2 5} - \left(\log_2 5 + \frac{1}{\log_2 5}\right) = (\log_2 2 + \log_2 5) \cdot \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 5} - \log_2 5 - \frac{1}{\log_2 5} = (1 + \log_2 5) \left(\frac{1}{\log_2 5} + 1\right) - \log_2 5 - \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{\log_2 5} + 1 + 1 + \log_2 5 - \log_2 5 - \frac{1}{\log_2 5} = 2$

4

【解答】 (1) $4a$ (2) $1-a$ (3) $b+c-1$ (4) $\frac{3a+b}{3}$ (5) $\frac{2a+c}{b}$

【解説】

(1) $\log_{10} 16 = \log_{10} 2^4 = 4 \log_{10} 2 = 4a$

(2) $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - a$

(3) $\log_{10} 2.1 = \log_{10} \frac{21}{10} = \log_{10} \frac{3 \times 7}{10} = \log_{10} 3 + \log_{10} 7 - \log_{10} 10 = b + c - 1$

(4) $\log_{10} \sqrt[3]{24} = \frac{1}{3} \log_{10} 24 = \frac{1}{3} \log_{10} (2^3 \times 3) = \frac{1}{3} (3 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) = \frac{3a+b}{3}$

(5) $\log_3 28 = \frac{\log_{10} 28}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} (2^2 \times 7)}{\log_{10} 3} = \frac{2 \log_{10} 2 + \log_{10} 7}{\log_{10} 3} = \frac{2a+c}{b}$

5

【解答】 (1) 2 (2) $\frac{1}{16}$ (3) 10000

【解説】

(1) $10^{\log_{10} 2} = M$ とおく。

左辺は正の数であるから、両辺の10を底とする対数をとると

$$= \frac{1}{5} (3 \log_2 2 + 2 \log_2 3) - \frac{2}{5} \log_2 3 = \frac{3}{5} \log_2 2 = \frac{3}{5}$$

$$\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 10 = \log_{10} M$$

よって $\log_{10} 2 = \log_{10} M$

ゆえに $M=2$ すなわち $10^{\log_{10} 2} = 2$

(2) $3^{-2 \log_3 4} = M$ とおく。

左辺は正の数であるから、両辺の3を底とする対数をとると

$$-2 \log_3 4 \cdot \log_3 3 = \log_3 M$$

よって $\log_3 4^{-2} = \log_3 M$

ゆえに $M = \frac{1}{16}$ すなわち $3^{-2 \log_3 4} = \frac{1}{16}$

(3) $16^{\log_2 10} = M$ とおく。

左辺は正の数であるから、両辺の2を底とする対数をとると

$$\log_2 10 \cdot \log_2 16 = \log_2 M$$

よって $4 \log_2 10 = \log_2 M$ ゆえに $\log_2 10^4 = \log_2 M$

よって $M=10000$ すなわち $16^{\log_2 10} = 10000$

【別解】 対数の定義 $a^b = M \iff b = \log_a M$ から $a^{\log_a M} = M$ であることがわかる。

このことを用いると、次のように計算できる。

(1) $10^{\log_{10} 2} = 2$

(2) $3^{-2 \log_3 4} = 3^{\log_3 (4^{-2})} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$

(3) $16^{\log_2 10} = (2^4)^{\log_2 10} = 2^{4 \log_2 10} = 2^{\log_2 10^4} = 10^4 = 10000$

6

【解答】 略

【解説】

$2^x = 3^y = 12^z$ の各辺は正の数であるから、2を底とする対数をとる

$$x = y \log_2 3 = z(2 + \log_2 3) = k$$

とおくと、 $k \neq 0$ で

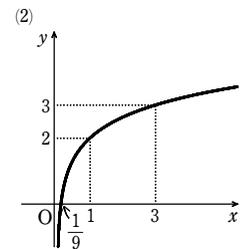
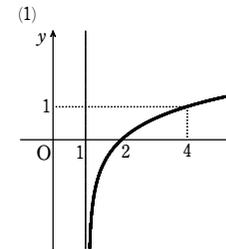
$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{k} + \frac{\log_2 3}{k} - \frac{2 + \log_2 3}{k} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

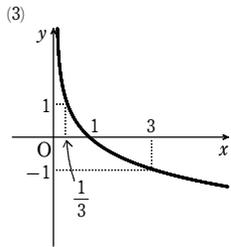
7

【解答】 (1) 図 $y = \log_3 x$ のグラフを x 軸方向に1だけ平行移動したもの

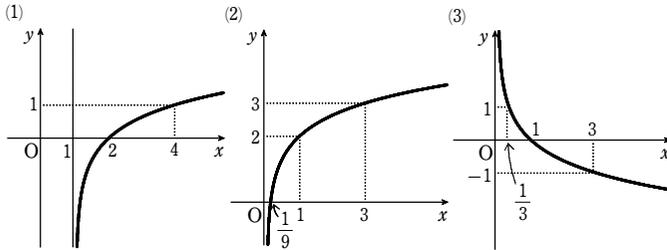
(2) 図 $y = \log_3 x$ のグラフを y 軸方向に2だけ平行移動したもの

(3) 図 $y = \log_3 x$ のグラフと x 軸に関して対称





- (3) [図] このグラフは、 $y = \log_3 x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。
 (2) $y = \log_3 9x = \log_3 9 + \log_3 x = \log_3 x + 2$ [図]
 このグラフは、 $y = \log_3 x$ のグラフを y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。



- (3) $y = \log_3 \frac{1}{x} = -\log_3 x$ [図]
 このグラフは、 $y = \log_3 x$ のグラフと x 軸に関して対称である。

[8]
 [解答] (1) $\log_9 16 < \log_3 8 < 2$ (2) $-2 < \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{4}} 5$

- [解説]
 (1) $\log_9 16 = \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \frac{\log_3 4^2}{\log_3 3^2} = \frac{2\log_3 4}{2} = \log_3 4$
 $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$
 底 3 は 1 より大きく、 $4 < 8 < 9$ であるから
 $\log_3 4 < \log_3 8 < \log_3 9$ すなわち $\log_9 16 < \log_3 8 < 2$
 (2) $\log_{\frac{1}{4}} 5 = \frac{\log_{\frac{1}{2}} 5}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 5 = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}$
 $-2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} 4$
 底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さく、 $\sqrt{5} < 3 < 4$ であるから
 $\log_{\frac{1}{2}} 4 < \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}$ すなわち $-2 < \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{4}} 5$

[1]

- [解答] (1) 2 (2) -2 (3) 0 (4) $\frac{3}{2}$ (5) 2 (6) $\frac{1}{3}$ (7) -2

(8) $-\frac{1}{4}$

[解説]

- (1) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
 (2) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$
 (3) $\log_{100} 1 = 0$
 (4) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$
 (5) $\log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$
 (6) $\log_{64} 4 = \log_{64} (4^3)^{\frac{1}{3}} = \log_{64} 64^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$
 (7) $\log_{0.2} 25 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = -2$
 (8) $\log_{25} \sqrt{\frac{1}{5}} = \log_{25} 5^{-\frac{1}{2}} = \log_{25} 25^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$

[2]

- [解答] (1) 2 (2) 2 (3) -4 (4) -2 (5) $\frac{1}{3}$ (6) 1

[解説]

- (1) 与式 $= \log_8 (2 \times 32) = \log_8 64 = 2$
 (2) 与式 $= \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 = 2$
 (3) 与式 $= \log_3 \frac{12^3}{300 \times 60^2} = \log_3 \frac{1}{5^4} = \log_3 5^{-4} = -4$
 [別解] 与式 $= 3\log_3 (2^2 \times 3) - \log_3 (2^2 \times 3 \times 5^2) - 2\log_3 (2^2 \times 3 \times 5)$
 $= 3(2\log_3 2 + \log_3 3) - (2\log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5)$
 $= -4\log_3 5 = -4$
 (4) 与式 $= \log_{0.5} \frac{13 \times \frac{26}{9}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \log_{0.5} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$
 [別解] 与式 $= \log_{0.5} \frac{2^3}{13} - 2\log_{0.5} \frac{2}{3} + \log_{0.5} \frac{2 \times 13}{3^2}$
 $= (3\log_{0.5} 2 - \log_{0.5} 13) - 2(\log_{0.5} 2 - \log_{0.5} 3)$
 $= 2\log_{0.5} 2 = 2\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2$
 (5) 与式 $= \log_2 \sqrt[3]{18} - \log_2 \sqrt[3]{9} = \log_2 \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{9}} = \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

[別解] 与式 $= \frac{1}{3} \log_2 (2 \times 3^2) - \frac{2}{3} \log_2 3$

$$= \frac{1}{3} (\log_2 2 + 2\log_2 3) - \frac{2}{3} \log_2 3$$

$$= \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3}$$

(6) 与式 $= \log_5 \sqrt{2} + \log_5 \sqrt{\frac{25}{12}} + \log_5 (\sqrt[3]{6})^{\frac{3}{2}}$
 $= \log_5 \left(\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{25}{12}} \times \sqrt{6} \right) = \log_5 5 = 1$

[別解] 与式 $= \frac{1}{2} \log_5 2 + \frac{1}{2} \log_5 \frac{5^2}{2^2 \times 3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \log_5 (2 \times 3)$
 $= \frac{1}{2} \log_5 2 + \frac{1}{2} (2\log_5 5 - 2\log_5 2 - \log_5 3) + \frac{1}{2} (\log_5 2 + \log_5 3)$
 $= \log_5 5 = 1$

[3]

- [解答] (1) 18 (2) $\frac{35}{3}$ (3) -3

[解説]

(1) (与式) $= \frac{\log_3 3^3}{\log_3 2} \cdot \log_3 2^6 \cdot \frac{\log_3 5^{-\frac{3}{2}}}{\log_3 5^2} \cdot \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3}$
 $= \frac{3}{\log_3 2} \cdot 6\log_3 2 \cdot \frac{\frac{3}{2} \log_3 5}{2\log_3 5} \cdot \frac{4}{3} = 18$

(2) (与式) $= \left(\log_2 9 + \frac{\log_2 3}{\log_2 8} \right) \left(\frac{\log_2 16}{\log_2 3} + \frac{\log_2 4}{\log_2 9} \right)$
 $= \left(2\log_2 3 + \frac{\log_2 3}{3} \right) \left(\frac{4}{\log_2 3} + \frac{2}{2\log_2 3} \right)$
 $= \frac{7}{3} \log_2 3 \cdot \frac{5}{\log_2 3} = \frac{35}{3}$

(3) (与式) $= \left(\log_5 3 + \frac{\log_5 9}{\log_5 25} \right) \left(\frac{1}{\log_5 9} - \frac{\log_5 25}{\log_5 3} \right)$
 $= (\log_5 3 + \log_5 3) \left(\frac{1}{2\log_5 3} - \frac{2}{\log_5 3} \right)$
 $= 2\log_5 3 \left(-\frac{3}{2\log_5 3} \right)$
 $= -3$

[4]

- [解答] (1) $p + q + r$ (2) $2p + 3q + 4r$ (3) $p - 2q - 2r$ (4) $p + \frac{q}{2} - \frac{r}{3}$

[解説]

- (1) $\log_a x y z = \log_a x + \log_a y + \log_a z = p + q + r$
 (2) $\log_a x^2 y^3 z^4 = \log_a x^2 + \log_a y^3 + \log_a z^4$
 $= 2\log_a x + 3\log_a y + 4\log_a z$
 $= 2p + 3q + 4r$
 (3) $\log_a \frac{x}{(yz)^2} = \log_a x - \log_a y^2 z^2$
 $= \log_a x - (\log_a y^2 + \log_a z^2)$
 $= \log_a x - (2\log_a y + 2\log_a z)$

第2講 例題演習

$$= p - 2q - 2r$$

$$(4) \log_a \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \log_a x + \log_a \sqrt{y} - \log_a \sqrt[3]{z}$$

$$= \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y - \frac{1}{3} \log_a z$$

$$= p + \frac{q}{2} - \frac{r}{3}$$

5

【解答】 (1) 7 (2) 30 (3) 5 (4) x^2 (5) $\frac{1}{x}$

【解説】

(1) $5^{\log_5 7} = 7$

(2) $10^{1+\log_{10} 3} = 10^{\log_{10} 10 + \log_{10} 3} = 10^{\log_{10} 30} = 30$

(3) $36^{\log_6 \sqrt{5}} = 6^{2\log_6 \sqrt{5}} = 6^{\log_6 5} = 5$

(4) $a^{2\log_a x} = a^{\log_a x^2} = x^2$

(5) $a^{-\log_a x} = a^{\log_a x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

【参考】 与えられた式を y とおき、両辺の対数をとって解いてもよい。

例えば、以下は(3)の解法。

[(3)の別解]

$y = 36^{\log_6 \sqrt{5}}$ とおく。

6を底として両辺の対数をとると

$$\log_6 y = \log_6 \sqrt{5} \cdot \log_6 36$$

よって $\log_6 y = 2\log_6 \sqrt{5}$ ゆえに $\log_6 y = \log_6 5$

したがって $y = 5$

6

【解答】 略

【解説】

$3^x = 4^y = 6^z$ の各辺は正の数であるから、2を底とする対数をとる、その値を k とおく。

すなわち $\log_2 3^x = \log_2 4^y = \log_2 6^z = k$

よって $x \log_2 3 = 2y = z(1 + \log_2 3) = k$

すなわち $x = \frac{k}{\log_2 3}$, $y = \frac{k}{2}$, $z = \frac{k}{1 + \log_2 3}$

$x \neq 0$ より、 $k \neq 0$ であるから

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{\log_2 3}{k} + \frac{1}{k} = \frac{\log_2 3 + 1}{k} = \frac{1}{z}$$

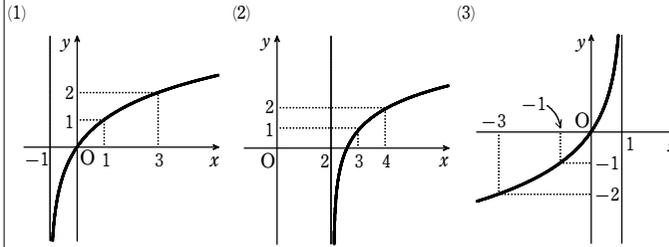
よって $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{z}$

7

【解答】 (1) [図] $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの

(2) [図] $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの

(3) [図] $y = \log_2 x$ のグラフを、原点に関して対称移動したものを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの



【解説】

(1) $\log_2(x+1) = \log_2\{x - (-1)\}$

よって、 $y = \log_2(x+1)$ のグラフは、 $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものの。グラフは右図(1)。

(2) $\log_2(2x-4) = \log_2 2(x-2)$

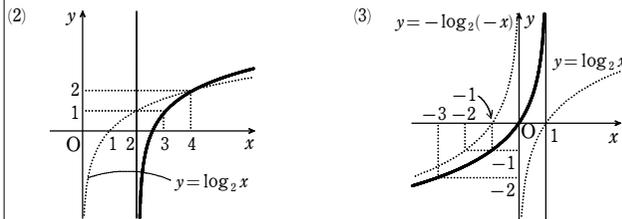
$$= \log_2 2 + \log_2(x-2)$$

$$= \log_2(x-2) + 1$$

よって、 $y = \log_2(2x-4)$ のグラフは、 $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動したものの。グラフは下図(2)。

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) = \frac{\log_2(1-x)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2\{-(x-1)\}}{\log_2 2^{-1}} = -\log_2\{-(x-1)\}$

よって、 $y = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$ のグラフは、 $y = \log_2 x$ のグラフを、原点に関して対称移動したものを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものの。グラフは下図(3)。



8

【解答】 (1) $\log_2 0.5 < 1 < \log_2 3$ (2) $\log_{0.3} 2 < 0 < \log_{0.3} 0.5$

(3) $2\log_2 11 < 3\log_2 5 < 7$ (4) $-1 < 2\log_{0.1} 3 < \log_{0.1} \sqrt[3]{512}$

【解説】

(1) $1 = \log_2 2$

真数の大小を調べると $0.5 < 2 < 3$

底 2 は 1 より大きいから $\log_2 0.5 < \log_2 2 < \log_2 3$

すなわち $\log_2 0.5 < 1 < \log_2 3$

(2) $0 = \log_{0.3} 1$

真数の大小を調べると $0.5 < 1 < 2$

底 0.3 は 1 より小さいから $\log_{0.3} 2 < \log_{0.3} 1 < \log_{0.3} 0.5$

すなわち $\log_{0.3} 2 < 0 < \log_{0.3} 0.5$

(3) $2\log_2 11 = \log_2 11^2 = \log_2 121$

$$3\log_2 5 = \log_2 5^3 = \log_2 125$$

$$7 = \log_2 2^7 = \log_2 128$$

真数の大小を調べると $121 < 125 < 128$

底 2 は 1 より大きいから $\log_2 121 < \log_2 125 < \log_2 128$

すなわち $2\log_2 11 < 3\log_2 5 < 7$

(4) $2\log_{0.1} 3 = \log_{0.1} 3^2 = \log_{0.1} 9$

$$\log_{0.1} \sqrt[3]{512} = \log_{0.1} \sqrt[3]{2^9} = \log_{0.1} 8$$

$$-1 = \log_{0.1} 0.1^{-1} = \log_{0.1} 10$$

真数の大小を調べると $8 < 9 < 10$

底 0.1 は 1 より小さいから $\log_{0.1} 10 < \log_{0.1} 9 < \log_{0.1} 8$

すなわち $-1 < 2\log_{0.1} 3 < \log_{0.1} \sqrt[3]{512}$

第2講 レベルA

1

解答 $\frac{3}{8}$

解説

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{5-\sqrt{24}} = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

よって

$$\text{与式} = \log_{16}[(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})]$$

$$= \log_{16} 2\sqrt{2} = \frac{\log_2 2\sqrt{2}}{\log_2 16} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}$$

2

解答 $\frac{7}{2}$

解説

$$\begin{aligned} 2\log_3 441 - 9\log_3 \sqrt{7} - \frac{1}{6}\log_3 \frac{27}{343} &= \log_3(3^2 \cdot 7^2)^2 + \log_3 7^{-\frac{9}{2}} + \log_3 \left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{6}} \\ &= \log_3(3^4 \cdot 7^4) + \log_3 7^{-\frac{9}{2}} + \log_3(3^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}) \\ &= \log_3(3^{4-\frac{1}{2}} \cdot 7^{4-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}}) = \log_3 3^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

3

解答 18

解説

$$\begin{aligned} \log_2 27 \cdot \log_3 64 \cdot \log_{25} \sqrt{125} \cdot \log_{27} 81 &= \frac{\log_3 3^3}{\log_3 2} \cdot \log_3 2^6 \cdot \frac{\log_3 5^{\frac{3}{2}}}{\log_3 5^2} \cdot \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} \\ &= \frac{3}{\log_3 2} \cdot 6\log_3 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 18 \end{aligned}$$

4

解答 -2

解説

$$\begin{aligned} &\log_3\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_3\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_3\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_3\left(1 - \frac{1}{9}\right) \\ &= \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \dots + \log_3 \frac{8}{9} \\ &= \log_3\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{8}{9}\right) = \log_3 \frac{1}{9} = -2 \end{aligned}$$

5

解答 $\frac{ab+3}{ab+1}$

解説

$$\log_{14} 56 = \frac{\log_2 56}{\log_2 14} = \frac{\log_2(2^3 \cdot 7)}{\log_2(2 \cdot 7)} = \frac{3\log_2 2 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 7} = \frac{3 + \log_2 7}{1 + \log_2 7}$$

ここで $\log_2 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 2} = \frac{b}{\log_2 2} = \frac{b}{1} = ab$

よって $\log_{14} 56 = \frac{3+ab}{1+ab} = \frac{ab+3}{ab+1}$

6

解答 2

解説

$$\begin{aligned} x &= \log_5 50 + \log_{25} 400 - 3 = \log_5 50 + \frac{\log_5 400}{\log_5 25} - \log_5 125 \\ &= \log_5 50 + \frac{2\log_5 20}{2} - \log_5 125 = \log_5 \frac{50 \times 20}{125} = \log_5 8 \end{aligned}$$

よって $\sqrt[3]{5^x} = \sqrt[3]{5^{\log_5 8}} = \sqrt[3]{8} = 2$

7

解答 略

解説

$$\log_a x^{\log_a y} = \log_a y \cdot \log_a x$$

$$\log_a y^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_a y$$

よって $\log_a x^{\log_a y} = \log_a y^{\log_a x}$

ゆえに $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

8

解答 $\frac{1}{3}$

解説

$x^6 = y^3 = z^2$ の x を底とする対数をとると $6 = 3\log_x y = 2\log_x z$

よって、 $\log_x y = 2$ 、 $\log_x z = 3$ であるから

$$\begin{aligned} \log_x \frac{z}{y} + \log_y \frac{x}{z} + \log_z \frac{y}{x} &= (\log_x z - \log_x y) + \frac{\log_x \frac{x}{z}}{\log_x y} + \frac{\log_x \frac{y}{x}}{\log_x z} \\ &= (\log_x z - \log_x y) + \frac{1 - \log_x z}{\log_x y} + \frac{\log_x y - 1}{\log_x z} \\ &= (3-2) + \frac{1-3}{2} + \frac{2-1}{3} = 1-1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1

解答 $A = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 、 $B = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$ (複号同順)

解説

$$\log_a 2 + \log_b 2 = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_2 b} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{A+B}{AB}$$

$$\log_{ab} 2 = \frac{1}{\log_2 ab} = \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} = \frac{1}{A+B}$$

よって、条件から $\frac{A+B}{AB} = 1$ 、 $\frac{1}{A+B} = -1$

したがって $A+B = -1$ 、 $AB = -1$

ゆえに、 A 、 B は 2 次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の 2 つの解である。

これを解いて $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

よって $A = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 、 $B = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$ (複号同順)

2

解答 (1) 35 (2) $a = 6$ (3) $a^3 b^3 c^3$

解説

(1) $10^{\frac{x+y}{x}} = 10^{\frac{1}{x} + \frac{y}{x}} = 10^{\frac{1}{x}} \times 10^{\frac{y}{x}}$

$5^x = 10$ から $x = \log_5 10$ よって $\frac{1}{x} = \frac{1}{\log_5 10} = \log_{10} 5$

$7^y = 10$ から $y = \log_7 10$ よって $\frac{1}{y} = \frac{1}{\log_7 10} = \log_{10} 7$

したがって $10^{\frac{1}{x}} \times 10^{\frac{y}{x}} = 10^{\log_{10} 5} \times 10^{\log_{10} 7} = 5 \times 7 = 35$

(2) $3^x > 0$ 、 $12^y > 0$ であるから $a > 0$

また、 $x \neq 0$ 、 $y \neq 0$ であるから $a \neq 1$

$3^x = a$ の両辺の 3 を底とする対数をとると $x = \log_3 a$

ゆえに $\frac{1}{x} = \frac{1}{\log_3 a}$ すなわち $\frac{1}{x} = \log_a 3$

$12^y = a$ の両辺の 12 を底とする対数をとると $y = \log_{12} a$

ゆえに $\frac{1}{y} = \frac{1}{\log_{12} a}$ すなわち $\frac{1}{y} = \log_a 12$

よって $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_a 3 + \log_a 12 = \log_a 36 = 2\log_a 6$

ゆえに $2\log_a 6 = 2$ すなわち $\log_a 6 = 1$

よって、求める a の値は $a = 6$

(3) a 、 b 、 c は正であるから、 $a^{2x} = b^{2y} = c^{2z} = 4$ の各辺は正で、各辺の 2 を底とする対数をとると $\log_2 a^{2x} = \log_2 b^{2y} = \log_2 c^{2z} = \log_2 4$

ゆえに $2x\log_2 a = 2y\log_2 b = 2z\log_2 c = 2$

よって $\frac{1}{x} = \log_2 a$ 、 $\frac{1}{y} = \log_2 b$ 、 $\frac{1}{z} = \log_2 c$

ゆえに $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = \log_2 abc$

よって $8^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 8^{\log_2 abc} = 2^{3\log_2 abc} = 2^{\log_2 (abc)^3} = (abc)^3 = a^3 b^3 c^3$

3

【解答】 $\log_a(\log_a b) < (\log_a b)^2 < \log_a b^2$

【解説】

$1 < b < a$ から、各辺の $a (>1)$ を底とする対数をとると

$$\log_a 1 < \log_a b < \log_a a$$

すなわち $0 < \log_a b < 1$

ここで $\log_a b = t$ とおくと $0 < t < 1$ ……①

$A = (\log_a b)^2$, $B = \log_a b^2$, $C = \log_a(\log_a b)$ とおくと

$$A = t^2, B = 2\log_a b = 2t, C = \log_a t$$

① から $A > 0, B > 0, C < 0$

また、① から $B - A = 2t - t^2 = t(2 - t) > 0$ よって $B > A$

したがって $C < A < B$

すなわち $\log_a(\log_a b) < (\log_a b)^2 < \log_a b^2$

4

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) m, n が自然数のとき、 2^m は偶数、 3^n は奇数であるから、 2^m と 3^n が等しくなることはない。

よって、 $2^m = 3^n$ を満たす自然数 m, n は存在しない。

(2) $\log_2 3$ が無理数でない、すなわち有理数であると仮定すると、 $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n が存在する。

この等式から $2^{\frac{m}{n}} = 3$ 両辺を n 乗すると $2^m = 3^n$

これは、(1) で証明したことに矛盾する。

したがって、 $\log_2 3$ は無理数である。

1

【解答】 (1) $x = 27$ (2) $x = \frac{1}{16}$ (3) $x = 6$ (4) $0 < x < 125$ (5) $0 < x \leq \frac{1}{9}$

(6) $x \geq 1$

【解説】

(1) 対数の定義から、解は $x = 3^3 = 27$

(2) 対数の定義から、解は $x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

(3) 対数の定義から $x - 2 = 16^{\frac{1}{2}}$ よって、解は $x = 6$

(4) 真数は正であるから $x > 0$ ……①

不等式から $\log_5 x < \log_5 5^3$ すなわち $\log_5 x < \log_5 125$

底 5 は 1 より大きいから $x < 125$ ……②

①, ② から、解は $0 < x < 125$

(5) 真数は正であるから $x > 0$ ……①

不等式から $\log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$ すなわち $\log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $x \leq \frac{1}{9}$ ……②

①, ② から、解は $0 < x \leq \frac{1}{9}$

(6) 真数は正であるから $x + 3 > 0$ すなわち $x > -3$ ……①

不等式から $\log_{0.5}(x+3) \leq \log_{0.5} 0.5^{-2}$ すなわち $\log_{0.5}(x+3) \leq \log_{0.5} 4$

底 0.5 は 1 より小さいから $x + 3 \geq 4$ すなわち $x \geq 1$ ……②

①, ② から、解は $x \geq 1$

2

【解答】 (1) $x = 1$ (2) $x = 1$ (3) $x = 0, -7$ (4) $x = -1$

(5) $3 < x \leq 5$ (6) $2 - \sqrt{7} < x < 1$

【解説】

(1) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x + 3 > 0$

よって $x > 0$ ……①

方程式を変形すると

$$\log_2 x(x+3) = 2 \quad \text{ゆえに} \quad x(x+3) = 2^2$$

整理して $x^2 + 3x - 4 = 0$ すなわち $(x-1)(x+4) = 0$

① から、解は $x = 1$

(2) 真数は正であるから $2x + 3 > 0$ かつ $4x + 1 > 0$

よって $x > -\frac{1}{4}$ ……①

方程式を変形すると

$$\log_4(2x+3)(4x+1) = \log_4 5^2 \quad \text{すなわち} \quad \log_4(2x+3)(4x+1) = \log_4 25$$

ゆえに $(2x+3)(4x+1) = 25$ 整理して $4x^2 + 7x - 11 = 0$

すなわち $(x-1)(4x+11) = 0$

① から、解は $x = 1$

(3) 対数の定義から $(x+2)(x+5) = 10^1$

整理して $x^2 + 7x = 0$ すなわち $x(x+7) = 0$

これを解いて $x = 0, -7$

(4) 真数は正であるから $3-x > 0$ かつ $2x+18 > 0$

よって $-9 < x < 3$ ……①

方程式を変形すると

$$\log_2(3-x) = \frac{\log_2(2x+18)}{\log_2 4} \quad \text{すなわち} \quad \log_2(3-x) = \frac{\log_2(2x+18)}{2}$$

両辺に 2 を掛けて

$$2\log_2(3-x) = \log_2(2x+18) \quad \text{すなわち} \quad \log_2(3-x)^2 = \log_2(2x+18)$$

ゆえに $(3-x)^2 = 2x+18$ 整理して $x^2 - 8x - 9 = 0$

すなわち $(x+1)(x-9) = 0$

① から、解は $x = -1$

(5) 真数は正であるから $x-3 > 0$ かつ $x > 0$

よって $x > 3$ ……①

不等式を変形すると $\log_{10}(x-3)x \leq \log_{10} 10$

底 10 は 1 より大きいから $(x-3)x \leq 10$

整理して $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ すなわち $(x+2)(x-5) \leq 0$

これを解いて $-2 \leq x \leq 5$ ……②

①, ② から、解は $3 < x \leq 5$

(6) 真数は正であるから $1-x > 0$ かつ $3-x > 0$

よって $x < 1$ ……①

$1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6$ であるから、与えられた不等式は

$$\log_2(1-x)(3-x) < \log_2 6$$

底 2 は 1 より大きいから $(1-x)(3-x) < 6$

整理して $x^2 - 4x - 3 < 0$

これを解いて $2 - \sqrt{7} < x < 2 + \sqrt{7}$ ……②

①, ② から、解は $2 - \sqrt{7} < x < 1$

3

【解答】 (1) $x = 3, 27$ (2) $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$

【解説】

(1) 方程式から $(\log_3 x - 1)(\log_3 x - 3) = 0$

よって $\log_3 x = 1, 3$ ゆえに $x = 3, 27$

(2) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^2 > 0$ よって $x > 0$ ……①

不等式から $(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 \leq 0$

ゆえに $(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 3) \leq 0$

したがって $-1 \leq \log_2 x \leq 3$ すなわち $\log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ ……②

①, ② から、解は $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$

4

【解答】 $x = 1$ で最大値 6, $x = 4$ で最小値 2

【解説】

$y = (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 6$ ($1 \leq x \leq 8$)

$\log_2 x = t$ とおくと、 $1 \leq x \leq 8$ であるから $\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 8$

第3講 例題

すなわち $0 \leq t \leq 3$ ……①

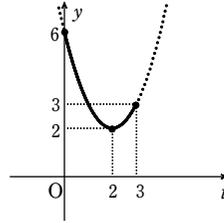
y を t で表すと $y = t^2 - 4t + 6 = (t-2)^2 + 2$

①の範囲において、 y は $t=0$ で最大値6、 $t=2$ で最小値2をとる。

また $t=0$ のとき $\log_2 x = 0$ よって $x = 2^0 = 1$

$t=2$ のとき $\log_2 x = 2$ よって $x = 2^2 = 4$

したがって $x=1$ で最大値6、 $x=4$ で最小値2



5

解答 (1) $\log_{10} 5 = 0.6990$, $\log_{10} 0.006 = -2.2219$, $\log_{10} \sqrt{72} = 0.9286$

(2) 39桁 (3) 小数第18位

解説

(1) $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

$\log_{10} 0.006 = \log_{10} (2 \cdot 3 \cdot 10^{-3}) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 3\log_{10} 10 = 0.3010 + 0.4771 - 3 = -2.2219$

$\log_{10} \sqrt{72} = \log_{10} (2^3 \cdot 3^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3) = \frac{1}{2} (3 \times 0.3010 + 2 \times 0.4771) = 0.9286$

(2) $\log_{10} 6^{50} = 50\log_{10} 6 = 50\log_{10} (2 \cdot 3) = 50(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 50(0.3010 + 0.4771) = 38.905$

ゆえに $38 < \log_{10} 6^{50} < 39$ よって $10^{38} < 6^{50} < 10^{39}$

したがって、 6^{50} は39桁の整数である。

(3) $\log_{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{100} = 100(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) = 100(0.3010 - 0.4771) = -17.61$

ゆえに $-18 < \log_{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{100} < -17$

よって $10^{-18} < \left(\frac{2}{3}\right)^{100} < 10^{-17}$ ゆえに 小数第18位。

6

解答 (1) $n=19, 20$ (2) $n=11$

解説

(1) 3^n が10桁の数となるのは、 $10^9 \leq 3^n < 10^{10}$ のときである。常用対数をとると

$$\log_{10} 10^9 \leq \log_{10} 3^n < \log_{10} 10^{10}$$

よって $9 \leq n\log_{10} 3 < 10$ すなわち $9 \leq 0.4771n < 10$

したがって $\frac{9}{0.4771} \leq n < \frac{10}{0.4771}$ ……①

$$\frac{9}{0.4771} = 18.86 \dots, \frac{10}{0.4771} = 20.95 \dots$$

よって、不等式①を満たす自然数 n は $n=19, 20$

(2) $3^{30} > 16^n$ より $\log_{10} 3^{30} > \log_{10} 16^n$

$$\log_{10} 16^n = \log_{10} 2^{4n} \text{ より } 30\log_{10} 3 > 4n\log_{10} 2$$

よって $30 \times 0.4771 > 4n \times 0.3010$

$$\text{すなわち } n < \frac{30 \times 0.4771}{4 \times 0.3010} = 11.8 \dots$$

したがって、この不等式を満たす最大の自然数 n は $n=11$

第3講 例題演習

1

解答 (1) $x=25$ (2) $x=\frac{1}{3}$ (3) $x=\frac{1}{81}$ (4) $0 < x < 25$ (5) $x \geq \frac{1}{27}$

(6) $0 < x < 0.01$

解説

(1) 対数の定義から、解は $x=5^2=25$

(2) 対数の定義から、解は $x=3^{-1}=\frac{1}{3}$

(3) 対数の定義から、解は $x=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(4) 真数は正であるから $x > 0$ ……①

不等式から $\log_5 x < \log_5 5^2$ すなわち $\log_5 x < \log_5 25$

底5は1より大きいから $x < 25$ ……②

①, ②から、解は $0 < x < 25$

(5) 真数は正であるから $x > 0$ ……①

不等式から $\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$ すなわち $\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $x \geq \frac{1}{27}$ ……②

①, ②から、解は $x \geq \frac{1}{27}$

(6) 真数は正であるから $x > 0$ ……①

不等式から $\log_{0.1} x > \log_{0.1} 0.1^2$ すなわち $\log_{0.1} x > \log_{0.1} 0.01$

底0.1は1より小さいから $x < 0.01$ ……②

①, ②から、解は $0 < x < 0.01$

2

解答 (1) $x=1$ (2) $x=1$ (3) $x=0, -7$ (4) $x=-1$

(5) $0 < x \leq \frac{1}{27}, 9 \leq x$ (6) $\frac{3}{4} < x < 1$ (7) $2 < x < 5$ (8) $4 < x < 3 + \sqrt{3}$

解説

(1) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x+3 > 0$

よって $x > 0$ ……①

方程式を変形すると

$$\log_2 x(x+3) = 2 \quad \text{ゆえに} \quad x(x+3) = 2^2$$

整理して $x^2 + 3x - 4 = 0$ すなわち $(x-1)(x+4) = 0$

①から、解は $x=1$

(2) 真数は正であるから $2x+3 > 0$ かつ $4x+1 > 0$

よって $x > -\frac{1}{4}$ ……①

方程式を変形すると

$$\log_4 (2x+3)(4x+1) = \log_4 5^2 \quad \text{すなわち} \quad \log_4 (2x+3)(4x+1) = \log_4 25$$

ゆえに $(2x+3)(4x+1) = 25$ 整理して $4x^2 + 7x - 11 = 0$

すなわち $(x-1)(4x+11) = 0$

①から、解は $x=1$

(3) 対数の定義から $(x+2)(x+5) = 10^1$

整理して $x^2 + 7x = 0$ すなわち $x(x+7) = 0$

これを解いて $x=0, -7$

(4) 真数は正であるから $3-x > 0$ かつ $2x+18 > 0$

よって $-9 < x < 3$ ……①

方程式を変形すると

$$\log_2 (3-x) = \frac{\log_2 (2x+18)}{\log_2 4} \quad \text{すなわち} \quad \log_2 (3-x) = \frac{\log_2 (2x+18)}{2}$$

両辺に2を掛けて

$$2\log_2 (3-x) = \log_2 (2x+18) \quad \text{すなわち} \quad \log_2 (3-x)^2 = \log_2 (2x+18)$$

ゆえに $(3-x)^2 = 2x+18$ 整理して $x^2 - 8x - 9 = 0$

すなわち $(x+1)(x-9) = 0$

①から、解は $x=-1$

(5) 真数は正であるから $x > 0$ ……①

不等式は $(\log_3 x + 3)(\log_3 x - 2) \geq 0$

ゆえに $\log_3 x \leq -3, 2 \leq \log_3 x$

すなわち $\log_3 x \leq \log_3 \frac{1}{27}, \log_3 9 \leq \log_3 x$

底3は1より大きいから $x \leq \frac{1}{27}, 9 \leq x$ ……②

①, ②から $0 < x \leq \frac{1}{27}, 9 \leq x$

(6) 真数は正であるから $1-x > 0$ ……①

不等式を変形して $\log_{\frac{1}{2}} (1-x) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $1-x < \frac{1}{4}$ ……②

①, ②から $x < 1$ かつ $x > \frac{3}{4}$ よって $\frac{3}{4} < x < 1$

(7) 真数は正であるから $x-2 > 0$ かつ $x+4 > 0$

$x-2 > 0$ から $x > 2$ $x+4 > 0$ から $x > -4$

共通範囲をとって $x > 2$ ……①

不等式を変形して $\log_{0.5} (x-2)^2 > \log_{0.5} (x+4)$

底0.5は1より小さいから $(x-2)^2 < x+4$

整理すると $x^2 - 5x < 0$ よって $x(x-5) < 0$

ゆえに $0 < x < 5$ ……② ①, ②から $2 < x < 5$

(8) 真数は正であるから $x-2 > 0$ かつ $x-4 > 0$

$x-2 > 0$ から $x > 2$ $x-4 > 0$ から $x > 4$

共通範囲をとって $x > 4$ ……①

$\log_{\frac{1}{2}} (x-4) = \frac{\log_2 (x-4)}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 (x-4)$ であるから、不等式は

$$\log_2 (x-2) + \log_2 (x-4) < 1 \quad \text{すなわち} \quad \log_2 (x-2)(x-4) < \log_2 2$$

底2は1より大きいから $(x-2)(x-4) < 2$

整理すると $x^2 - 6x + 6 < 0$ ……②

方程式 $x^2 - 6x + 6 = 0$ の解は $x = 3 \pm \sqrt{3}$

よって、不等式②の解は $3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3}$ ……③

①, ③から $4 < x < 3 + \sqrt{3}$

3

解答 (1) $x = \frac{1}{4}, 16$ (2) $\frac{1}{27} \leq x \leq 243$

解説

(1) 方程式から $(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 4) = 0$
よって $\log_2 x = -2, 4$

したがって $x = 2^{-2}, 2^4$ すなわち $x = \frac{1}{4}, 16$

(2) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^2 > 0$ よって $x > 0$ ……①

不等式から $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 2\log_{\frac{1}{3}} x - 15 \leq 0$

ゆえに $(\log_{\frac{1}{3}} x + 5)(\log_{\frac{1}{3}} x - 3) \leq 0$

したがって $-5 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq 3$ すなわち $\log_{\frac{1}{3}} 243 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $\frac{1}{27} \leq x \leq 243$ ……②

①, ② から, 解は $\frac{1}{27} \leq x \leq 243$

4

解答 (1) $x = 64$ のとき最大値 $y = 3, x = 4$ のとき最小値 $y = -1$

(2) $x = 64$ のとき最大値 $y = 5, x = 2$ のとき最小値 $y = -\frac{5}{4}$

解説

(1) $\log_4 x = t$ とおく。

底 4 は 1 より大きく, $1 \leq x \leq 64$ であるから $\log_4 1 \leq \log_4 x \leq \log_4 64$

よって $0 \leq \log_4 x \leq \log_4 4^3$ ゆえに $0 \leq t \leq 3$ ……①

また $y = t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1$

① から, y は $t = 3$ すなわち $x = 64$ のとき 最大値 3

$t = 1$ すなわち $x = 4$ のとき 最小値 -1 をとる。

(2) $\log_{\frac{1}{4}} x = t$ とおく。

底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さく, $1 \leq x \leq 64$ であるから $\log_{\frac{1}{4}} 64 \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq \log_{\frac{1}{4}} 1$

よって $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq 0$ ゆえに $-3 \leq t \leq 0$ ……①

与式は $y = (\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + \left\{ \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \right\}$ と変形できるから

$$y = t^2 + t - 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

① から, y は $t = -3$ すなわち $x = 64$ のとき 最大値 5

$t = -\frac{1}{2}$ すなわち $x = 2$ のとき 最小値 $-\frac{5}{4}$ をとる。

5

解答 42桁, 小数第28位

解説

$$\log_{10} 25^{30} = 30 \log_{10} 5^2 = 60 \log_{10} \frac{10}{2}$$

$$= 60(1 - \log_{10} 2) = 60(1 - 0.3010) = 60 \times 0.6990 = 41.94$$

よって $41 < \log_{10} 25^{30} < 42$ ゆえに $10^{41} < 25^{30} < 10^{42}$

したがって, 25^{30} は 42桁の数である。

また $\log_{10} \left(\frac{1}{8}\right)^{30} = 30 \log_{10} 2^{-3} = -90 \log_{10} 2 = -90 \times 0.3010 = -27.09$

よって $-28 < \log_{10} \left(\frac{1}{8}\right)^{30} < -27$

ゆえに $10^{-28} < \left(\frac{1}{8}\right)^{30} < 10^{-27}$

したがって, $\left(\frac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第28位に初めて0でない数字が現れる。

6

解答 (1) $21 \leq n \leq 30$ (2) $n = 38$

解説

(1) 1.25^n の整数部分が3桁であるとき $10^2 \leq 1.25^n < 10^3$

各辺の常用対数をとると $\log_{10} 10^2 \leq \log_{10} 1.25^n < \log_{10} 10^3$ ……①

ここで, $1.25 = \frac{5}{4} = \frac{10}{2^3}$ であるから

$$\log_{10} 1.25^n = n \log_{10} \frac{10}{2^3} = n(\log_{10} 10 - \log_{10} 2^3) = n(1 - 3 \log_{10} 2)$$

ゆえに, ①は $2 \leq n(1 - 3 \log_{10} 2) < 3$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ を代入して $2 \leq 0.097n < 3$

よって $20.6 \dots \dots \leq n < 30.9 \dots \dots$

したがって, 自然数 n の値の範囲は $21 \leq n \leq 30$

(2) $(0.4)^n < 10^{-15}$ より $\log_{10} (0.4)^n < \log_{10} 10^{-15}$

よって $n \log_{10} 0.4 < -15$

ここで $\log_{10} 0.4 = \log_{10} (2^2 \times 10^{-1}) = 2 \log_{10} 2 - 1 = -0.3980$

したがって $-0.3980n < -15$ すなわち $n > 37.6 \dots \dots$

よって, 与えられた不等式を満たす最小の自然数 n は $n = 38$

1

解答 (1) $x = \frac{\log_2 3}{2 \log_2 3 - 1}$ (2) $x = \frac{2 \log_5 3}{2 - \log_5 3}$

解説

(1) 方程式の両辺は正であるから, 2を底とする対数をとると

$$\log_2 2^x = \log_2 3^{2x-1} \quad \text{よって} \quad x = (2x-1) \log_2 3$$

ゆえに $(2 \log_2 3 - 1)x = \log_2 3$

$2 \log_2 3 - 1 \neq 0$ であるから $x = \frac{\log_2 3}{2 \log_2 3 - 1}$

参考 方程式の両辺の3を底とする対数をとると, 解は $x = \frac{1}{2 - \log_3 2}$ となる。

(2) 方程式の両辺は正であるから, 5を底とする対数をとると

$$\log_5 5^{2x} = \log_5 3^{x+2} \quad \text{よって} \quad 2x = (x+2) \log_5 3$$

ゆえに $(2 - \log_5 3)x = 2 \log_5 3$

$2 - \log_5 3 \neq 0$ であるから $x = \frac{2 \log_5 3}{2 - \log_5 3}$

参考 方程式の両辺の3を底とする対数をとると, 解は $x = \frac{2}{2 \log_3 5 - 1}$ となる。

2

解答 (1) $x = 4, 8$ (2) $0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{9}, 1 < x \leq 81$

解説

(1) 真数は正で, 底は1でない正の数であるから $0 < x < 1, 1 < x$ ……①

よって $\log_2 x \neq 0$

方程式の両辺に $\log_2 x$ を掛けて

$$(\log_2 x)^2 + 6 = 5 \log_2 x$$

整理して $(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 6 = 0$

ゆえに $(\log_2 x - 2)(\log_2 x - 3) = 0$ よって $\log_2 x = 2, 3$

$\log_2 x = 2$ から $x = 4$ $\log_2 x = 3$ から $x = 8$

これらの x の値は①を満たす。

したがって, 解は $x = 4, 8$

(2) 真数, 底の条件から $0 < x < 1, 1 < x$

$\log_4 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 4} = \frac{3}{\log_3 4}$ であるから, 不等式は

$$2 \log_3 x - \frac{12}{\log_3 4} \leq 5 \quad \dots \dots ①$$

[1] $0 < x < 1$ のとき $\log_3 x < 0$

①の両辺に $\log_3 x$ を掛けて $2(\log_3 x)^2 - 12 \geq 5 \log_3 x$

整理して $2(\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x - 12 \geq 0$

ゆえに $(\log_3 x - 4)(2 \log_3 x + 3) \geq 0$

$\log_3 x < 0$ より $\log_3 x - 4 < 0$ であるから $2 \log_3 x + 3 \leq 0$

よって $\log_3 x \leq -\frac{3}{2}$

底3は1より大きいから $x \leq 3^{-\frac{3}{2}}$ すなわち $x \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$

$0 < x < 1$ との共通範囲は $0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$

[2] $x > 1$ のとき $\log_3 x > 0$

①の両辺に $\log_3 x$ を掛けて $2(\log_3 x)^2 - 12 \leq 5\log_3 x$

整理して $2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 12 \leq 0$

ゆえに $(\log_3 x - 4)(2\log_3 x + 3) \leq 0$

$\log_3 x > 0$ より $2\log_3 x + 3 > 0$ であるから $\log_3 x - 4 \leq 0$

よって $0 < \log_3 x \leq 4$

底3は1より大きいから

$3^0 < x \leq 3^4$ すなわち $1 < x \leq 81$

[1], [2]から、解は $0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{9}, 1 < x \leq 81$

[3]

解答 $0 < a < 1$ のとき $-9 < x < -2$; $a > 1$ のとき $x < -9, 5 < x$

解説

対数の真数は正の数であるから $3x^2 - 3x - 18 > 0, 2x^2 - 10x > 0$

これを解いて $(x+2)(x-3) > 0, x(x-5) > 0$ から $x < -2, 5 < x$ ……①

不等式から $0 < a < 1$ のとき $3x^2 - 3x - 18 < 2x^2 - 10x$ ゆえに $x^2 + 7x - 18 < 0$

これを解いて $(x-2)(x+9) < 0$ から $-9 < x < 2$ ①から $-9 < x < -2$

$1 < a$ のとき $3x^2 - 3x - 18 > 2x^2 - 10x$ を解いて $x < -9, 2 < x$

①から $x < -9, 5 < x$

[4]

解答 (1) $x = \frac{5}{2}$ で最大値 -2

(2) $x = 5$ で最大値 $3, x = 1$ で最小値 0

(3) $x = \frac{1}{3}, 27$ で最大値 $0; x = 3$ で最小値 -4

解説

(1) 真数は正であるから $x - 2 > 0$ かつ $3 - x > 0$

よって $2 < x < 3$ ……①

$2\log_4(3-x) = 2 \cdot \frac{\log_2(3-x)}{\log_2 4} = \log_2(3-x)$ であるから

$y = \log_2(x-2) + 2\log_4(3-x) = \log_2(x-2) + \log_2(3-x)$

$= \log_2(x-2)(3-x) = \log_2(-x^2 + 5x - 6)$

$z = -x^2 + 5x - 6$ とすると $z = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

①の範囲において、 z は $x = \frac{5}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

対数の底2は1より大きいから、このとき y も最大となる。

よって $x = \frac{5}{2}$ で最大値 $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

(2) $\log_5 x = t$ とおくと、 $1 \leq x \leq 5$ であるから $\log_5 1 \leq t \leq \log_5 5$ すなわち $0 \leq t \leq 1$ ……①

y を t の式で表すと $y = 2t + t^2 = (t+1)^2 - 1$

①の範囲において、 y は

$t = 1$ で最大値 $3, t = 0$ で最小値 0

をとる。 $t = \log_5 x$ より、 $x = 5^t$ であるから

$t = 1$ のとき $x = 5, t = 0$ のとき $x = 5^0 = 1$

よって $x = 5$ で最大値 $3, x = 1$ で最小値 0

(3) $\log_3 x = t$ とおくと、 $\frac{1}{3} \leq x \leq 27$ であるから

$\log_3 \frac{1}{3} \leq t \leq \log_3 27$

すなわち $-1 \leq t \leq 3$ ……①

$\log_3 3x = 1 + \log_3 x, \log_3 \frac{x}{27} = \log_3 x - 3$ である

から、 y を t の式で表すと

$y = (1+t)(t-3) = t^2 - 2t - 3 = (t-1)^2 - 4$

①の範囲において、 y は

$t = -1, 3$ で最大値 $0, t = 1$ で最小値 -4

をとる。 $t = \log_3 x$ より、 $x = 3^t$ であるから

$t = -1$ のとき $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}, t = 3$ のとき $x = 3^3 = 27,$

$t = 1$ のとき $x = 3$

よって $x = \frac{1}{3}, 27$ で最大値 $0; x = 3$ で最小値 -4

[5]

解答 $x = y = 3\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{9}{4}; x = 81, y = \frac{1}{3}$ で最小値 -4

解説

$x \geq 3, y \geq \frac{1}{3}, xy = 27$ の各辺の3を底とする対数をとると

$\log_3 x \geq 1, \log_3 y \geq -1, \log_3 x + \log_3 y = 3$

$\log_3 x = X, \log_3 y = Y$ とおくと

$X \geq 1, Y \geq -1, X + Y = 3$

$X + Y = 3$ から $Y = 3 - X$ ……①

$Y \geq -1$ であるから $3 - X \geq -1$ ゆえに $X \leq 4$

$X \geq 1$ との共通範囲は $1 \leq X \leq 4$ ……②

また $(\log_3 x)(\log_3 y) = XY = X(3-X) = -X^2 + 3X$

$= -\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

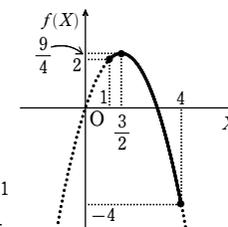
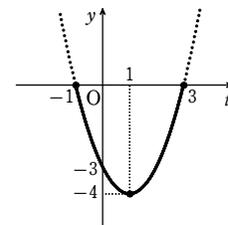
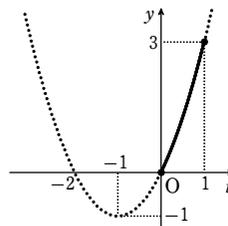
これを $f(X)$ とすると、②の範囲において、 $f(X)$ は

$X = \frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}, X = 4$ で最小値 -4 をとる。

①から $X = \frac{3}{2}$ のとき $Y = \frac{3}{2}, X = 4$ のとき $Y = -1$

$\log_3 x = X, \log_3 y = Y$ より、 $x = 3^X, y = 3^Y$ であるから

$x = y = 3\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{9}{4}; x = 81, y = \frac{1}{3}$ で最小値 -4



[6]

解答 (1) 0.6990 (2) 18桁 (3) 4

解説

(1) $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

(2) $\log_{10} 3^{37} = 37\log_{10} 3 = 37 \times 0.4771 = 17.6527$

よって $17 < \log_{10} 3^{37} < 18$ ゆえに $10^{17} < 3^{37} < 10^{18}$

したがって、 3^{37} は18桁の整数である。

(3) (2)から $\log_{10} 3^{37} = 17 + 0.6527$

また $\log_{10} 4 = 2\log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$

(1)から $\log_{10} 5 = 0.6990$

よって、 $\log_{10} 4 < 0.6527 < \log_{10} 5$ であるから $4 < 10^{0.6527} < 5$

ゆえに $4 \times 10^{17} < 10^{17.6527} < 5 \times 10^{17}$

すなわち $4 \times 10^{17} < 3^{37} < 5 \times 10^{17}$

したがって、 3^{37} の最高位の数字は 4

[7]

解答 21年後

解説

現在の人口を p とし、 n 年後に人口が現在の5倍を超えるとすると $1.08^n p > 5p$

$p > 0$ であるから $1.08^n > 5$

両辺の常用対数をとると $n\log_{10} 1.08 > \log_{10} 5$ ……①

ここで $\log_{10} 1.08 = \log_{10} \frac{108}{100} = \log_{10} \frac{2^2 \times 3^3}{10^2} = 2\log_{10} 2 + 3\log_{10} 3 - 2$

$= 2 \times 0.3010 + 3 \times 0.4771 - 2 = 0.0333$

$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

よって、①から $n > \frac{0.6990}{0.0333} = 20.9$ ……

n は整数であるから $n \geq 21$

したがって、21年後である。

第3講 レベルB

1

【解答】 (1) $x=16$ (2) $x=2, 4, 8$ (3) $x=\frac{\pi}{12}, y=-\frac{\pi}{12}$

【解説】

(1) 真数は正であるから $x > 0$ ……①

$$3^{-\log_4 x} = t \text{ とおくと } 3^{2-\log_2 x} = 9 \cdot 3^{-\frac{\log_2 x}{2}} = 9 \cdot 3^{2 \cdot (-\log_4 x)} = 9t^2$$

$$\text{方程式は } 9t^2 + 26t - 3 = 0 \quad \text{よって } (t+3)(9t-1) = 0$$

$$t > 0 \text{ であるから } t = \frac{1}{9} = 3^{-2}$$

したがって、 $\log_4 x = 2$ から $x = 16$ (①を満たす)

(2) 真数は正であるから $x > 0$ 方程式から $x^{(\log_2 x)^2} = 64x^{6 \log_2 x - 11}$

$$\text{両辺の2を底とする対数をとると } \log_2 x^{(\log_2 x)^2} = \log_2 (64x^{6 \log_2 x - 11})$$

$$\text{よって } (\log_2 x)^2 \cdot \log_2 x = \log_2 64 + (6 \log_2 x - 11) \cdot \log_2 x$$

$$\text{すなわち } (\log_2 x)^3 - 6(\log_2 x)^2 + 11 \log_2 x - 6 = 0$$

$$\text{ゆえに } (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2)(\log_2 x - 3) = 0$$

$$\text{よって } \log_2 x = 1, 2, 3 \quad \text{ゆえに } x = 2, 4, 8$$

これらの x の値は $x > 0$ を満たす。

(3) $\log_x y + \log_y x = 2$ から $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = 2$

$\log_x y > 0$ であるから、両辺に $\log_x y$ を掛けて整理すると

$$(\log_x y)^2 - 2 \log_x y + 1 = 0 \quad \text{すなわち } (\log_x y - 1)^2 = 0$$

$$\text{ゆえに } \log_x y = 1 \quad \text{よって } x = y$$

$$2 \log_x \sin(x+y) = \log_x \sin y + \log_x \cos x \text{ に代入すると}$$

$$2 \log_x \sin 2x = \log_x \sin x \cos x$$

$$\text{ゆえに } \sin^2 2x = \sin x \cos x \quad \text{よって } \sin^2 2x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\text{したがって } \sin 2x \left(\sin 2x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$0 < x < 1 \text{ より, } 0 < 2x < 2 \text{ であるから } \sin 2x \neq 0 \quad \text{ゆえに } \sin 2x = \frac{1}{2}$$

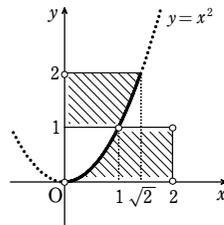
$$\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{5\pi}{6} \text{ であるから, } 0 < 2x < 2 \text{ では } 2x = \frac{\pi}{6} \text{ すなわち } x = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{よって } x = \frac{\pi}{12}, y = -\frac{\pi}{12}$$

2

【解答】 (1) [図] 境界線は x 軸, y 軸, 線分 $y=1$ ($0 \leq x \leq 2$) を含まず, 他は含む

(2) $x = \sqrt{2}, y = 2$ のとき最大値 $4 + 3\sqrt{2}$



【解説】

$$(1) \frac{1}{2} \geq \log_y x \text{ から } 1 \geq 2 \log_y x$$

$$\text{よって } \log_y y \geq \log_y x^2$$

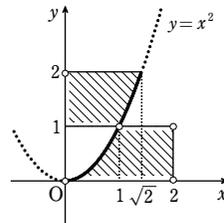
ゆえに

$$0 < y < 1 \text{ のとき } y \leq x^2 \quad \text{ただし } 0 < x \leq 2$$

$$1 < y \leq 2 \text{ のとき } y \geq x^2 \quad \text{ただし } 0 < x \leq 2$$

したがって, 求める領域は, 右の図の斜線部分。

ただし, 境界線は x 軸, y 軸, 線分 $y=1$ ($0 \leq x \leq 2$) を含まず, 他は含む。



(2) $3x + 2y = k$ とおくと $y = -\frac{3}{2}x + \frac{k}{2}$ ……①

これは傾きが $-\frac{3}{2}$, y 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す。

直線①が点 $(\sqrt{2}, 2)$ を通るとき

$$k = 3\sqrt{2} + 2 \cdot 2 = 4 + 3\sqrt{2}$$

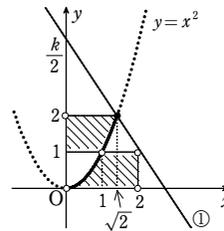
直線①が点 $(2, 1)$ を通るとき

$$k = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$$

$4 + 3\sqrt{2} > 8$ であるから, 直線①が点 $(\sqrt{2}, 2)$ を通るとき, k の値は最大となる。

よって $x = \sqrt{2}, y = 2$ のとき最大値 $4 + 3\sqrt{2}$

【注意】 ①が点 $(\sqrt{2}, 2)$ を通るとき y 切片と, 点 $(2, 1)$ を通るとき y 切片の大小を, 図だけから判断するのは無理である。このような場合は, 上の解答のように, 両者の場合の k の値を求めて, その大小を調べる。



3

【解答】 $1 < a < 5$

【解説】

$\log_3(x-1) = \log_3(x-1)^2$ であるから, 方程式は

$$\log_9(x-1)^2 = \log_9(4x-a-3)$$

$$\text{すなわち } (x-1)^2 = 4x-a-3$$

$$\text{整理して } x^2 - 6x + a + 4 = 0 \quad \text{……①}$$

$$\text{また, 真数は正であるから } x-1 > 0 \text{ かつ } 4x-a-3 > 0$$

$$\text{すなわち } x > 1 \text{ かつ } x > \frac{a+3}{4} \quad \text{……②}$$

2次方程式①が, ②の範囲に異なる2つの実数解をもつための条件を考える。

$$\text{①の判別式を } D \text{ とすると } \frac{D}{4} = (-3)^2 - (a+4) > 0 \quad \text{よって } a < 5$$

$$f(x) = x^2 - 6x + a + 4 \text{ とすると, 放物線 } y = f(x) \text{ の軸は 直線 } x = 3$$

[1] $a \leq 1$ のとき

②より $x > 1$ であり, この範囲に①が異なる2つの実数解をもつための条件は

$$f(1) = a - 1 > 0 \quad \text{ゆえに } a > 1$$

これは $a \leq 1$ を満たさない。

[2] $1 < a < 5$ のとき

$$\text{②から } x > \frac{a+3}{4} \quad \text{また } \frac{a+3}{4} < 3$$

$$\text{よって, 求める条件は } f\left(\frac{a+3}{4}\right) = \frac{1}{16}(a-1)^2 > 0$$

これは, $1 < a < 5$ で常に成り立つ。

[1], [2] から, 求める a の値の範囲は $1 < a < 5$

