1

解説

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx+\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^2 \frac{(x^2+4)'}{\sqrt{x^2+4}}dx=\Big[2\sqrt{x^2+4}\Big]_0^2=4\sqrt{2}-4$$

また，$x=2\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \to 2$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{4\tan^2\theta+4}}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$\sin\theta=u$ とおくと　$d\theta=\dfrac{du}{\cos\theta}$

θ と u の対応は右のようになる。

θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$
u	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，① は

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{(1+u)(1-u)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du=\frac{1}{2}\Big[-\log(1-u)+\log(1+u)\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\log(\sqrt{2}+1)$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx=4\sqrt{2}-4+\log(\sqrt{2}+1)$

2

解説

n 段の階段の昇り方を a_n 通りとすると　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$

$n \geqq 4$ のとき，次の [1]，[2] の場合がある。

[1]　最初の 1 歩で 1 段昇るとき

　残りの $n-1$ 段の昇り方は　a_{n-1} 通り

[2]　最初の 1 歩で 2 段昇るとき

　次の 1 歩は必ず 1 段昇るから，残りの $n-3$ 段の昇り方は　a_{n-3} 通り

[1]，[2] は同時に起こらないから　$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$　$(n \geqq 4)$

この漸化式を用いて，a_{15} まで順に求めて表にすると，次のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277

よって，求める昇り方は　277 通り

別解　1 歩で 1 段昇ることを A，1 歩で 2 段昇ることを B で表す。

A が m 回，B が n 回のとき，B が連続しない昇り方は，m 個の ○ を 1 列に並べておき，その間と両端の $m+1$ 箇所に n 個の × を並べる方法の数に等しいから

$\quad {}_{m+1}C_n$ 通り　　ただし，$m+1 \geqq n$　……①

また　　$m+2n=15$　……②

①，② を満たす 0 以上の整数 m，n は

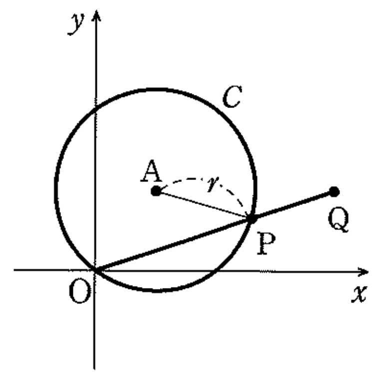
$\quad (m,\ n)=(15,\ 0),\ (13,\ 1),\ (11,\ 2),\ (9,\ 3),\ (7,\ 4),\ (5,\ 5)$

よって，求める昇り方は

$${}_{16}C_0+{}_{14}C_1+{}_{12}C_2+{}_{10}C_3+{}_{8}C_4+{}_{6}C_5=1+14+66+120+70+6$$
$$=277\ (\text{通り})$$

3

解説



(1)　(a)，(b) から

$$\overrightarrow{OP}=\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|}\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{|\overrightarrow{OQ}|^2}\overrightarrow{OQ} \quad \cdots\cdots ①$$

点 P は C 上にあるから　$|\overrightarrow{AP}|=r$

よって　$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=r$

両辺を 2 乗して

$$|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=r^2$$

これに $|\overrightarrow{OP}|=\dfrac{1}{|\overrightarrow{OQ}|}$，$|\overrightarrow{OA}|=r$ と ① を代入して

$$\frac{1}{|\overrightarrow{OQ}|^2}-\frac{2}{|\overrightarrow{OQ}|^2}\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}+r^2=r^2 \qquad \text{よって}\quad \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}$$

ここで A$(a,\ b)$，Q$(x,\ y)$ とすると　$ax+by=\dfrac{1}{2}$ ……② となり，点 Q は直線 ② 上を動く。

$\overrightarrow{OA}=(a,\ b)$ は直線 ② の法線ベクトルであるから，直線 ② は $\overrightarrow{OA}$ に直交する。

したがって，題意は示された。

(2) 直線 ℓ すなわち②と C が2点で交わるのは，②と C の中心 $\mathrm{A}(a,\ b)$ の距離が C の半径 r より小さいときであるから

$$\frac{\left|a^2+b^2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}<r \quad \cdots\cdots ③$$

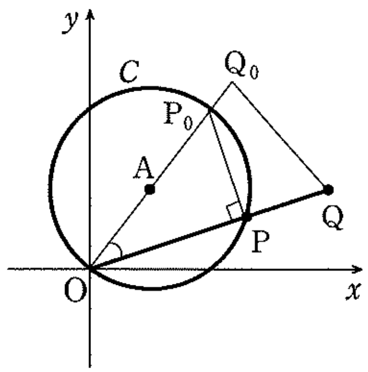
$a^2+b^2=r^2$ であるから

$$③ \iff \frac{\left|r^2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{r^2}}<r \qquad (r>0 \text{ より } \sqrt{r^2}=r)$$

$$\iff \left|r^2-\frac{1}{2}\right|<r^2 \iff -r^2<r^2-\frac{1}{2}<r^2$$

$r>0$ であるから　　$r>\dfrac{1}{2}$

別解 (1) O を通る C の直径が C と再び交わる点を $\mathrm{P_0}$ とし，半直線 $\mathrm{OP_0}$ 上に $\mathrm{OP_0}\times\mathrm{OQ_0}=1$ となる点 $\mathrm{Q_0}$ をとると，(b) から



$$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}=\mathrm{OP_0}\times\mathrm{OQ_0}$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OP_0}}=\dfrac{\mathrm{OQ_0}}{\mathrm{OQ}}$　……①

$\triangle\mathrm{OPP_0}$ と $\triangle\mathrm{OQ_0Q}$ において，$\angle\mathrm{O}$ は共通であるから，

①より　　$\triangle\mathrm{OPP_0}\backsim\triangle\mathrm{OQ_0Q}$

ゆえに　　$\angle\mathrm{OQ_0Q}=\angle\mathrm{OPP_0}=90^\circ$

したがって，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動く。

(2) $\mathrm{OP_0}=2r$，$\mathrm{OP_0}\times\mathrm{OQ_0}=1$ から　　$\mathrm{OQ_0}=\dfrac{1}{2r}$

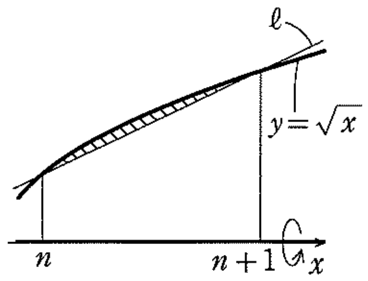
直線 ℓ と C が2点で交わるのは，$\mathrm{OP_0}>\mathrm{OQ_0}$ のときであるから

$$2r>\frac{1}{2r}$$

両辺に $\dfrac{1}{2}r\ (>0)$ を掛けて　　$r^2>\dfrac{1}{4}$　　　　$r>0$ から　　$r>\dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$

解説

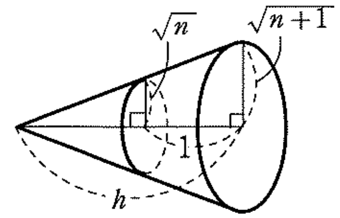


曲線 C と直線 $x=n$，$x=n+1$ および x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を V_0 とし，上底面の半径が $\sqrt{n}$，下底面の半径が $\sqrt{n+1}$，高さ1の円錐台の体積を V_1 とすると

$$V=V_0-V_1$$

$$V_0=\pi\int_n^{n+1}(\sqrt{x})^2dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_n^{n+1}=\frac{\pi}{2}(2n+1)$$

次に，右の図のような立体を考えると，図から



$$(h-1):h=\sqrt{n}:\sqrt{n+1}$$

ゆえに　　$h\sqrt{n}=\sqrt{n+1}(h-1)$

よって　　$h=\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

$$=n+1+\sqrt{n(n+1)}$$

したがって，円錐台の体積は

$$V_1=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{n+1})^2h-\frac{1}{3}\pi(\sqrt{n})^2(h-1)$$

$$=\frac{1}{3}\pi(n+1)h-\frac{1}{3}\pi n(h-1)=\frac{1}{3}\pi(h+n)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\{2n+1+\sqrt{n(n+1)}\}$$

よって　　$V=V_0-V_1=\dfrac{\pi}{2}(2n+1)-\dfrac{\pi}{3}\{2n+1+\sqrt{n(n+1)}\}$

$$=\frac{\pi}{6}\{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\}$$

ゆえに　　$n^aV=\dfrac{n^a\pi}{6}\{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\}=\dfrac{n^a\pi}{6\{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\}}$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{n^{a-1}}{2+\frac{1}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=4$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^aV=b$ となる正の数 b が存在するための条件は　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{a-1}=1$

よって　　$a-1=0$　すなわち　$a=1$

このとき　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^aV=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{24}$　　　したがって　　$a=1,\ b=\dfrac{\pi}{24}$