$\boxed{1}$

(解説)

(1)　レモンの重さ X は平均 110 g，標準偏差 20 g の正規分布 $N(110,\ 20^2)$ に従うから，

$Z=\dfrac{X-110}{20}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，無作為抽出した 1 個のレモンが L サイズである確率は，正規分布表から

$$P(110\leqq X<140)=P(110\leqq X\leqq 140)$$
$$=P\left(\frac{110-110}{20}\leqq\frac{X-110}{20}\leqq\frac{140-110}{20}\right)$$
$$=P(0\leqq Z\leqq 1.5)=0.{}^{アイウエ}4332$$

Q 地域で収穫されるレモン 1 個を無作為に抽出するとき，それが L サイズである確率は 0.4332 であるから，レモンが 200000 個収穫されるとすると，その中の L サイズのレモンの個数 Y は二項分布 $B(200000,\ 0.4332)$ に従う。

よって，Y の平均 (期待値) は　　$200000\cdot 0.4332=86640$　(オ ④)

(2)　Q 地域で今年収穫されるレモン全体を母集団とし，その重さの母平均が m g，母標準偏差が σ g であるから，n が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。　(カ ⑥)

また，m に対する信頼度 95 % の信頼区間は $\overline{W}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{W}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であるから　　$B-A=\left(\overline{W}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{W}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}$　(キ ⑤)

したがって，$\sigma=20$ として，$B-A\leqq 4$ すなわち，$\dfrac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}\leqq 4$　…… ① を満たす自然数 n を求める。

① の両辺は正であるから，両辺を 2 乗して整理すると　　$(3.92\sigma)^2\leqq 16n$

$\sigma=20$ を代入して　　$3.92^2\times 20^2\leqq 16n$

$$3.92^2\times 5^2\leqq n$$
$$19.6^2\leqq n$$
$$384.16\leqq n$$

よって，① を満たす最小の自然数 n_0 は　　$n_0={}^{クケコ}385$

(3)　$m\leqq 110$ を前提として考える。

対立仮説は検証したい仮説であるから，「Q 地域で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽い」，すなわち，「$m<110$」である。　(サ ⓪)

帰無仮説「$m=110$」が正しいと仮定すると，標本の大きさ 400 は十分に大きいから，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(110,\ \dfrac{20^2}{400}\right)$，すなわち $N(110,\ 1)$ に従う。　(シ ⑤)

よって，$Z'=\dfrac{\overline{W}-110}{1}=\overline{W}-110$ とおくと，確率変数 Z' は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，正規分布表より

$$\begin{aligned} P(\overline{W}\leqq 108.2) &= P(\overline{W}-110\leqq 108.2-110) \\ &= P(Z'\leqq -1.8)=P(Z'\geqq 1.8) \\ &= 0.5-P(0\leqq Z'\leqq 1.8) \\ &= 0.5-0.4641=0.\overset{\text{スセソタ}}{0359} \end{aligned}$$

この値をパーセント表示すると 3.59 % であり，有意水準 5 % より小さいから，帰無仮説は棄却される。　（チ ①）

したがって，有意水準 5 % で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽いと判断できる。　（ツ ⓪）

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $\gamma-\alpha=(7+10i)-(3+2i)={}^{ア}4+{}^{イ}8i$,

$\beta-\alpha=7-(3+2i)={}^{ウ}4-{}^{エ}2i$

よって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{4+8i}{4-2i}=\dfrac{2+4i}{2-i}=\dfrac{2(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2\cdot5i}{2^2+1^2}=2i$　(^{オ} ③)

これを極形式で表すと　$2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

その偏角は　$\dfrac{\pi}{2}$　(^{カ} ④)

(2) 複素数平面上の異なる 3 点 A (α)，B (β)，C (γ) について，$w=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおくと，

直線 AB と直線 AC が垂直に交わるのは，w の偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$ のときである。

このとき，w は純虚数であるから　$w+\overline{w}=0$　(^{キ} ②，^{ク} ⓪)

逆に，$w\neq0$ に注意すると，$w+\overline{w}=0$ のとき，w は純虚数であるから，直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

(3) (i) $\alpha=z$，$\beta=2$，$\gamma=\dfrac{4}{z}$ のとき

$z\neq0$，2，-2 より，α，β，γ は異なる複素数であり

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\frac{4}{z}-z}{2-z}=\frac{(2+z)(2-z)}{z(2-z)}=1+\frac{2}{z}$$

よって，(2) より，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1+\frac{2}{z}\right)+\overline{\left(1+\frac{2}{z}\right)}=0$$

すなわち　$2+\dfrac{2}{z}+\dfrac{2}{\overline{z}}=0$

この両辺に $z\overline{z}$ を掛けて整理すると　$z\overline{z}+\overline{z}+z=0$

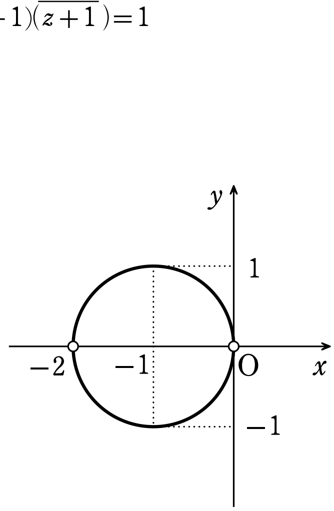
よって　$(z+1)(\overline{z}+1)=1$　すなわち　$(z+1)\overline{(z+1)}=1$

ゆえに　$|z+1|^2=1$

$|z+1|\geqq0$ であるから　$|z+1|=1$　(^{ケ} ⑥)

ただし，$z\neq0$，2，-2 である。

したがって，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると　^{コ} ⓪



(ii) $\alpha'=-z$，$\beta'=-2$，$\gamma'=-\dfrac{4}{z}$ のとき

$z \neq 0,\ 2,\ -2$ より，$\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ は異なる複素数であり

$$\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}=\frac{-\dfrac{4}{z}-(-z)}{-2-(-z)}=\frac{(z+2)(z-2)}{z(z-2)}=1+\frac{2}{z}$$

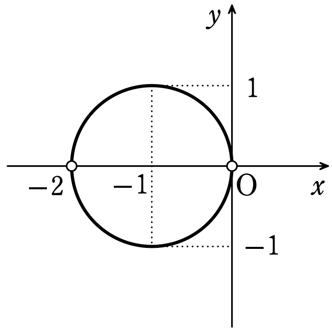
よって，複素数平面上の異なる3点 $\mathrm{A'}(\alpha')$，$\mathrm{B'}(\beta')$，$\mathrm{C'}(\gamma')$ について，直線 A′B′ と直線 A′C′ が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1+\frac{2}{z}\right)+\overline{\left(1+\frac{2}{z}\right)}=0$$

(i) と同様に変形すると　$|z+1|=1$

ただし，$z \neq 0,\ 2,\ -2$ である。

したがって，直線 A′B′ と直線 A′C′ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると　[サ] ⓪



別解　$\alpha'=-\alpha$，$\beta'=-\beta$，$\gamma'=-\gamma$ であるから，3点 $\mathrm{A'}(\alpha')$，$\mathrm{B'}(\beta')$，$\mathrm{C'}(\gamma')$ はそれぞれ点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を原点に関して対称移動した点である。

よって，直線 A′B′ と直線 A′C′ が垂直に交わることと，直線 AB と直線 AC が垂直に交わることは同値である。

したがって，直線 A′B′ と直線 A′C′ が垂直に交わるような点 z 全体は，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体と一致するから，(i) より　$|z+1|=1$

ただし，$z \neq 0,\ 2,\ -2$ である。　(以下，本解と同じ)

(iii)　$\alpha''=-z$，$\beta''=2$，$\gamma''=-\dfrac{4}{z}$ のとき

$z \neq 0,\ 2,\ -2$ より，$\alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$ は異なる複素数であり

$$\frac{\gamma''-\alpha''}{\beta''-\alpha''}=\frac{-\dfrac{4}{z}-(-z)}{2-(-z)}=\frac{(z+2)(z-2)}{z(z+2)}=1-\frac{2}{z}$$

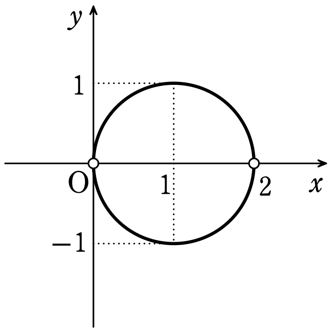
よって，複素数平面上の異なる3点 $\mathrm{A''}(\alpha'')$，$\mathrm{B''}(\beta'')$，$\mathrm{C''}(\gamma'')$ について，直線 A″B″ と直線 A″C″ が垂直に交わるための必要十分条件は　$\left(1-\dfrac{2}{z}\right)+\overline{\left(1-\dfrac{2}{z}\right)}=0$

(i) と同様に，両辺に $z\overline{z}$ を掛けて変形すると，

$z\overline{z}-\overline{z}-z=0$ から　$|z-1|=1$

ただし，$z \neq 0,\ 2,\ -2$ である。

したがって，直線 A″B″ と直線 A″C″ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると　[シ] ①



別解　α''，β''，γ'' は (i) の α，β，γ における z を $-z$ におき換えた複素数であるから，(i) で得られた式 $|z+1|=1$ の z に $-z$ を代入すると　$|-z+1|=1$

すなわち　$|z-1|=1$

ただし，$-z \neq 0,\ 2,\ -2$ から，$z \neq 0,\ 2,\ -2$ である。

(以下，本解と同じ)

3

(解説)

$6.75=6+0.75$

0.75 について，0.75 に 2 を掛け，小数部分に 2 を掛ける掛け算を繰り返すと右のようになる。

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1.5 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1.0 \end{array}$$

出てきた整数部分を順に並べて

$$0.75=0.11_{(2)}$$

さらに，$6=110_{(2)}$ であるから

$$6.75=110_{(2)}+0.11_{(2)}=110.11_{(2)}$$

また　$110.11_{(2)}\times 101.0101_{(2)}=100011.110111_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 110.11 \\ \times\ 101.0101 \\ \hline 11011 \\ 1\ 1011 \\ 110\ 11 \\ 11011 \\ \hline 100011.110111 \end{array}$$

$100011.110111_{(2)}$ を 4 進法で表すと

$$\begin{aligned} &100011.110111_{(2)} \\ &=1\cdot 2^5+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-4}+1\cdot 2^{-5}+1\cdot 2^{-6} \\ &=2\cdot 2^4+2\cdot 2^0+1\cdot 2^0+2\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-4}+2\cdot 2^{-6}+1\cdot 2^{-6} \\ &=2\cdot 2^4+3\cdot 2^0+3\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-4}+3\cdot 2^{-6} \\ &=2\cdot 4^2+3\cdot 4^0+3\cdot 4^{-1}+1\cdot 4^{-2}+3\cdot 4^{-3}=203.313_{(4)} \end{aligned}$$

4

(解説)

$n-1$ 回目までの試行で，赤以外の 3 種類の色の玉をすべて取り出す確率 P を求める。

$n-1$ 回目までの試行で，

赤以外の色のいずれかの玉を取り出す事象を A,

赤以外の 1 色の玉のみを取り出す事象を B,

赤以外の 2 色の玉のみを取り出す事象を C とすると

$$\begin{aligned} P&=P(A)-P(B)-P(C) \\ &=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-{}_3\mathrm{C}_2\left\{\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\} \\ &=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^{n-1}} \end{aligned}$$

したがって，求める確率は

$$P\times\frac{1}{4}=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^{n-1}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^n}$$

5

(解説)

点 M は平面 α 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ は実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=s(-1,\ -1,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 2)$

$$=(-s-t,\ -s,\ 2t)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$\begin{aligned} &=(-s-t,\ -s,\ 2t)-(0,\ 1,\ 1) \\ &=(-s-t,\ -s-1,\ 2t-1) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\perp\alpha$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{AB}$ より $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ であるから　　$2s+t+1=0$ ……①
$\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であるから　　$s+5t-2=0$ ……②

①，② から　　$s=-\dfrac{7}{9}$，$t=\dfrac{5}{9}$

したがって　　$\overrightarrow{PM}=\left(\dfrac{2}{9},\ -\dfrac{2}{9},\ \dfrac{1}{9}\right)$

よって　　$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PM}=(1,\ 1,\ 1)+2\left(\dfrac{2}{9},\ -\dfrac{2}{9},\ \dfrac{1}{9}\right)=\left(\dfrac{13}{9},\ \dfrac{5}{9},\ \dfrac{11}{9}\right)$

したがって，点 Q の座標は　　$\left(\dfrac{13}{9},\ \dfrac{5}{9},\ \dfrac{11}{9}\right)$

別解　平面 α の方程式は　　$x-y+\dfrac{z}{2}=1$　　　すなわち　　$2x-2y+z=2$

平面 α の法線ベクトルの 1 つは　　$\vec{n}=(2,\ -2,\ 1)$
$\overrightarrow{PQ}\perp\alpha$ より，$\overrightarrow{PQ}$ は実数 t を用いて $t\vec{n}$ と表されるから

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=(2t+1,\ -2t+1,\ t+1)$$

点 M は PQ の中点であるから

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\left(t+1,\ -t+1,\ \frac{t}{2}+1\right)$$

点 M は平面 α 上にあるから

$$2(t+1)-2(-t+1)+\frac{t}{2}+1=2$$

これを解くと　　$t=\dfrac{2}{9}$

よって，$\overrightarrow{OQ}=\left(\dfrac{13}{9},\ \dfrac{5}{9},\ \dfrac{11}{9}\right)$ であるから，点 Q の座標は　　$\left(\dfrac{13}{9},\ \dfrac{5}{9},\ \dfrac{11}{9}\right)$

6

解説

(1)　A$(\alpha,\ \alpha^2)$，B$(\beta,\ \beta^2)$ とする。
A，B は放物線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+1$ の共有点であるから，α，β は x の 2 次方程式 $x^2=mx+1$ すなわち $x^2-mx-1=0$ の 2 つの実数解である。
ゆえに，2 次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=-1 \quad \cdots\cdots ①$$

直線 OA，OB の傾きをそれぞれ k_1，k_2 とすると

$$k_1=\frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha,\ k_2=\frac{\beta^2}{\beta}=\beta$$

よって　　$k_1k_2=\alpha\beta=-1$

したがって，直線 OA，OB は直交するから，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

(2)　(1) から，△AOB は $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ の直角三角形であるから，3 点 A，B，O を通る円は辺 AB を直径とする円である。
線分 AB を直径とする円の中心を C とすると，C は線分 AB の中点であるから

$$\mathrm{C}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$$

ここで，① から　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{m}{2}$,

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\frac{m^2+2}{2}$$

よって　$C\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{m^2+2}{2}\right)$

また，円は点 O を通るから，半径は

$$OC=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m^2+2}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{(m^2+4)(m^2+1)}}{2}$$

したがって，求める円の方程式は

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m^2+2}{2}\right)^2=\frac{(m^2+1)(m^2+4)}{4}$$

(3)　(2) で求めた円の方程式を展開して整理すると

$$x^2-mx+y^2-(m^2+2)y=0$$

これに $y=x^2$ を代入して　$x^2-mx+x^4-(m^2+2)x^2=0$

すなわち　$x(x+m)(x^2-mx-1)=0$

ゆえに　$x=0,\ -m,\ \alpha,\ \beta$

よって，放物線 $y=x^2$ と (2) で求めた円が A，B，O 以外の共有点をもたないための必要十分条件は，$x=-m$ が方程式 $x(x^2-mx-1)=0$ の解になることである。

よって，方程式 $x(x^2-mx-1)=0$ に $x=-m$ を代入して　$-m(2m^2-1)=0$

したがって，求める m の値は　$m=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

7

解説

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

$\overrightarrow{OA_0}$，$\overrightarrow{OB_0}$，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{OA_0}=\frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{OB_0}=\frac{1}{3}\vec{b},\ \overrightarrow{OP}=(1-s)\vec{a}+s\vec{c},\ \overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$$

4 点 A_0，B_0，P，Q は同一平面上にあるから実数 x，y を用いて $\overrightarrow{A_0Q}=x\overrightarrow{A_0B_0}+y\overrightarrow{A_0P}$ と表される。

このとき　$\overrightarrow{A_0Q}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA_0}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

また

$$\begin{aligned}x\overrightarrow{A_0B_0}+y\overrightarrow{A_0P}&=x(\overrightarrow{OB_0}-\overrightarrow{OA_0})+y(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA_0})\\&=x\left(\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+y\left\{(1-s)\vec{a}+s\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right\}\\&=\left\{-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-s\right)y\right\}\vec{a}+\frac{1}{3}x\vec{b}+ys\vec{c}\end{aligned}$$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}=\left\{-\dfrac{1}{2}x+\left(\dfrac{1}{2}-s\right)y\right\}\vec{a}+\dfrac{1}{3}x\vec{b}+ys\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-s\right)y \quad \cdots\cdots ①,$$

$1-t=\dfrac{1}{3}x$ …… ②,

$t=sy$ …… ③

② から　$x=3-3t$　　③ から　$y=\dfrac{t}{s}$

これらを ① に代入して　$-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(3-3t)+\left(\dfrac{1}{2}-s\right)\dfrac{t}{s}$

整理すると　$st-2s+t=0$

すなわち　$t(1+s)=2s$

$1+s\fallingdotseq 0$ であるから　$t=\dfrac{2s}{s+1}$

(2)　条件から　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$

また　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2\times\cos120^\circ=-1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$,

$\vec{c}\cdot\vec{a}=2\times1\times\cos60^\circ=1$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\{(1-s)\vec{a}+s\vec{c}\}\cdot\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$

$=(1-s)(1-t)\times(-1)+(1-s)t\times1+s(1-t)\times0+st\times4$

$=2st+s+2t-1$

$=(s+1)(2t+1)-2$

$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$

ゆえに　$(s+1)(2t+1)-2=0$

(1) の結果から　$(s+1)\left(\dfrac{4s}{s+1}+1\right)=2$

すなわち　$5s+1=2$　　したがって　$s=\dfrac{1}{5}$

このとき　$t=\dfrac{2s}{s+1}=\dfrac{1}{3}$

これは $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす。