

1

4個の整数 $n+1$, n^3+3 , n^5+5 , n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。

2

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。

3

A, B の2人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが1枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

- (a) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に1点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、A はコインを B に渡す。
 - (b) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に1点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、B はコインを A に渡す。
- そして A, B のいずれかが2点を獲得した時点で、2点を獲得した方の勝利とする。例えば、コインが表, 裏, 表, 表と出た場合、この時点で A は1点, B は2点を獲得しているので B の勝利となる。

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。