1

解説

$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ である鋭角三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC}=\alpha$，$\angle\mathrm{ABC}=\beta$，$\angle\mathrm{ACB}=\gamma$ とおく。

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\gamma}=2\cdot1$　……①

したがって　$\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

γ は鋭角であるから　$\gamma=60^\circ$

よって　$\alpha+\beta=120^\circ$ ……②

①から　$\sin\alpha=\dfrac{a}{2}$　……③

α は鋭角であるから　$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}$　……④

①～④から　$b=2\sin\beta=2\sin(120^\circ-\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}+\frac{a}{2}=\frac{a+\sqrt{3(4-a^2)}}{2}$$

2

解説

$x^2+3y^2=3$ ……①，　$\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=2$ ……②

①から　$x^2=3(1-y^2)$　……③

③を②に代入して　$\dfrac{3(1-y^2)}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=2$

分母を払って整理すると　$(3\sin^2\theta+\cos^2\theta)y^2=(3-2\cos^2\theta)\sin^2\theta$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ を代入して，整理すると　$(2\sin^2\theta+1)y^2=(2\sin^2\theta+1)\sin^2\theta$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$2\sin^2\theta+1\neq0$ であるから　$y^2=\sin^2\theta$

また，$\sin\theta>0$ かつ点 P の y座標は正であるから　$y=\sin\theta$

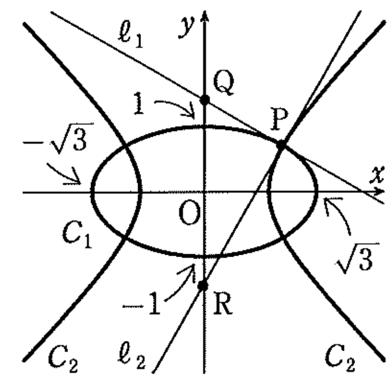
このとき，③から　$x^2=3(1-\sin^2\theta)=3\cos^2\theta$

$\cos\theta>0$ かつ点 P の x座標は正であるから　$x=\sqrt{3}\cos\theta$

よって，点 P の座標は　$(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$

ゆえに，点 P における楕円 C_1 の接線 ℓ_1の方程式は

$$(\sqrt{3}\cos\theta)x+3\cdot(\sin\theta)y=3$$



$x=0$ として，yについて解くと　$y=\dfrac{1}{\sin\theta}$

点 P における双曲線 C_2 の接線 ℓ_2 の方程式は

$$\frac{(\sqrt{3}\cos\theta)x}{\cos^2\theta}-\frac{(\sin\theta)y}{\sin^2\theta}=2$$

$x=0$ として，yについて解くと　$y=-2\sin\theta$

よって　$\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$，　$\mathrm{R}(0,\ -2\sin\theta)$

ゆえに　$\mathrm{QR}=\dfrac{1}{\sin\theta}-(-2\sin\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}+2\sin\theta$

ここで，$\dfrac{1}{\sin\theta}>0$，$2\sin\theta>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{\sin\theta}+2\sin\theta\geqq2\sqrt{\frac{1}{\sin\theta}\cdot2\sin\theta}=2\sqrt{2}$$

等号は，$\dfrac{1}{\sin\theta}=2\sin\theta$ のとき成立する。

このとき，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

したがって，求める最小値は　$2\sqrt{2}$

$\boxed{3}$

解説

(1) $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ から　　$f'(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}-1$

よって　　$f''(x)=\dfrac{2(e^x)'(1+e^x)-2e^x(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

ゆえに　　$\log f''(x)=\log\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

$$=\log 2+\log e^x-\log(1+e^x)^2$$

$$=-\{2\log(1+e^x)-x-\log 2\}$$

$$=-f(x)$$

(2) (1) から　$e^{-f(x)}=f''(x)$

よって　　$\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)f''(x)dx$

$$=\Big[(x-\log 2)f'(x)\Big]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}f'(x)dx$$

$$=(\log 2)f'(0)-\Big[f(x)\Big]_0^{\log 2}$$

$$=(\log 2)f'(0)-f(\log 2)+f(0)$$

ここで　　$f(0)=2\log 2-\log 2=\log 2$,

$f(\log 2)=2\log(1+e^{\log 2})-\log 2-\log 2=2\log 3-2\log 2$,

$f'(0)=\dfrac{2}{2}-1=0$

ゆえに，求める値は　　$-(2\log 3-2\log 2)+\log 2=3\log 2-2\log 3=\log\dfrac{8}{9}$