高2理系数学総合S　11月14日提出課題　～微分～

$\boxed{1}$

曲線 C_1：$y=2\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 C_2：$y=\cos 2x+k$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が共有点 P で共通の接線 ℓ をもつ。ただし，k は定数であり，点 P の x 座標は正とする。k の値と接線 ℓ の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$

a を実数の定数とする。関数 $f(x)=(x+1)e^{-ax^2}$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

$0<\theta<\pi$ を満たす θ に対して平面上の 3 点 A$(1,\ 0)$，B$(\cos\theta,\ \sin\theta)$，C$(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ を考える。

(1)　$\triangle$ABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(2)　$S(\theta)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$

関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極値を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　a を実数の定数とするとき，方程式 $e^x=ax^2$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$\boxed{5}$

すべての正の実数 x に対して $\sqrt{x}+2\leqq k\sqrt{x+1}$ が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

$\boxed{6}$

a，b を正の実数とする。e は自然対数の底とし，必要ならば $2.7<e$ を用いてもよい。

(1)　$a<b$ とする。このとき $a^b=b^a$ ならば $1<a<e<b$ であることを証明せよ。

(2)　$\sqrt{5}^{\sqrt{7}}$ と $\sqrt{7}^{\sqrt{5}}$ の大小を比較せよ。

$\boxed{7}$

e は自然対数の底とし，c を正の定数とする。

(1)　方程式 $x=ce^{-x}$ は，$0<x<c$ でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2)　$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ に対して，不等式 $|e^{-a}-e^{-b}|\leqq|a-b|$ が成り立つことを示せ。

(3)　(1) の方程式の解を α とし，数列 $\{x_n\}$ を，$x_1=0$，$x_{n+1}=ce^{-x_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定める。このとき，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，不等式 $|x_{n+1}-\alpha|\leqq c|x_n-\alpha|$ が成り立つことを示せ。

(4)　(3) の数列 $\{x_n\}$ について，$0<c<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を示せ。

$\boxed{1}$

解答　$k=\dfrac{3}{2}$，$y=-\sqrt{3}\,x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+1$

$\boxed{2}$

解答　$a<-2$，$0<a$

$\boxed{3}$

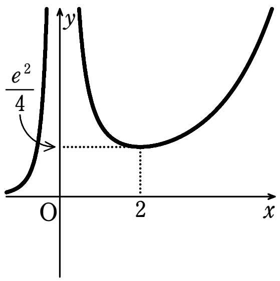
解答　(1)　$S(\theta)=\sin\theta(1-\cos\theta)$　　(2)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=2$ で極小値 $\dfrac{e^2}{4}$；[図]

(2)　$a\leqq 0$ のとき 0 個，$0<a<\dfrac{e^2}{4}$ のとき 1 個，

$a=\dfrac{e^2}{4}$ のとき 2 個，$a>\dfrac{e^2}{4}$ のとき 3 個



$\boxed{5}$

解答　$\sqrt{5}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　略　　(2)　$\sqrt{5}^{\sqrt{7}}<\sqrt{7}^{\sqrt{5}}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　略

$\boxed{1}$

$f(x)=2\cos x$，$g(x)=\cos 2x+k$ とすると

$f'(x)=-2\sin x$，$g'(x)=-2\sin 2x$

曲線 $y=f(x)$ と 曲線 $y=g(x)$ が，x 座標が t $\left(0<t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ である点で共通の接線をもつとき　$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$

すなわち　$2\cos t=\cos 2t+k$　……①

$-2\sin t=-2\sin 2t$　……②

② から　$\sin t=2\sin t\cos t$

$0<t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin t\fallingdotseq 0$　よって　$\cos t=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$t=\dfrac{\pi}{3}$

これを ① に代入すると　$1=-\dfrac{1}{2}+k$

よって　$k=\dfrac{3}{2}$

また，接線 ℓ の方程式は　$y-2\cos t=-2\sin t\cdot(x-t)$

$t=\dfrac{\pi}{3}$ を代入して　$y-2\cos\dfrac{\pi}{3}=-2\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって　$y=-\sqrt{3}\,x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+1$

$\boxed{2}$

$f(x)$ が極値をもつとき，$f'(x)=0$ を満たす x が存在し，かつその x の前後で $f'(x)$ の符号が変化する。

[1]　$a\fallingdotseq 0$ のとき

$f'(x)=e^{-ax^2}-2ax(x+1)e^{-ax^2}=(-2ax^2-2ax+1)e^{-ax^2}$

$e^{-ax^2}>0$ であるから　$2ax^2+2ax-1=0$　……①

ゆえに，x についての 2 次方程式 ① が異なる 2 つの実数解をもてばよい。

① の判別式を D とすると　$D>0$　したがって　$\dfrac{D}{4}=a^2+2a>0$

ゆえに　$a<-2$，$0<a$

このとき，$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それぞれの解の前後で $f'(x)$ の符号が変わる。

[2]　$a=0$ のとき

$f(x)=x+1$，$f'(x)=1$ であるから，$f'(x)=0$ を満たす x は存在しない。

[1], [2] から　　$a<-2$，$0<a$

$\boxed{3}$

(1)　直線 BC と x 軸との交点を H とすると，その座標は　　$(\cos\theta,\ 0)$

ゆえに　　$\mathrm{AH}=1-\cos\theta$　　また　　$\mathrm{BC}=2\sin\theta$

よって　　$\mathrm{S}(\theta)=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=\sin\theta(1-\cos\theta)$

(2)　$S'(\theta)=\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta\sin\theta=\cos\theta(1-\cos\theta)+1-\cos^2\theta$

$=(1-\cos\theta)(2\cos\theta+1)$

$0<\theta<\pi$ において $S'(\theta)=0$ とすると，$1-\cos\theta>0$ であるから　　$2\cos\theta+1=0$

よって　　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

ゆえに，$0<\theta<\pi$ における $S(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$S(\theta)$ は $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ で極大かつ最大となる。

このとき　　$S\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

よって，$S(\theta)$ は $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。

$\boxed{4}$

(1)　$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^2-2x\cdot e^x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=2$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$

ゆえに，$f(x)$ は $x=2$ で極小値 $\dfrac{e^2}{4}$ をとる。

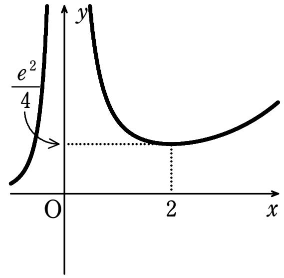
また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$，

$\displaystyle\lim_{x\to\pm0}f(x)=+\infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$

よって，漸近線は　x 軸と y 軸

したがって，グラフのは右の図のようになる。



(2)　$x=0$ は方程式 $e^x=ax^2$ を満たさないから，$x\neq0$ で

$$\frac{e^x}{x^2}=a$$

この方程式の実数解の個数は，$y=\dfrac{e^x}{x^2}$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

よって，(1) のグラフから，求める実数解の個数は

$a\leqq0$ のとき　0 個，

$0<a<\dfrac{e^2}{4}$ のとき　1 個，

$a=\dfrac{e^2}{4}$ のとき　2 個，

$a>\dfrac{e^2}{4}$ のとき　3 個

$\boxed{5}$

$\sqrt{x+1}>0$ であるから，与えられた不等式は $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}}\leqq k$ と同値である。

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}}$ $(x>0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+1}-(\sqrt{x}+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$=\frac{(x+1)-(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}(x+1)}=\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}(x+1)}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{1}{4}$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	極大	↘

ゆえに，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{4}$ のとき極大かつ最大となり，最大値は　　$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{5}$

よって，不等式が成り立つための条件は　　$\sqrt{5}\leqq k$

したがって，kの最小値は　　$\sqrt{5}$

$\boxed{6}$

(1)　$a^b=b^a$ の両辺は正であるから，両辺の自然対数をとると　　$\log a^b=\log b^a$

すなわち　　$b\log a=a\log b$　　　　よって　　$\dfrac{\log a}{a}=\dfrac{\log b}{b}$　……①

ここで，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ とおくと　　$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　　$\log x=1$

よって　　$x=e$

ゆえに，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

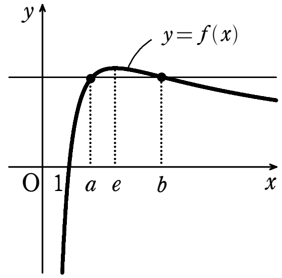
また　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$，

$f(1)=0$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\frac{1}{e}$	↘

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

したがって，実数 a，b $(a<b)$ が ① を満たしているとき　　$1<a<e<b$



(2)　$2.7^2=7.29$ であるから，$5<7<7.29$ より

$\sqrt{5}<\sqrt{7}<2.7$

これと $2.7<e$ から　　$\sqrt{5}<\sqrt{7}<e$

よって，(1) の増減表より，$f(x)$ は $0<x\leqq e$ の範囲で単調に増加するから　　$f(\sqrt{5})<f(\sqrt{7})$

すなわち　　$\dfrac{\log\sqrt{5}}{\sqrt{5}}<\dfrac{\log\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

ゆえに　　$\sqrt{7}\log\sqrt{5}<\sqrt{5}\log\sqrt{7}$

よって　　$\log\sqrt{5}^{\sqrt{7}}<\log\sqrt{7}^{\sqrt{5}}$

底 e は1より大きいから　　$\sqrt{5}^{\sqrt{7}}<\sqrt{7}^{\sqrt{5}}$

$\boxed{7}$

(1)　$f(x)=x-ce^{-x}$ とすると　　$f'(x)=1+ce^{-x}$

$c>0$ であるから，すべての実数 x で　　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は単調に増加する連続な関数である。

ここで　　$f(0)=-c<0$，$f(c)=c-ce^{-c}=c(1-e^{-c})$

$e^{-c}<1$ であるから　　$f(c)>0$

したがって，方程式 $x=ce^{-x}$ は $0<x<c$ でただ1つの実数解をもつ。

(2)　$g(x)=e^{-x}$ とすると　　$g'(x)=-e^{-x}$

[1]　$a>b$ のとき

$g(x)$ は実数全体で微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{e^{-a}-e^{-b}}{a-b}=-e^{-t},\ 0\leqq b<t<a$$

を満たす t が存在する。

$t>0$ であるから　　$0<e^{-t}<1$

よって　　$\left|\dfrac{e^{-a}-e^{-b}}{a-b}\right|=e^{-t}<1$

したがって，$|e^{-a}-e^{-b}|<|a-b|$ が成り立つ。

[2]　$a=b$ のとき

$|e^{-a}-e^{-b}|=0$，$|a-b|=0$ であるから，$|e^{-a}-e^{-b}|=|a-b|$ が成り立つ。

[3]　$b>a$ のとき

[1] と同様にして，$|e^{-a}-e^{-b}|<|a-b|$ が成り立つ。

[1]，[2]，[3] から，$|e^{-a}-e^{-b}|\leqq|a-b|$ が成り立つ。

(3)　$c>0$，$e^{-x_n}>0$ であるから，$x_{n+1}=ce^{-x_n}>0$

$x_1=0$ であるから，すべての自然数 n について　　$x_n\geqq 0$

また，(1) から　　$0<\alpha<c$，$\alpha=e^{-c\alpha}$

(2) から，$x_n\geqq 0$，$\alpha>0$ について，$|e^{-x_n}-e^{-\alpha}|\leqq|x_n-\alpha|$ が成り立つから，すべての自然数 n について

$$|x_{n+1}-\alpha|=|ce^{-x_n}-ce^{-\alpha}|=c|e^{-x_n}-e^{-\alpha}|\leqq c|x_n-\alpha|$$

が成り立つ。

(4)　(3) から，$n\geqq 2$ のとき

$$|x_n-\alpha|\leqq c|x_{n-1}-\alpha|\leqq\cdots\cdots\leqq c^{n-1}|x_1-\alpha|=c^{n-1}\alpha$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$0\leqq|x_n-\alpha|\leqq c^{n-1}\alpha$$

が成り立つ。

$0<c<1$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}c^{n-1}\alpha=0$

よって，はさみうちの原理により　　$\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0$

したがって，$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ が成り立つ。