$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$1000a+100b+10c+d=999a+99b+9c+a+b+c+d$

$$=9(111a+11b+c)+a+b+c+d \quad \cdots\cdots ①$$

$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数のとき，$1000a+100b+10c+d=9k$ (k は整数) とおくと，① から　　$9k=9(111a+11b+c)+a+b+c+d$

すなわち　　$a+b+c+d=9(k-111a-11b-c)$

$9(k-111a-11b-c)$ は 9 の倍数であるから，$a+b+c+d$ は 9 の倍数である。

また，① において，$9(111a+11b+c)$ は 9 の倍数であるから，$a+b+c+d$ が 9 の倍数のとき，$1000a+100b+10c+d$ は 9 の倍数である。

以上から，$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値である。

(2)　8 枚のカードの並べ方の総数は　${}_8\mathrm{P}_4=1680$ (通り)

並べた 4 枚のカードを左から順に a，b，c，d とすると，$n=1000a+100b+10c+d$ であるから，(1) より，$a+b+c+d$ が 9 の倍数である確率を考えればよい。

ここで，$a+b+c+d$ の値は 4 枚のカードの組合せが

$\boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$ のとき最小値

$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{8}$ のとき最大値

をとるから，$2 \leqq a+b+c+d \leqq 20$ である。

[1]　$a+b+c+d=9$ のとき

$\boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{8}$ のカードを取り出す場合である。

$\boxed{0}$ のカード 2 枚の取り出し方は　${}_2\mathrm{C}_2$ 通り

$\boxed{1}$ のカード 1 枚と $\boxed{8}$ のカード 1 枚の取り出し方はそれぞれ　${}_2\mathrm{C}_1$ 通り

よって，このとき　　${}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times 4!=96$ (通り)

[2]　$a+b+c+d=18$ のとき

$\boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{8}$ または $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{8}$ のカードを取り出す場合である。

よって，[1] と同様に考えると，このとき

$$\begin{aligned}{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times 4!+{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times 4! &= 96+24\\ &= 120 \text{ (通り)}\end{aligned}$$

[1]，[2] から，求める確率は　　$\dfrac{96+120}{1680}=\dfrac{9}{70}$

(3)　n が偶数である事象を A，n が 9 の倍数である事象を B とおくと，求める確率は $P_A(B)$ である。

n が偶数となるのは，d が 0 または 2 または 8 のときであるから

$$P(A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{P}_3}{1680}=\frac{3}{4}$$

n が偶数かつ 9 の倍数である確率を考える。

$\boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{8}$ または $\boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{8}$ または $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{8}$ のカードを取り出して，並べた数が偶数となる場合は

$$({}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1)\times{}_3\mathrm{C}_1\times 3!+({}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2)\times 4!+({}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2)\times{}_2\mathrm{C}_1\times 3!$$

$$=72+96+12=180\ (\text{通り})$$

よって，n が偶数かつ 9 の倍数となる確率は　　$P(A\cap B)=\dfrac{180}{1680}=\dfrac{3}{28}$

したがって，求める確率は　　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{3}{28}\div\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{7}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$x-b=(x-c)+(c-b)$ より

$$\int_a^c (x-a)(x-b)dx=\int_a^c (x-a)(x-c)dx+(c-b)\int_a^c (x-a)dx$$

$$=-\frac{1}{6}(c-a)^3+(c-b)\left[\frac{1}{2}(x-a)^2\right]_a^c=-\frac{1}{6}(c-a)^2\{(c-a)-3(c-b)\}$$

$$=-\frac{1}{6}(c-a)^2(3b-a-2c)$$

よって，$\int_a^c (x-a)(x-b)dx=0$ のとき　　$a=c$　または　$3b=a+2c$

[1]　$a=c$ のとき

b は任意であるから，a，b，c の目の出方は　　$6^2=36$（通り）

[2]　$a \neq c$ かつ $3b=a+2c$ のとき

$b \neq a$ であり，かつ b と a の偶奇は一致する。

これを満たす $(a,\ b,\ c)$ は

$(1,\ 3,\ 4)$，$(2,\ 4,\ 5)$，$(3,\ 5,\ 6)$，$(4,\ 2,\ 1)$，$(5,\ 3,\ 2)$，$(6,\ 4,\ 3)$

の 6 通り。

以上から，求める確率は　　$\dfrac{36+6}{6^3}=\dfrac{7}{36}$

(2)　等式で $\log_a b=B$，$\log_a c=C$ とおくと　　$2B-2C+\dfrac{C}{B}=1$

よって　　$2B^2-2BC+C-B=0$

$(2B-1)(B-C)=0$

ゆえに　　$B=\dfrac{1}{2}$ または $B=C$　　　すなわち　　$b=\sqrt{a}$ または $b=c$

[3]　$b=\sqrt{a}$ すなわち $b^2=a$ のとき

$a \geqq 2$，$b \geqq 2$ から，$(a,\ b)=(4,\ 2)$ に限られる。

c は任意なので，a，b，c の目の出方は 6 通り。

[4]　$b^2 \neq a$ かつ $b=c$ のとき

$a \geqq 2$，$b=c \geqq 2$ となる a，b，c の目の出方は 5^2 通りで，$b^2=a$ の場合を除くから 24 通り。

以上から，求める確率は　　$\dfrac{6+24}{6^3}=\dfrac{5}{36}$

$\boxed{3}$

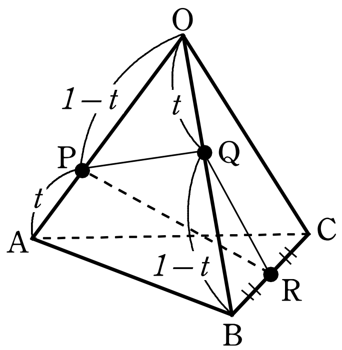
(解説)

OABC は 1 辺の長さが 1 の正四面体であるから

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$



(1) $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{a}-t\vec{b}$

$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}=\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

(2) (1) より

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\left\{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\right\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right\}$$

$$=(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c}-t\left(\frac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2-\frac{1}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)\times\frac{1}{2}-t\left(\frac{1}{2}-t\right)\times1^2-\frac{1}{2}t\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(6t^2-7t+2)=\frac{1}{4}(2t-1)(3t-2)$$

$\angle PQR=\frac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=0$ であるから　　$\frac{1}{4}(2t-1)(3t-2)=0$

よって　　$t=\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}$　　　　これは $0<t<1$ を満たす。

(3) $\angle PQR=\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot QP\cdot QR$

$t=\frac{1}{2}$ のとき，3 点 P，Q，R はそれぞれ辺 OA，OB，BC の中点である。

よって，$QP=QR=\frac{1}{2}$ であるから　　$\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$t=\frac{2}{3}$ のとき　　$\overrightarrow{QP}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{QR}=-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

よって　　$|\overrightarrow{QP}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2$

$$=\frac{1}{9}\cdot1^2-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\cdot1^2=\frac{1}{3}$$

$|\overrightarrow{QR}|^2=\left|-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right|^2=\frac{1}{36}|\vec{b}|^2-\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2$

$$=\frac{1}{36}\cdot1^2-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=\frac{7}{36}$$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

よって　　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{6}=\dfrac{\sqrt{21}}{36}$

$\boxed{4}$

(解説)

$n^3-7n+9=(n^3-n)-6n+9=(n-1)n(n+1)+3(-2n+3)$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 整数の積であるから，3 の倍数である。

よって，$(n-1)n(n+1)=3k$ (k は整数) とおくと

$$n^3-7n+9=3k+3(-2n+3)=3(k-2n+3)$$

$k-2n+3$ は整数であるから，n^3-7n+9 は 3 の倍数である。

よって，n^3-7n+9 が素数となるとき，その値は 3 である。

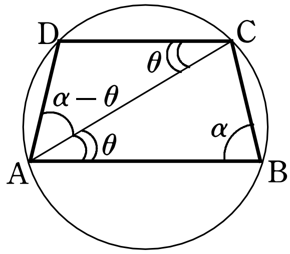
ゆえに　　$n^3-7n+9=3$　　　　すなわち　　$n^3-7n+6=0$

よって　　$(n-1)(n-2)(n+3)=0$

したがって　　$n=-3,\ 1,\ 2$

$\boxed{5}$

(解説)



四角形 ABCD は円に内接し，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}$ であるから　$\overset{\frown}{\mathrm{ADC}}=\overset{\frown}{\mathrm{BCD}}$

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ は共通であるから　$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$

長さの等しい弧に対する円周角は等しいから

$$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{BAC}$$

$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{BAC}=\theta\ (0<\theta<\alpha)$ とすると

$$\angle\mathrm{ACB}=\pi-(\alpha+\theta),\ \angle\mathrm{CAD}=\alpha-\theta$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\{\pi-(\alpha+\theta)\}}=2\cdot1,\ \dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\theta}=2\cdot1$

よって　$\mathrm{AB}=2\sin(\alpha+\theta),\ \mathrm{BC}=2\sin\theta$

また，$\triangle\mathrm{ACD}$ において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\sin(\alpha-\theta)}=2\cdot1,\ \dfrac{\mathrm{DA}}{\sin\theta}=2\cdot1$

よって　$\mathrm{CD}=2\sin(\alpha-\theta),\ \mathrm{DA}=2\sin\theta$

したがって

$$\begin{aligned}k&=2\sin(\alpha+\theta)\cdot2\sin\theta\cdot2\sin(\alpha-\theta)\cdot2\sin\theta\\&=16\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)\sin^2\theta\\&=16\left\{-\frac{1}{2}(\cos2\alpha-\cos2\theta)\right\}\frac{1-\cos2\theta}{2}\\&=-4(\cos2\alpha-\cos2\theta)(1-\cos2\theta)\end{aligned}$$

ここで，$\cos2\theta=t$ とおくと，$0<2\theta<2\alpha\leqq\pi$ より　$\cos2\alpha<t<1$

このとき

$$\begin{aligned}k&=-4(\cos2\alpha-t)(1-t)\\&=-4t^2+4(\cos2\alpha+1)t-4\cos2\alpha\\&=-4\left(t-\frac{\cos2\alpha+1}{2}\right)^2+(\cos2\alpha-1)^2\end{aligned}$$

また，$\cos2\alpha-1=(1-2\sin^2\alpha)-1=-2\sin^2\alpha$ より

$$k=-4\left(t-\frac{\cos2\alpha+1}{2}\right)^2+4\sin^4\alpha$$

したがって，$\cos2\alpha<t<1$ において k は $t=\dfrac{\cos2\alpha+1}{2}$ のとき最大値 $4\sin^4\alpha$ をとる。