２月２７日　学年末試験対策

$\boxed{1}$

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1}(x^3-2x+3)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

$\boxed{2}$

第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\dfrac{4n^2+1}{2n^2-5}$　(2) $\dfrac{7n}{2-n^2}$　(3) $6n-n^3$

(4) $\dfrac{n^3-3}{n^2+4}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n}}$

$\boxed{3}$

次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+n(n+1)}$$

$\boxed{4}$

第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $3\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n$　(2) $\dfrac{3^n-2^{n+1}}{2^n+3^n}$　(3) $2^{3n}-3^{2n}$

$\boxed{5}$

次の和を求めよ。

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}+\cdots\cdots$$

$\boxed{6}$

次の等比数列の和を求めよ。

(1) $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\cdots\cdots$　(2) $1-\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{25}-\cdots\cdots$

(3) $2\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})+(-12+8\sqrt{3})+\cdots\cdots$

$\boxed{7}$

次の計算をせよ。

(1) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$　(2) $0.09^{1.5}$　(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

(4) $\sqrt{2}\div\sqrt[4]{4}\times\sqrt[12]{32}\div\sqrt[6]{2}$　(5) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}$

$\boxed{8}$

次の式を計算せよ。

(1) $(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$　(2) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$

$\boxed{9}$

次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $2^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{4}}$, $8^{\frac{1}{8}}$　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sqrt[4]{\dfrac{1}{125}}$　(3) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$

$\boxed{10}$

次の式を簡単にせよ。

(1) $(\log_2 9+\log_4 3)\log_3 4$　(2) $(\log_3 25+\log_9 5)(\log_5 9+\log_{25} 3)$

11

次の方程式，連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 3^{2x}-3^{y}=-6 \\ 3^{2x+y}=27 \end{cases}$　　(2) $\log_2 x+6\log_x 2=5$

12

(1) $9^{\log_3 5}$ の値を求めよ。

(2) $2^x=3^y=6^z$ $(xyz\fallingdotseq 0)$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

13

A 町の人口は近年減少傾向にある。現在のこの町の人口は前年同時期の人口と比べて 4 % 減少したという。毎年この比率と同じ比率で減少すると仮定した場合，初めて人口が現在の半分以下になるのは何年後か。答えは整数で求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

14

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，一般項 a_n を用いて $S_n=-2a_n-2n+5$ と表されるとき，一般項 a_n を n で表せ。

15

$a_1=\dfrac{1}{2}$，$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

16

$\angle$XPY $(=60^\circ)$ の 2 辺 PX，PY に接する半径 1 の円を O_1 とする。次に，2 辺 PX，PY および円 O_1 に接する円のうち半径の小さい方の円を O_2 とする。以下，同様にして順に円 O_3，O_4，…… を作る。

(1) 円 O_n の半径 r_n を n で表せ。

(2) 円 O_n の面積を S_n とするとき，$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$ を n で表せ。

17

数直線上を原点から出発し，次の規則で移動する点 P がある。

　1 個のさいころを投げて，出た目が 5 以上の場合は，正の向きに 2 進み，
　出た目が 4 以下の場合は，正の向きに 1 進む。

さいころを n 回投げたとき，P の座標が偶数になる確率を a_n とする。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。　　(2) a_n を求めよ。

18

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+3a_n}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) a_n を n で表す式を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

19

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$ で定めるとき

(1) $a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ を満たす x，y の組を 2 組求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

20

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-9}{a_n-5}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) すべての自然数 n に対して $a_n\fallingdotseq 3$ であることを示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ。また，一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{1}$

解答　(1)　4　　(2)　$\frac{5}{7}$　　(3)　-2　　(4)　$\frac{1}{6}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　2　　(2)　0　　(3)　$-\infty$　　(4)　∞　　(5)　$\frac{2}{3}$

$\boxed{3}$

解答　1

$\boxed{4}$

解答　(1)　0　　(2)　1　　(3)　$-\infty$

$\boxed{5}$

解答　$\frac{1}{6}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\frac{4}{3}$　　(2)　$\frac{5}{8}$　　(3)　$6+4\sqrt{3}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\frac{16}{81}$　　(2)　0.027　　(3)　2　　(4)　$\sqrt[4]{2}$　　(5)　$\sqrt{2}$　　(6)　$3\sqrt[3]{3}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　-1　　(2)　2

$\boxed{9}$

解答　(1)　$8^{\frac{1}{8}}<2^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}$　　(2)　$\sqrt[4]{\frac{1}{125}}<\sqrt[3]{\frac{1}{25}}<\frac{1}{\sqrt{5}}$　　(3)　$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

$\boxed{10}$

解答　(1)　5　　(2)　$\frac{25}{4}$

$\boxed{11}$

解答　(1)　$x=\frac{1}{2}$，$y=2$　　(2)　$x=4$，8

$\boxed{12}$

解答　(1)　25　　(2)　0

$\boxed{13}$

解答　17 年後

$\boxed{14}$

解答　$a_n=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2$

$\boxed{15}$

解答　$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

$\boxed{16}$

解答　(1)　$r_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$　　(2)　$\frac{9\pi}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

$\boxed{17}$

解答　(1)　$a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}$　　(2)　$a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$\boxed{18}$

解答　(1)　$a_2=\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{7}$，$a_4=\frac{1}{10}$　　(2)　$a_n=\frac{1}{3n-2}$，証明略

$\boxed{19}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 3),\ (-2,\ -1)$　　(2)　$a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}$，$b_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$

$\boxed{20}$

解答　(1)　略　　(2)　$b_{n+1}=b_n-\frac{1}{2}$，$a_n=3-\frac{2}{n}$

$\boxed{1}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1}(x^3-2x+3)=(-1)^3-2\cdot(-1)+3=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+4}=\frac{3+2}{3+4}=\frac{5}{7}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x-1}=\frac{2}{0-1}=-2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8)-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{6}$$

$\boxed{2}$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{2n^2-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{5}{n^2}}=\frac{4+0}{2-0}=2$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}}{\frac{2}{n^2}-1}=\frac{0}{-1}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(6n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{6}{n^2}-1\right)=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=\infty$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n}}{(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n}}{(n^2+5n)-(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n}}{3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3}=\frac{2}{3}$$

$\boxed{3}$

$$(\text{分母})=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$(\text{分子})=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

よって　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=1$

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}3\left(-\frac{4}{5}\right)^n=0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{1-2\cdot 0}{0+1}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{3n}-3^{2n})=\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)=\lim_{n\to\infty}9^n\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^n-1\right\}=-\infty$

5

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{6}$

したがって，和は　$\dfrac{1}{6}$

6

公比を r とする。

(1)　初項は1，公比は $r=\dfrac{1}{4}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

(2)　初項は1，公比は $r=-\dfrac{3}{5}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{5}{8}$$

(3)　初項は $2\sqrt{3}$，公比は $r=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=6+4\sqrt{3}$$

7

(1)　$\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{4}{3}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

(2)　$0.09^{1.5}=0.09^{\frac{3}{2}}=(0.3^2)^{\frac{3}{2}}=0.3^{2\times\frac{3}{2}}=0.3^3=0.027$

別解　$0.09^{1.5}=\left(\dfrac{9}{100}\right)^{\frac{3}{2}}=\left\{\left(\dfrac{3}{10}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{3}{10}\right)^3=\dfrac{27}{1000}=0.027$

(3)　$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

別解　$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ であるから　$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2$

(4)　$\sqrt{2}\div\sqrt[4]{4}\times\sqrt[12]{32}\div\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}\div2^{\frac{2}{4}}\times2^{\frac{5}{12}}\div2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$

(5)　$\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}=\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot3^0=\sqrt{2}$$

(6)　$\sqrt[3]{24}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot3}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\dfrac{3}{3^3}}$

$$=2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$
$$=\left(2+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$$

8

(1)　$(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
$$=2-3=-1$$

(2)　$(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})=(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})\{(\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2\}$
$$=(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{3})^3=5-3=2$$

$\boxed{9}$

(1) $2^{\frac{1}{2}}$，$4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$，$8^{\frac{1}{8}}=(2^3)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{3}{8}}$

底 2 は 1 より大きいから，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>\dfrac{3}{8}$ より　　$8^{\frac{1}{8}}<2^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[4]{\dfrac{1}{125}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{5}\right)^3}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$

底 $\dfrac{1}{5}$ は 1 より小さいから，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{3}{4}$ より

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$　すなわち　$\sqrt[4]{\dfrac{1}{125}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(3) $(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$，$(\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$，$(\sqrt[6]{6})^6=6$

$6<8<9$ であるから　　$(\sqrt[6]{6})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$

$\sqrt[6]{6}>0$，$\sqrt{2}>0$，$\sqrt[3]{3}>0$ であるから　　$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

$\boxed{10}$

(1)
$$\begin{aligned}(\log_2 9+\log_4 3)\log_3 4 &=\left(2\log_2 3+\frac{\log_2 3}{\log_2 4}\right)\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\\ &=\left(2\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3\right)\cdot\frac{2}{\log_2 3}\\ &=\frac{5}{2}\log_2 3\cdot\frac{2}{\log_2 3}=5\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(\log_3 25+\log_9 5)(\log_5 9+\log_{25} 3) &=\left(\log_3 25+\frac{\log_3 5}{\log_3 9}\right)\left(\frac{\log_3 9}{\log_3 5}+\frac{\log_3 3}{\log_3 25}\right)\\ &=\left(\log_3 5^2+\frac{\log_3 5}{\log_3 3^2}\right)\left(\frac{\log_3 3^2}{\log_3 5}+\frac{\log_3 3}{\log_3 5^2}\right)\\ &=\left(2\log_3 5+\frac{\log_3 5}{2}\right)\left(\frac{2}{\log_3 5}+\frac{1}{2\log_3 5}\right)\\ &=\frac{5}{2}\log_3 5\cdot\frac{5}{2\log_3 5}=\frac{25}{4}\end{aligned}$$

別解　(与式)$=\left(\dfrac{\log_5 5^2}{\log_5 3}+\dfrac{\log_5 5}{\log_5 3^2}\right)\left(\log_5 3^2+\dfrac{\log_5 3}{\log_5 5^2}\right)=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\log_5 3}\times\dfrac{5}{2}\log_5 3=\dfrac{25}{4}$

$\boxed{11}$

(1) $3^{2x}=X$，$3^y=Y$ とおくと　　$X>0$，$Y>0$

連立方程式は　$\begin{cases}X-Y=-6 & \cdots\cdots ① \\ XY=27 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　　$Y=X+6$　…… ③

③ を ② に代入して　　$X(X+6)=27$

ゆえに　　$X^2+6X-27=0$　　　　よって　　$(X-3)(X+9)=0$

$X>0$ であるから　　$X=3$

これを ③ に代入して　　$Y=9$　($Y>0$ を満たす)

$X=3$ から　$3^{2x}=3$　　　$Y=9$ から　$3^y=3^2$

したがって　　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=2$

(2) 真数は正で，底は 1 でない正の数であるから　　$0<x<1$，$1<x$　…… ①

よって　　$\log_2 x\neq 0$

方程式の両辺に $\log_2 x$ を掛けて

$$(\log_2 x)^2+6=5\log_2 x$$

整理して　　$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$

ゆえに　　$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$　　　よって　　$\log_2 x=2,\ 3$

$\log_2 x=2$ から　　$x=4$　　　$\log_2 x=3$ から　　$x=8$

これらの x の値は ① を満たす。

したがって，解は　　$x=4$，8

$\boxed{12}$

(1) $9^{\log_3 5}=M$ とおく。

左辺は正であるから，両辺の 3 を底とする対数をとると　$\log_3 9^{\log_3 5}=\log_3 M$

ゆえに　$\log_3 5\log_3 9=\log_3 M$　すなわち　$2\log_3 5=\log_3 M$

よって　$M=5^2$　したがって　$9^{\log_3 5}=25$

別解　$9^{\log_3 5}=(3^2)^{\log_3 5}=3^{2\log_3 5}=3^{\log_3 5^2}=3^{\log_3 25}=25$

(2) $2^x=3^y=6^z$ の各辺は正であるから，各辺の 2 を底とする対数をとると

$$x=y\log_2 3=z\log_2 6$$

ゆえに　$y=\dfrac{x}{\log_2 3}$，$z=\dfrac{x}{\log_2 6}=\dfrac{x}{\log_2(2\cdot3)}=\dfrac{x}{1+\log_2 3}$

$xyz\neq0$ であるから　$x\neq0$，$y\neq0$，$z\neq0$

よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\log_2 3}{x}-\dfrac{1+\log_2 3}{x}=0$

別解　$2^x=3^y=6^z$ の各辺の 6 を底とする対数をとると

$$x\log_6 2=y\log_6 3=z$$

よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{\log_6 2}{z}+\dfrac{\log_6 3}{z}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{\log_6 6-1}{z}=0$

$\boxed{13}$

現在の人口を a として，n 年後に人口が現在の半分以下になるとすると

$$(0.96)^n a\leqq\frac{1}{2}a\quad\text{すなわち}\quad\left(\frac{96}{100}\right)^n\leqq\frac{1}{2}$$

両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}\dfrac{96}{100}\leqq\log_{10}\dfrac{1}{2}$　…… ①

ここで　$\log_{10}\dfrac{96}{100}=\log_{10}\dfrac{2^5\cdot3}{10^2}=\log_{10}2^5+\log_{10}3-\log_{10}10^2$

$=5\log_{10}2+\log_{10}3-2$

$=5\times0.3010+0.4771-2=-0.0179$

$\log_{10}\dfrac{1}{2}=\log_{10}2^{-1}=-\log_{10}2=-0.3010$

よって，① から　$-0.0179n\leqq-0.3010$

ゆえに　$n\geqq\dfrac{0.3010}{0.0179}=16.8\cdots\cdots$

したがって，初めて人口が現在の半分以下になるのは　17 年後

$\boxed{14}$

$S_n=-2a_n-2n+5$ …… ① とする。

① に $n=1$ を代入すると　$S_1=-2a_1-2+5$

$S_1=a_1$ であるから　$a_1=-2a_1-2+5$　よって　$a_1=1$

① から　$S_{n+1}=-2a_{n+1}-2(n+1)+5$ …… ②

②−① から　$S_{n+1}-S_n=-2(a_{n+1}-a_n)-2$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから　$a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)-2$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n-\dfrac{2}{3}$　ゆえに　$a_{n+1}+2=\dfrac{2}{3}(a_n+2)$

ここで　$a_1+2=1+2=3$

数列 $\{a_n+2\}$ は初項 3，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n+2=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\qquad\text{したがって}\qquad a_n=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2$$

$\boxed{15}$

〔解答 1〕 漸化式を変形して　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$

ゆえに　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}a_{n-2}$ $(n\geqq 3)$

これを繰り返して　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}a_1$

よって　$a_n=\dfrac{2\cdot 1}{(n+1)n}\cdot\dfrac{1}{2}$　すなわち　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$　……①

$n=1$ のとき　$\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}=\dfrac{1}{2}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

〔解答 2〕 漸化式の両辺に n を掛けると　$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$

よって　$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}=\cdots\cdots=2\cdot 1\cdot a_1=1$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$　……①

$n=1$ のとき　$\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}=\dfrac{1}{2}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

$\boxed{16}$

(1) 右の図の $\triangle \mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{H}$ について

$\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}=r_n+r_{n+1}$,

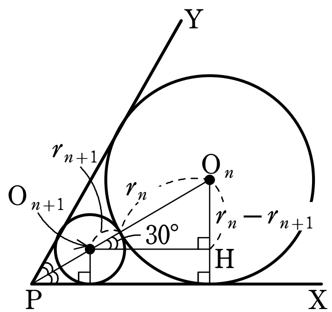
$\mathrm{O}_n\mathrm{H}=r_n-r_{n+1}$

$\angle \mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{H}=30^\circ$ であるから

$\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}=2\mathrm{O}_n\mathrm{H}$

よって　$r_n+r_{n+1}=2(r_n-r_{n+1})$

ゆえに　$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$　　また　$r_1=1$



よって，数列 $\{r_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから　$r_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) $S_n=\pi r_n{}^2=\pi\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$ であるから

$$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n=\frac{\pi\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9\pi}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

$\boxed{17}$

1 個のさいころを投げて，5 以上の目が出る事象を A，4 以下の目が出る事象を B とする。

A が起こる確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$　　B が起こる確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

(1) $(n+1)$ 回目に P の座標が偶数になるのは

[1] n 回目の P の座標が奇数で，次に B が起こる

[2] n 回目の P の座標が偶数で，次に A が起こる

のいずれかであり，[1]，[2] は互いに排反であるから

$$a_{n+1}=(1-a_n)\cdot\frac{2}{3}+a_n\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}$$

(2) $a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}$ を変形すると　$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\qquad よって\qquad a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$\boxed{18}$

(1) $a_2=\dfrac{a_1}{1+3a_1}=\dfrac{1}{1+3\cdot1}=\dfrac{1}{4}$,

$$a_3=\frac{a_2}{1+3a_2}=\frac{\frac{1}{4}}{1+3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{4+3}=\frac{1}{7},$$

$$a_4=\frac{a_3}{1+3a_3}=\frac{\frac{1}{7}}{1+3\cdot\frac{1}{7}}=\frac{1}{7+3}=\frac{1}{10}$$

(2) (1) から，$a_n=\dfrac{1}{3n-2}$ ……① と推測される。

[1] $n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{1}{3\cdot1-2}=1$ から，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$a_k=\frac{1}{3k-2}\ \cdots\cdots ②$$

$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{1+3a_k}=\frac{\frac{1}{3k-2}}{1+3\cdot\frac{1}{3k-2}}=\frac{1}{(3k-2)+3}=\frac{1}{3(k+1)-2}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

$\boxed{19}$

(1) $a_{n+1}+xb_{n+1}=a_n+4b_n+x(a_n+b_n)$

$=(1+x)a_n+(4+x)b_n$

よって，$a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ とすると

$(1+x)a_n+(4+x)b_n=ya_n+xyb_n$

これがすべての n について成り立つための条件は　$1+x=y$，$4+x=xy$

これを解くと　$(x,\ y)=(2,\ 3)$，$(-2,\ -1)$

(2) (1) から　$a_{n+1}+2b_{n+1}=3(a_n+2b_n)$，$a_1+2b_1=3$；

$a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)$，$a_1-2b_1=-1$

よって，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列；

数列 $\{a_n-2b_n\}$ は初項 -1，公比 -1 の等比数列。

ゆえに　$a_n+2b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$ ……①，$a_n-2b_n=-(-1)^{n-1}=(-1)^n$ ……②

(①＋②)÷2 から　$a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}$　(①－②)÷4 から　$b_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}$

$\boxed{20}$

(1) ある自然数 n について $a_{n+1}=3$ とすると，条件式から

$a_n-9=3(a_n-5)$　ゆえに　$a_n=3$

よって　$a_{n+1}=a_n=a_{n-1}=\cdots\cdots=a_1=3$　これは条件 $a_1=1$ に反する。

ゆえに，$a_{n+1}=3$ を満たす自然数 n はない。

また　$a_1\neq3$

したがって，すべての自然数 n に対して $a_n\neq3$ である。

(2) $a_{n+1}-3=\dfrac{a_n-9}{a_n-5}-3$ から　$a_{n+1}-3=-\dfrac{2(a_n-3)}{a_n-5}$

(1) より $a_n\neq3$ であるから，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}-3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-5}{a_n-3}\quad よって\quad \frac{1}{a_{n+1}-3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n-3}$$

ゆえに　$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{2}$　また　$b_1=\dfrac{1}{a_1-3}=-\dfrac{1}{2}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $-\dfrac{1}{2}$，公差 $-\dfrac{1}{2}$ の等差数列で

$$b_n=-\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{n}{2}$$

したがって　$a_n=3+\dfrac{1}{b_n}=3-\dfrac{2}{n}$