$\boxed{1}$

(解説)

(1)　放物線 $y=f(x)$ が直線 $y=-4x+4$ に接しているから，方程式

$$a(x-b)^2=-4x+4 \quad \text{すなわち} \quad ax^2-2(ab-2)x+ab^2-4=0$$

は重解をもつ。判別式を D とすると $D=0$ であるから

$$\frac{D}{4}=\{-(ab-2)\}^2-a(ab^2-4)=-4ab+4a+4=0$$

整理すると　$ab=a+1$　　$a>0$ であるから　$b=1+\dfrac{1}{a}$

(2)　(1) より，$f(x)=a\left\{x-\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\right\}^2$

よって，$y=f(x)$ のグラフの軸の方程式は　$x=1+\dfrac{1}{a}$

$a>0$ であるから　$1+\dfrac{1}{a}>1$

[1]　$1<1+\dfrac{1}{a}\leqq 2$　すなわち　$a\geqq 1$ のとき

図 [1] より　$M(a)=f(0)=a+\dfrac{1}{a}+2$

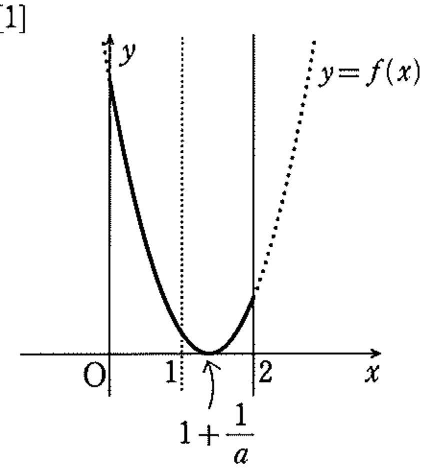
$$m(a)=f\left(1+\frac{1}{a}\right)=0$$

[2]　$2<1+\dfrac{1}{a}$　すなわち　$0<a<1$ のとき

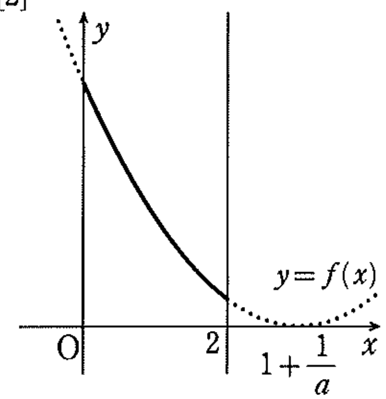
図 [2] より　$M(a)=f(0)=a+\dfrac{1}{a}+2$

$$m(a)=f(2)=a+\frac{1}{a}-2$$

[1]



[2]



[1], [2] から　$M(a)=a+\dfrac{1}{a}+2$

$$m(a)=\begin{cases} a+\dfrac{1}{a}-2 & (0<a<1) \\ 0 & (a\geqq 1) \end{cases}$$

(3)　(2) より　$M(a)=a+\dfrac{1}{a}+2$

$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$M(a)=a+\frac{1}{a}+2\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}+2=4$$

等号は $a=\dfrac{1}{a}$　すなわち　$a=1$ のとき成り立つ。

よって，$M(a)$ は $a=1$ のとき最小値 4 をとる。

2

解説

(1) 与えられた命題の対偶は,

「a, b がともに 3 の倍数でないならば, ab は 3 の倍数でない」

k, l を 0 以上の整数とすると, a, b がともに 3 の倍数でないのは, 次の [1]～[4] のいずれかの場合である。

[1] $a=3k+1$, $b=3l+1$ のとき

$$ab=(3k+1)(3l+1)=3(3kl+k+l)+1$$

[2] $a=3k+1$, $b=3l+2$ のとき

$$ab=(3k+1)(3l+2)=3(3kl+2k+l)+2$$

[3] $a=3k+2$, $b=3l+1$ のとき

$$ab=(3k+2)(3l+1)=3(3kl+k+2l)+2$$

[4] $a=3k+2$, $b=3l+2$ のとき

$$ab=(3k+2)(3l+2)=3(3kl+2k+2l+1)+1$$

よって, [1]～[4] のいずれの場合も ab は 3 の倍数でない。

したがって, 対偶が真であるから, もとの命題は真である。

(2) ab が 3 の倍数であるから, (1) より a または b は 3 の倍数である。

a が 3 の倍数のとき $b=(a+b)-a$ より, b は 3 の倍数である。

b が 3 の倍数のとき $a=(a+b)-b$ より, a は 3 の倍数である。

したがって, $a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき, a, b はともに 3 の倍数である。

(3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ から $\qquad 2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$

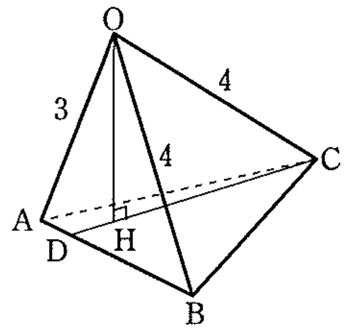
$a+b$, a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるから, $2ab$ は 3 の倍数である。

2 と 3 は互いに素であるから, ab は 3 の倍数である。

よって, $a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるから, (2) より, a と b はともに 3 の倍数である。

3

解説



(1) H は平面 ABC 上にあるから

$$r+s+t=1 \quad \cdots\cdots ①$$

また, OH⊥平面 ABC であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0 \quad \cdots\cdots ③$$

ここで $\quad |\vec{a}|^2=9$, $|\vec{b}|^2=16$, $|\vec{c}|^2=16$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=6,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=8,\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=4\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=6$$

② から $\quad -r|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2+(r-s)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ゆえに $\quad -3r+10s+2t=0 \quad \cdots\cdots ④$

③ から $\quad -s|\vec{b}|^2+t|\vec{c}|^2-r\vec{a}\cdot\vec{b}+(s-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+r\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ゆえに $\quad -8s+8t=0 \quad \cdots\cdots ⑤$

①, ④, ⑤ を解いて $\qquad r=\dfrac{2}{3}$, $s=\dfrac{1}{6}$, $t=\dfrac{1}{6}$

(2) (1) より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}-\dfrac{5}{6}\vec{c}$

$$=\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}})+\frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}})+\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CO}}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{5}$$

ゆえに, 線分 AB を 1 : 4 に内分する点が D であり, $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表せるから, 線分 CD を 5 : 1 に内分する点が H である。

よって $\qquad$ CH : HD=5 : 1, AD : DB=1 : 4