$\boxed{1}$

(解説)

$1\leqq x\leqq 4$ のとき，$\log(x^2)=2\log x$ であるから

$$\int_1^4\sqrt{x}\log(x^2)dx=2\int_1^4\sqrt{x}\log x\,dx=2\int_1^4\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'\log x\,dx$$

$$=2\left\{\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x\right]_1^4-\int_1^4\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$

$$=2\left(\frac{32}{3}\log 2-\left[\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4\right)=2\left\{\frac{32}{3}\log 2-\left(\frac{4}{9}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{32}{3}\log 2-\frac{4\cdot 2^3-4}{9}\right)=\frac{64}{3}\log 2-\frac{56}{9}$$

$\boxed{2}$

(解説)

$t=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1$ とする。

このとき　$f(x)=t+\frac{1}{t}$

$-1\leqq x\leqq 1$ における $t=g(x)$ のとりうる値の範囲を求める。

$g(-x)=g(x)$ より，$g(x)$ は偶関数であるから，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲を考える。

$$g'(x)=-2xe^{-x^2}+\frac{1}{2}x=-2x\left(e^{-x^2}-\frac{1}{4}\right)$$

$0<e<4$ から，$0<x<1$ で　$e^{-x^2}-\frac{1}{4}>\frac{1}{e}-\frac{1}{4}>0$

よって　$g'(x)<0$

ゆえに，$g(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調に減少する。

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，t のとりうる値の範囲は　$g(1)\leqq t\leqq g(0)$

すなわち　$\frac{4+5e}{4e}\leqq t\leqq 2$

さらに，$h(t)=t+\frac{1}{t}$ とする。

t のとりうる値の範囲は，$1<\frac{4+5e}{4e}\leqq t\leqq 2$ から　$h'(t)=1-\frac{1}{t^2}>0$

よって，$h(t)$ は $\frac{4+5e}{4e}\leqq t\leqq 2$ で単調に増加する。

ゆえに　$h\left(\frac{4+5e}{4e}\right)\leqq h(t)\leqq h(2)$

ここで，$f(x)=t+\frac{1}{t}$ より　$h\left(\frac{4+5e}{4e}\right)\leqq f(x)\leqq h(2)$

また，$h\left(\frac{4+5e}{4e}\right)=\frac{4+5e}{4e}+\frac{4e}{4+5e}$，$h(2)=\frac{5}{2}$ から，$f(x)$ は最大値 $\frac{5}{2}$，最小値 $\frac{4+5e}{4e}+\frac{4e}{4+5e}$ をとる。

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$-x\neq 1$ であるから

$$\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{-(x\{1-(-x)^{n-1}\})}{1-(-x)}=\frac{-x-(-x)^n}{x+1}$$

よって　$(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}=(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\frac{-x-(-x)^n}{x+1}\right\}$

$$=(-1)^n\cdot\frac{1-(x+1)+x+(-x)^n}{x+1}$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{(-x)^n}{x+1}=\frac{x^n}{x+1}$$

したがって，$\frac{1}{2}x^n\leqq\frac{x^n}{x+1}\leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$ を示せばよい。

$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$\frac{x^n}{x+1}-\frac{1}{2}x^n=\frac{2x^n-x^n(x+1)}{2(x+1)}=\frac{x^n(1-x)}{2(x+1)}\geqq 0$

また　$\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)-\frac{x^n}{x+1}=\frac{2(x+1)x^n-x^{n+1}(x+1)-2x^n}{2(x+1)}=\frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{2(x+1)}$

$$=\frac{x^{n+1}(1-x)}{2(x+1)}\geqq 0$$

よって，与えられた不等式は成り立つ。

(2)　(1) より　$\int_0^1\frac{1}{2}x^n dx\leqq\int_0^1(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}dx\leqq\int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx$

ここで　$\int_0^1\frac{1}{2}x^n dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2(n+1)}$

$$\int_0^1(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}dx$$

$$=(-1)^n\left\{\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-1\right)dx-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{k-1}dx\right\}$$

$$=(-1)^n\left\{\Big[\log|x+1|-x\Big]_0^1-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1\right\}$$

$$=(-1)^n\left\{\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right\}=(-1)^n\left\{\log 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right\}$$

$$=(-1)^n(\log 2-a_n)$$

$$\int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}x^{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}$$

よって　$\frac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n(\log 2-a_n)\leqq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}$

各辺に $-n\,(<0)$ を掛けると　$-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{2(n+2)}\leqq(-1)^n n(a_n-\log 2)\leqq-\frac{n}{2(n+1)}$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{2(n+2)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right\}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n}{2(n+1)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=-\frac{1}{2}$$

したがって，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n-\log 2)=-\frac{1}{2}$

$\boxed{4}$

解説

(1) $\frac{dx}{dt}=\cos t$

$\frac{dy}{dt}=-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos t=\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{dx}{dt}=0$ のとき　$\cos t=0$　　$0\leqq t\leqq\pi$ から　$t=\frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{dt}=0$ のとき　$\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)=0$

$-\frac{\pi}{6}\leqq 2t-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{11}{6}\pi$ から　$2t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

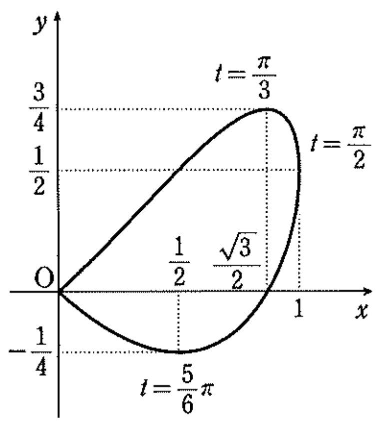
よって　$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって，$\frac{dx}{dt}=0$ または $\frac{dy}{dt}=0$ となる t の値は　$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi$

(2) $0\leqq t\leqq\pi$ における，t の値の変化に対応した x，y の値の変化は次の表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	/	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/
x	0	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	$\frac{1}{2}$	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$	/	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	/
y	0	$\uparrow$	$\frac{3}{4}$	$\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$\downarrow$	$-\frac{1}{4}$	$\uparrow$	0

よって，曲線 C の概形は次のようになる。



(3) $y=0$ のとき　$\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t=0$

よって　$\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)=0$ または $\sin t=0$

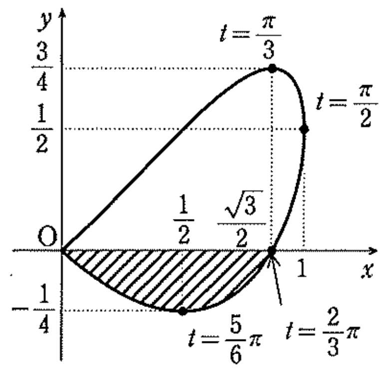
$0\leqq t\leqq\pi$，$-\frac{\pi}{6}\leqq t-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$ であるから

$t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ または $t=0,\ \pi$

すなわち　$t=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

$t=0,\ \pi$ のとき $x=0$，$t=\frac{2}{3}\pi$ のとき $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

であるから，求める面積は右の図の斜線部分の面積である。



したがって

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(-y)dx=-\int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left\{\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$