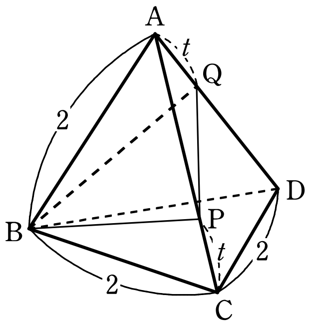
$\boxed{1}$

t は実数で $0<t<2$ とする。図のように，1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の辺 AC 上に点 P があり，辺 AD 上に点 Q がある。
CP＝AQ＝t のとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 BP，PQ，QB の長さを，それぞれ t を用いて表せ。

(2)　三角錐 ABPQ の体積を t を用いて表せ。

(3)　t が $0<t<2$ の範囲を変化するとき，三角錐 ABPQ の体積の最大値を求めよ。



解答　(1)　$\mathrm{BP}=\sqrt{t^2-2t+4}$，$\mathrm{PQ}=\sqrt{3t^2-6t+4}$，$\mathrm{QB}=\sqrt{t^2-2t+4}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{2}}{6}t(2-t)$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

解説

(1)　△PBC において，余弦定理により

$$\mathrm{BP}^2=2^2+t^2-2\cdot 2t\cos 60^\circ=t^2-2t+4$$

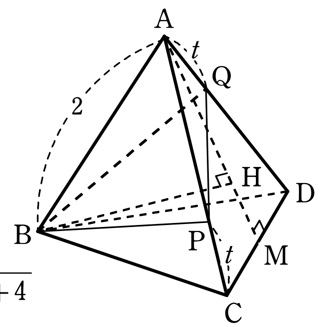
よって　$\mathrm{BP}=\sqrt{t^2-2t+4}$

△APQ において，余弦定理により

$$\mathrm{PQ}^2=t^2+(2-t)^2-2t(2-t)\cos 60^\circ=3t^2-6t+4$$

よって　$\mathrm{PQ}=\sqrt{3t^2-6t+4}$

また，△QBA≡△PBC であるから　$\mathrm{QB}=\mathrm{PB}=\sqrt{t^2-2t+4}$



(2)　三角錐 ABPQ の体積を V，△APQ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}t(2-t)$$

正四面体 ABCD の頂点 B から △ACD に下ろした垂線を BH とすると，H は △ACD の重心である。

ゆえに，線分 CD の中点を M とすると　$\mathrm{AH}=\dfrac{2}{3}\mathrm{AM}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

よって　$\mathrm{BH}=\sqrt{\mathrm{BA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

したがって　$V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot\mathrm{BH}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}t(2-t)\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}t(2-t)$

(3)　(2) の結果より　$V=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\{-(t-1)^2+1\}$

$0<t<2$ より，V は $t=1$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ をとる。

$\boxed{2}$

辺 AB，辺 BC，辺 CA の長さがそれぞれ 12，11，10 の △ABC を考える。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

解答　$3\sqrt{10}$

解説

AD は ∠A の二等分線であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}:\mathrm{DC}&=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}\\&=12:10\\&=6:5\end{aligned}$$

よって，BC＝11 より　$\mathrm{BD}=11\times\dfrac{6}{6+5}=6$

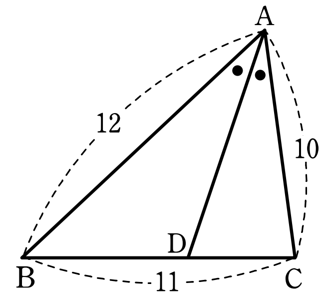
△ABC において，余弦定理により

$$\cos B=\frac{12^2+11^2-10^2}{2\cdot 12\cdot 11}=\frac{165}{2\cdot 12\cdot 11}=\frac{5}{8}$$

△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{AD}^2=12^2+6^2-2\cdot 12\cdot 6\cos B=90$$

AD＞0 であるから　$\mathrm{AD}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$



$\boxed{3}$

AB＝AC，BC＝10 を満たす二等辺三角形 ABC の内心を I，内接円の半径を $\sqrt{5}$ とする。

(1) 線分 BI の長さを求めよ。

(2) 点 P を BP＝BI，IP＝$2\sqrt{5}$ を満たすようにとる。cos∠IBP の値を求めよ。

(3) 辺 AB の長さを求めよ。

解答 (1) $\sqrt{30}$ (2) $\dfrac{2}{3}$ (3) $\dfrac{15}{2}$

解説

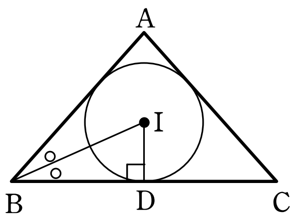
(1) BC は二等辺三角形 ABC の底辺であるから，

内接円と辺 BC の接点を D とすると

$$\mathrm{BD}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=5$$

△IBD は直角三角形であるから

$$\mathrm{BI}=\sqrt{\mathrm{BD}^2+\mathrm{DI}^2}=\sqrt{5^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{30}$$



(2) BP＝BI＝$\sqrt{30}$，IP＝$2\sqrt{5}$ から，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{IBP}=\frac{(\sqrt{30})^2+(\sqrt{30})^2-(2\sqrt{5})^2}{2\sqrt{30}\cdot\sqrt{30}}=\frac{2}{3}$$

(3) 線分 IP の中点を M とすると　IM＝$\sqrt{5}$

よって，M は内接円 I 上の点である。

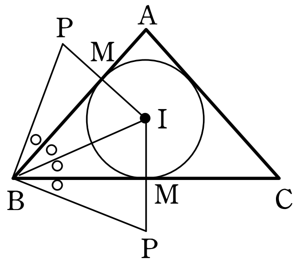
さらに，△IBP は BP＝BI の二等辺三角形であるから

$$\mathrm{BM}\perp\mathrm{IP}$$

よって，M は △ABC の内接円と辺 AB または辺 BC との接点である。

∠PBM＝∠IBMであり，BI は ∠ABC を 2 等分するから

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{IBP}$$



よって　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\dfrac{\mathrm{BM}}{\cos\angle\mathrm{ABC}}=5\div\dfrac{2}{3}=\dfrac{15}{2}$

$\boxed{4}$

a を正の実数とする。

(1) 3 辺の長さが a，$a+2$，$2a+1$ である三角形が存在するような a の範囲を求めよ。

(2) 3 辺の長さが a，$a+2$，$2a+1$ である三角形が存在し，それが鋭角三角形であるような a の範囲を求めよ。

解答 (1) $a>\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解説

(1) 三角形の成立条件から

$a<(a+2)+(2a+1)$ ……①

$a+2<(2a+1)+a$ ……②

$2a+1<a+(a+2)$ ……③

① から　$-\dfrac{3}{2}<a$ ……①′

② から　$\dfrac{1}{2}<a$ ……②′

③ は常に成り立つ。

①′，②′ の共通範囲を求めて　$a>\dfrac{1}{2}$

(2) 3 辺の長さが x，y，z の三角形について，

長さが x の辺の対角の大きさを θ とおくと，余弦定理から　$\cos\theta=\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$

θ が鋭角であるための条件は　$\cos\theta>0$　すなわち　$y^2+z^2-x^2>0$

3 辺の長さが a，$a+2$，$2a+1$ である三角形が存在するには，(1) から $a>\dfrac{1}{2}$ でなければならない。

このもとで，この三角形が鋭角三角形であるための条件は，すべての内角が鋭角であること，すなわち

$a^2+(a+2)^2-(2a+1)^2>0$ ……④

$(a+2)^2+(2a+1)^2-a^2>0$ ……⑤

$(2a+1)^2+a^2-(a+2)^2>0$ ……⑥

④ から　$-2a^2+3>0$

よって　$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ……④′

⑤ から　$4(a+1)^2+1>0$

これは常に成り立つ。

⑥ から　$4a^2-3>0$

よって　$a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<a$ ……⑥′

$a>\dfrac{1}{2}$ と ④′，⑥′ の共通範囲を求めて　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

1

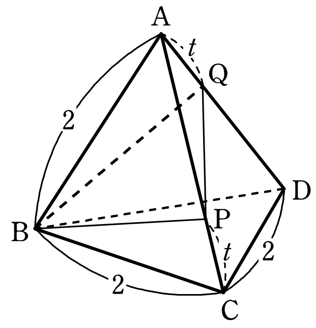
t は実数で $0<t<2$ とする。図のように，1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の辺 AC 上に点 P があり，辺 AD 上に点 Q がある。

CP＝AQ＝t のとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 BP，PQ，QB の長さを，それぞれ t を用いて表せ。

(2)　三角錐 ABPQ の体積を t を用いて表せ。

(3)　t が $0<t<2$ の範囲を変化するとき，三角錐 ABPQ の体積の最大値を求めよ。



2

辺 AB，辺 BC，辺 CA の長さがそれぞれ 12，11，10 の △ABC を考える。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

$\boxed{3}$

AB＝AC，BC＝10 を満たす二等辺三角形 ABC の内心を I，内接円の半径を $\sqrt{5}$ とする。

(1) 線分 BI の長さを求めよ。

(2) 点 P を BP＝BI，IP＝$2\sqrt{5}$ を満たすようにとる。$\cos\angle\mathrm{IBP}$ の値を求めよ。

(3) 辺 AB の長さを求めよ。

$\boxed{4}$

a を正の実数とする。

(1) 3 辺の長さが a，$a+2$，$2a+1$ である三角形が存在するような a の範囲を求めよ。

(2) 3 辺の長さが a，$a+2$，$2a+1$ である三角形が存在し，それが鋭角三角形であるような a の範囲を求めよ。