

**1** [2017 大阪大]

次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  がある。

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 8a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $b_n = \log_2 a_n$  とおく。  $b_{n+1}$  を  $b_n$  を用いて表せ。
- (2) 数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3)  $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$  とおく。数列  $\{P_n\}$  の一般項を求めよ。
- (4)  $P_n > 10^{100}$  となる最小の自然数  $n$  を求めよ。

**2** [2017 京都大]

$n$  を自然数とする。  $n$  個の箱すべてに  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{3}$ ,  $\boxed{4}$ ,  $\boxed{5}$  の5種類のカードがそれぞれ1枚ずつ計5枚入っている。おのおのの箱から1枚ずつカードを取り出し、取り出した順に左から並べて  $n$  桁の数  $X$  を作る。このとき、 $X$  が3で割り切れる確率を求めよ。

**3** [2017 神戸大]

次の2つの条件を満たす  $x$  の2次式  $f(x)$  を考える。

(i)  $y = f(x)$  のグラフは点  $(1, 4)$  を通る。

(ii)  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 15$

- (1)  $f(x)$  の1次の項の係数を求めよ。
- (2) 2次方程式  $f(x) = 0$  の2つの解を  $\alpha$ ,  $\beta$  とするとき、 $\alpha$  と  $\beta$  の満たす関係式を求めよ。
- (3) (2)における  $\alpha$ ,  $\beta$  がともに正の整数となるような  $f(x)$  をすべて求めよ。

4 [2017 北海道大]

関数  $f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の  $0 \leq x \leq 2\pi$  における増減を調べ、最大値と最小値を求めよ。
- (2)  $f(x)$  の不定積分を求めよ。
- (3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

5 [2017 東京大]

$k$  を実数とし、座標平面上で次の2つの放物線  $C$ ,  $D$  の共通接線について考える。

$$C: y = x^2 + k$$

$$D: x = y^2 + k$$

- (1) 直線  $y = ax + b$  が共通接線であるとき、 $a$  を用いて  $k$  と  $b$  を表せ。ただし  $a \neq -1$  とする。
- (2) 傾きが2の共通接線が存在するように  $k$  の値を定める。このとき、共通接線が3本存在することを示し、それらの傾きと  $y$  切片を求めよ。