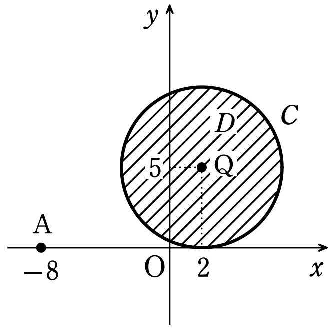
$\boxed{1}$

解説

(1)　不等式を変形すると　　$(x-2)^2+(y-5)^2 \leqq 25$

よって，領域 D は中心が点 (ア2，イ5)，半径がウ5 の円の周および内部である。(エ ③)
以下，点 (2，5) を Q とし，方程式 $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ の表す図形を C とする。

(2)　(i)　(1) により，領域 D は右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。
右の図から，直線 $y=$ オ0 は点 A を通る C の接線の 1 つとなることがわかる。



点 A を通り，傾きが k の直線を ℓ とする。

(ii)　直線 ℓ の方程式 $y=k(x+8)$ を円 C の方程式に代入して整理すると，x についての 2 次方程式

$$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$$

が得られる。

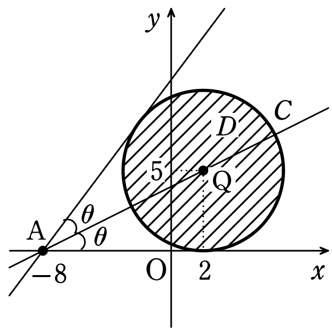
この方程式が重解をもつときの k の値が接線の傾きとなる。(カ ⓪)

参考　実際には，直線 ℓ の方程式を円 C の方程式に代入して計算する必要があるが，問題文で与えられているため，共通テストでは省略してよい。

(iii)　x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta=\frac{5}{2-(-8)}=\frac{5}{10}=\frac{{}^{キ}1}{{}^{ク}2}$$

であり，直線 $y=0$ と異なる接線の傾きは $\tan 2\theta$ と表すことができる。(ケ ①)



(iv)　点 A を通る C の接線のうち，直線 $y=0$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。

(太郎さんの考え方)

$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$ の判別式を D_1 とすると

$$\begin{aligned}\frac{D_1}{4}&=(8k^2-5k-2)^2-(k^2+1)(64k^2-80k+4)\\&=(64k^4+25k^2+4-80k^3+20k-32k^2)\\&\qquad-(64k^4-80k^3+4k^2+64k^2-80k+4)\\&=(64k^4-80k^3-7k^2+20k+4)-(64k^4-80k^3+68k^2-80k+4)\\&=(-7k^2+20k)-(68k^2-80k)\\&=-75k^2+100k=-25k(3k-4)\end{aligned}$$

重解をもつとき $D_1=0$ であるから　　$k=0,\ \dfrac{4}{3}$

$k_0 \neq 0$ であるから　　$k_0=\dfrac{{}^{コ}4}{{}^{サ}3}$

補足　太郎さんの考え方は2次方程式の導出も含めると計算が大変である。共通テストでは以下の花子さんの考え方で求めればよい。

(花子さんの考え方)

$$k_0=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{{}^{コ}4}{{}_{サ}3}$$

直線 ℓ と領域 D が共有点をもつような傾き k の値の範囲は $0\leqq k\leqq k_0$ である。(シ ⑤)

別解　(k_0 の求め方)

$y=k(x+8)$ から　　$kx-y+8k=0$

この直線が C と接するとき　　$\dfrac{|k\cdot 2-5+8k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=5$

すなわち　$\dfrac{|10k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=5$　　　よって　$|2k-1|=\sqrt{k^2+1}$

両辺を2乗すると　　$4k^2-4k+1=k^2+1$

整理すると　　$3k^2-4k=0$　　　すなわち　$k(3k-4)=0$

よって　　$k=0,\ \dfrac{4}{3}$　　　　　$k_0\fallingdotseq 0$ であるから　$k_0=\dfrac{4}{3}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $\log_3 9=\log_3 3^2={}^{ア}2$

$\log_{\frac{1}{4}}x=-\dfrac{3}{2}$ とすると　　$x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=(2^{-2})^{-\frac{3}{2}}=2^{-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=2^3={}^{イ}8$

(2) $\log_a b=t$ ……① とおく。

①から　　$a^t=b$　(^{ウ} ①)

よって　　$a=b^{\frac{1}{t}}$　(^{エ} ①)

したがって，$\log_b a=\dfrac{1}{t}$ ……② が成り立つことがわかる。

(3) $t>\dfrac{1}{t}$ ……③ を満たす t $(t\neq 0)$ の値の範囲は　　$-1<t<0,\ 1<t$

$\log_a b>\log_b a$ ……④ を満たす実数 b $(b>0,\ b\neq 1)$ の値の範囲について考える。

(2) の結果により，$\log_a b=t$ とおくと，④ は　　$t>\dfrac{1}{t}$

よって　　$-1<t<0,\ 1<t$

ゆえに　　$-1<\log_a b<0,\ 1<\log_a b$

すなわち　$\log_a \dfrac{1}{a}<\log_a b<\log_a 1,\ \log_a a<\log_a b$

$a>1$ のとき　　$\dfrac{1}{a}<b<1,\ a<b$　(^{オ} ③)

$0<a<1$ のとき　$\dfrac{1}{a}>b>1,\ a>b$　　　よって　　$0<b<a,\ 1<b<\dfrac{1}{a}$　(^{カ} ⓪)

(4) まず，$\log_p q$ と $\log_q p$ の大小について考える。

$0<p<1,\ q>1$ であるから，$1<q<\dfrac{1}{p}$ が成り立つかどうかを調べる。

$\dfrac{1}{p}-q=\dfrac{13}{12}-\dfrac{12}{11}=\dfrac{13\times 11-12^2}{12\times 11}=\dfrac{143-144}{12\times 13}<0$

$1<q<\dfrac{1}{p}$ が成り立たないから，$\log_p q>\log_q p$ は成り立たない。

よって　　$\log_p q<\log_q p$

次に，$\log_p r$ と $\log_r p$ の大小について考える。

$0<p<1,\ r>1$ であるから，$1<r<\dfrac{1}{p}$ が成り立つかどうかを調べる。

$\dfrac{1}{p}-r=\dfrac{13}{12}-\dfrac{14}{13}=\dfrac{13^2-14\times 12}{12\times 13}=\dfrac{169-168}{12\times 13}>0$

$1<r<\dfrac{1}{p}$ が成り立つから，$\log_p r>\log_r p$ は成り立つ。

以上から　　$\log_p q<\log_q p$ かつ $\log_p r>\log_r p$　(^{キ} ②)

参考　$\dfrac{1}{p}$ と q，$\dfrac{1}{p}$ と r の大小は次のようにして調べることもできる。

$\dfrac{1}{p}-q=\dfrac{13}{12}-\dfrac{12}{11}=\left(1+\dfrac{1}{12}\right)-\left(1+\dfrac{1}{11}\right)=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{11}<0$

$\dfrac{1}{p}-r=\dfrac{13}{12}-\dfrac{14}{13}=\left(1+\dfrac{1}{12}\right)-\left(1+\dfrac{1}{13}\right)=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{13}>0$

$\boxed{3}$

解説

(1) $f(x)=x^3-6ax+16$ から　　$f'(x)=3x^2-6a$

$a=0$ のとき　$f'(x)=3x^2\geqq 0$

$f(x)$ は常に増加し，$x=0$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の傾きは 0 であるから，

グラフの概形は　ア ①

$a<0$ のとき　$f'(x)=3x^2-6a>0$

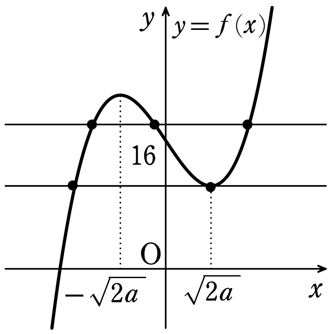
$f(x)$ は常に増加するから，グラフの概形は　イ ⓪

(2) $a>0$ のとき，$f'(x)=0$ とすると　　$3x^2-6a=0$

よって　　$x=\pm\sqrt{2a}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2a}$	$\cdots$	$\sqrt{2a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。

また　$f(-\sqrt{2a})=-2a\sqrt{2a}+6a\sqrt{2a}+16$

$=4a\sqrt{2a}+16=4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

$f(\sqrt{2a})=2a\sqrt{2a}-6a\sqrt{2a}+16$

$=-4a\sqrt{2a}+16=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

よって，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲は

$$-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16<p<4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16 \qquad (^{ウ}③,\ ^{エ}②)$$

$p=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ は 2 個の共有点をもつ。

このとき　　$x^3-6ax+16=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

すなわち　　$x^3-6ax+4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}=0$

この方程式が $x=\sqrt{2a}$ を重解にもつことに着目して，左辺を因数分解すると

$(x-\sqrt{2a})^2(x+2\sqrt{2a})=0$

よって　　$x=\sqrt{2a}$，$-2\sqrt{2a}$

したがって　　$q={}^{オカ}-2\sqrt{{}^{キ}2}\,a^{\frac{1}{2}}$，$r=\sqrt{{}^{ク}2}\,a^{\frac{1}{2}}$

(3) 方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数 n は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の個数に一致する。

(1) により，$a\leqq 0$ のとき　　$n=1$

(2) により，$a>0$ のとき極小値 $-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$ は a の値によって，正，0，負いずれの場合もあるから　　$n=1$，2，3

よって，$n=1$ ならば　a はすべての実数

$n=2$ ならば　$a>0$

$n=3$ ならば　$a>0$

⓪　$n=1$ であっても $a=0$ や $a>0$ の場合があるから，正しくない。

①　正しい。

②　$n=2$ ならば $a>0$ であるから，正しくない。

③　$a<0$ ならば $n=1$ であるから，正しくない。

④　正しい。

⑤　$a>0$ であっても $n=1$，2 となる場合もあるから，正しくない。

以上から，正しいものは　ケ①，コ④　（またはケ④，コ①）

$\boxed{4}$

(解説)

$g(x)-h(x)=x^3-3bx+3b^2-(x^3-x^2+b^2)$

$=x^2-3bx+2b^2=(x-b)(x-2b)$

よって，C_1 と C_2 の交点の x 座標は　$x=b,\ 2b$

$b>0$，$\alpha<\beta$ であるから　$\alpha={}^{ア}b$，$\beta={}^{イウ}2b$

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また，$t>\beta$ とし，

$\beta\leqq x\leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を T とする。

$b\leqq x\leqq 2b$ のとき $(x-b)(x-2b)\leqq 0$ であるから　$g(x)\leqq h(x)$

$2b\leqq x$ のとき $(x-b)(x-2b)\geqq 0$ であるから　$g(x)\geqq h(x)$

したがって　$S=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx$　(エ ②)

$T=\int_\beta^t\{g(x)-h(x)\}dx$　(オ ①)

$$S-T=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx-\int_\beta^t\{g(x)-h(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx+\int_\beta^t\{h(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^t\{h(x)-g(x)\}dx\quad(カ ②)$$

よって　$S-T=\int_b^t\{h(x)-g(x)\}dx=-\int_b^t(x^2-3bx+2b^2)dx$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}bx^2+2b^2x\right]_b^t$$

$$=-\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}bt^2+2b^2t\right)+\left(\frac{1}{3}b^3-\frac{3}{2}b^3+2b^3\right)$$

$$=-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}bt^2-2b^2t+\frac{5}{6}b^3$$

$$=\frac{{}^{キク}-1}{{}^{ケ}6}(2t^3-{}^{コ}9bt^2+{}^{サシ}12b^2t-{}^{ス}5b^3)$$

$S=T$ となるのは $S-T=0$ のときであるから

$$2t^3-9bt^2+12b^2t-5b^3=0$$

左辺を $P(t)$ とおくと　$P(b)=2b^3-9b^3+12b^3-5b^3=0$

ゆえに，$P(t)$ は $t-b$ を因数にもつ。

よって　$P(t)=(t-b)(2t^2-7bt+5b^2)=(t-b)^2(2t-5b)$

$t>2b$ であるから　$t=\frac{{}^{セ}5}{{}^{ソ}2}b$

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　x，y を自然数とすると，求める順列の総数は，$x+y=30$ の解の組の個数である。

x，y は自然数であるから，

$$(x,\ y)=(1,\ 29),\ (2,\ 28),\ \cdots\cdots,\ (29,\ 1)$$

の 29 組が解である。

よって　　29 通り

(2)　x，y，z を自然数とすると，求める順列の総数は，$x+y+z=30$ の解の組の個数である。

ここで，○ を 30 個並べて，○ と ○ の間の 29 か所から 2 つ選んで仕切りを入れ

$$\mathrm{A}\ |\ \mathrm{B}\ |\ \mathrm{C}$$

としたときの，A，B，C の部分にある ○ の数をそれぞれ x，y，z とすると，解の組が 1 つ定まる。

よって，求める順列の総数は　　${}_{29}\mathrm{C}_2=\dfrac{29\cdot 28}{2\cdot 1}=406$ (通り)

(3)　$x+y+z=30$ (x，y，z は自然数) の解の組合せの総数を求める。

[1]　$x=y=z$ のとき

$x+y+z=30$ から　　$3x=30$

よって，$x=10$ であり，$(x,\ y,\ z)=(10,\ 10,\ 10)$ の 1 通り。

[2]　x，y，z のうち 2 つだけが等しいとき

$x=y$ とすると　　$2x+z=30$

x，z は自然数であるから　　$(x,\ z)=(1,\ 28),\ (2,\ 26),\ \cdots\cdots,\ (14,\ 2)$

このうち，$(x,\ z)=(10,\ 10)$ は $x=y=z$ となるから，これを除外して　　13 通り

$y=z$，$z=x$ の場合も 13 通りずつあるが，これらの中には同じものが 3 通りずつあるから　　$\dfrac{13\times 3}{3}=13$ (通り)

[3]　x，y，z がすべて異なるとき

まず，x，y，z を区別すると，(2) と [1]，[2] から　　$406-(1+13\times 3)=366$ (通り)

ここで，x，y，z の区別をなくすと，同じものが $3!$ 通りずつあるから

$$\frac{366}{3!}=61 \text{ (通り)}$$

[1] ～ [3] より，求める組合せの総数は　　$1+13+61=75$ (通り)

$\boxed{6}$

(解説)

n 回の目の出方は全部で 6^n 通りあり，これらは同様に確からしい。

X_1，X_2，……，X_n の最大公約数を d_n とする。

(1)　$d_n=3$ となるのは，

X_1，X_2，……，X_n がすべて 3，6 のいずれかであり，かつ，X_1，X_2，……，X_n のうち少なくとも 1 つは 3

のときである。

よって，$d_n=3$ となるような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ の総数は (2^n-1) 通りであり，求める確率は　$\dfrac{2^n-1}{6^n}$

(2)　X_1，X_2，……，X_n はすべて，1 以上 6 以下の整数であるから，d_n は 1 以上 6 以下の整数である。

$d_n=3$ となるような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ の総数は，(1) から　2^n-1 (通り)

$d_n=5$ となるのは，X_1，X_2，……，X_n がすべて 5 のときで，そのような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ の総数は　1 通り

$d_n=2$ または $d_n=4$ または $d_n=6$ となるのは，X_1，X_2，……，X_n がすべて 2 の倍数のときで，そのような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ の総数は　3^n 通り

ゆえに，$d_n=1$ となるような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ の総数は

$$6^n-(2^n-1+1+3^n)=6^n-3^n-2^n \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{6^n-3^n-2^n}{6^n}$

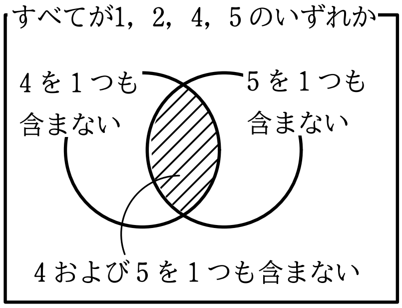
(3)　$20=2^2\times5$ から，X_1，X_2，……，X_n の最小公倍数が 20 となるのは，

X_1，X_2，……，X_n がすべて 1，2，4，5 のいずれかであり，かつ X_1，X_2，……，X_n のうち少なくとも 1 つは 4 で，かつ X_1，X_2，……，X_n のうち少なくとも 1 つは 5

のときである。

X_1，X_2，……，X_n がすべて 1，2，4，5 のいずれかであるような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ の総数は　4^n 通り

これらの 4^n 通りの組のうち，4 を 1 つも含まないような組は 3^n 通り，5 を 1 つも含まないような組は 3^n 通り，4 および 5 を 1 つも含まないような組は 2^n 通りある。



ゆえに，X_1，X_2，……，X_n の最小公倍数が 20 となるような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ の総数は　$4^n-(3^n+3^n-2^n)=4^n-2\cdot3^n+2^n$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{4^n-2\cdot3^n+2^n}{6^n}$

$\boxed{7}$

(解説)

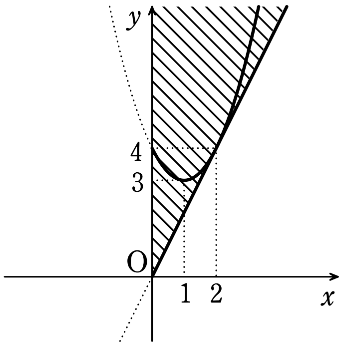
(1)　原点 O を通り，放物線に接する直線の方程式を $y=bx$ とする。

$y=x^2-2x+4$ と連立して y を消去すると，x の 2 次方程式 $x^2-2x+4=bx$ は $x \geqq 0$ の範囲に重解をもつ。

$x^2-2x+4=bx$ を整理すると　　$x^2-(b+2)x+4=0$　…… ①

2 次方程式 ① の判別式を D とすると　　$D=\{-(b+2)\}^2-4\cdot 1\cdot 4=(b-2)(b+6)$

2 次方程式 ① が $x \geqq 0$ の範囲に重解をもつための条件は，$D=0$ かつ 放物線 $y=x^2-(b+2)x+4$ の軸 $x=\dfrac{b+2}{2}$ について $\dfrac{b+2}{2} \geqq 0$ となることである。



$D=0$ から　　$b=2,\ -6$　…… ②

$\dfrac{b+2}{2} \geqq 0$ から　　$b \geqq -2$　…… ③

②，③ から　　$b=2$

このとき，重解は　　$x=2$

したがって，求める領域は $x \geqq 0$ かつ $y \geqq bx$，すなわち $b=2$ から $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 2x$ を同時に満たす点 $(x,\ y)$ の集合であり，図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。

別解　原点 O を通り，放物線に接する直線の方程式は次のように求めてもよい。

$y=x^2-2x+4$ を微分すると　　$y'=2x-2$

接点の座標を $(c,\ c^2-2c+4)\ (c>0)$ とすると，求める直線の方程式は

$$y-(c^2-2c+4)=(2c-2)(x-c)\qquad \text{すなわち}\qquad y=(2c-2)x-c^2+4$$

この直線が原点 O を通るから　　$0=-c^2+4$

これを解いて　　$c=\pm 2$

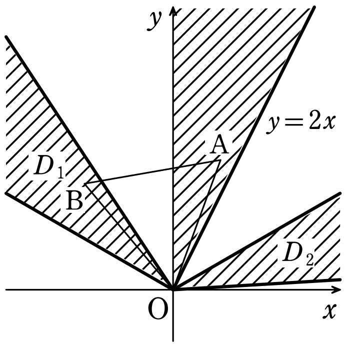
$c>0$ であるから　　$c=2$

このとき，求める直線の方程式は　　$y=2x$

(2)　3 点 O，A，B が正三角形の 3 頂点となるとき

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}\quad \text{かつ}\quad \angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$$

であるから，原点 O を中心に点 A を $\pm\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転すると点 B に一致する。



よって，原点 O を中心に半直線 OA を $\pm\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転すると直線 ℓ に一致する。

ここで，原点 O を中心に (1) で求めた領域を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した領域を D_1，原点 O を中心に (1) で求めた領域を $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した領域を D_2 とする。与えられた条件を満たすための条件は，領域 $D_1 \cup D_2$ と直線 ℓ が共有点をもつことである。

また，$\tan\alpha=2\left(\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

[1]　D_1 について

原点 O を中心に y 軸を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した直線の傾きは

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

原点 O を中心に直線 $y=2x$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した直線の傾きは

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})}{(1-2\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})}=-\frac{5\sqrt{3}+8}{11}$$

[2] D_2 について

原点 O を中心に y 軸を $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した直線の傾きは

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

原点 O を中心に直線 $y=2x$ を $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した直線の傾きは

$$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})}=\frac{5\sqrt{3}-8}{11}$$

[1]，[2] から，求める a の値の範囲は

$$-\frac{5\sqrt{3}+8}{11}\leqq a\leqq-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \frac{5\sqrt{3}-8}{11}\leqq a\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$$

注意 $\alpha>\frac{\pi}{3}$ より，$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\sqrt{3}-8}{11}>0$ であるから，$\frac{5\sqrt{3}-8}{11}>-\frac{\sqrt{3}}{3}$ は成り立つ。