確率　解説

1

解説

起こりうる場合は 12 個の玉から 3 個を取る組合せであるから，全部で ${}_{12}\mathrm{C}_3$ 通りあり，どの場合も同様に確からしい。

(1)　すべて赤玉が出る場合の数は　${}_5\mathrm{C}_3$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{22}$

(2)　赤玉 1 個と白玉 2 個が出る場合の数は　${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{22}$

(3)　どの色の玉も出るとは，赤玉，白玉，青玉が 1 個ずつ出るということである。

この場合の数は　${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{11}$

2

解説

異なる 6 文字を 1 列に並べる方法は　6! 通り

(1)　母音は U，A の 2 つであるから，両端の母音の並べ方は　2! 通り

そのおのおのに対して，他の 4 文字の並べ方は　4! 通り

したがって，両端が母音である並べ方は　2!×4! 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{2!\times4!}{6!}=\dfrac{1}{15}$

(2)　隣り合う 2 文字 S と Y を 1 文字と考え，この 1 文字と U，N，D，A の 5 文字の並べ方は　5! 通り

そのおのおのに対して，S と Y の並べ方は　2! 通り

したがって，S と Y が隣り合う並べ方は　5!×2! 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{5!\times2!}{6!}=\dfrac{1}{3}$

(3)　S が Y よりも左側にある並べ方は，S と Y を同じ文字 ○ とみなした 6 文字の順列で，左側の ○ を S，右側の ○ を Y にするとできるから　$\dfrac{6!}{2!}$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{6!}{2!}\div6!=\dfrac{1}{2}$

3

解説

4 人の手の出し方の総数は　3^4 通り

(1)　1 人だけが勝つ場合，勝者の決まり方は　4 通り

そのおのおのに対して，勝ち方がグー，チョキ，パーの 3 通りある。

よって，求める確率は　$\dfrac{4\times3}{3^4}=\dfrac{4}{27}$

(2)　2 人が勝つ場合，勝者の決まり方は　${}_4\mathrm{C}_2$ 通り

そのおのおのに対して，勝ち方がグー，チョキ，パーの 3 通りある。

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times3}{3^4}=\dfrac{6\times3}{3^4}=\dfrac{2}{9}$

(3)　あいこになるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　4 人とも同じ手を出す場合　3 通り

[2]　出る手が 3 種類の場合

手の組合せは｛グー，グー，チョキ，パー｝，｛グー，チョキ，チョキ，パー｝，｛グー，チョキ，パー，パー｝の 3 つの場合がある。

出す人を区別すると，どの場合も $\dfrac{4!}{2!}=12$ (通り) ずつあるから

$$12\times3=36 \text{ (通り)}$$

[1]，[2] から，あいこになる確率は　$\dfrac{3+36}{3^4}=\dfrac{13}{27}$

4

解説

ハートのカードの枚数を n $(2\leqq n\leqq9)$ とする。

カードを同時に 2 枚取り出すとき，2 枚ともハートである確率は　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}$

条件から　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{3}$　　すなわち　$\dfrac{n(n-1)}{10\cdot9}=\dfrac{1}{3}$

整理して　$n^2-n-30=0$　　よって　$(n+5)(n-6)=0$

$2\leqq n\leqq9$ であるから　$n=6$

したがって，ハートのカードの枚数は　6 枚

5

解説

10 本のくじから同時に 5 本引く場合の数は　${}_{10}\mathrm{C}_5$ 通り

当たりを 3 本以上引くという事象は，2 つの事象

A：当たりを 3 本引く　　B：当たりを 4 本引く

の和事象 $A\cup B$ であり，この 2 つの事象は互いに排反である。

$$P(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{60}{252},\quad P(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_4\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{6}{252}$$

よって，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{60}{252}+\frac{6}{252}=\frac{66}{252}=\frac{11}{42}$$

6

解説

男子 6 名，女子 8 名から 3 名を選ぶ方法は　${}_{14}\mathrm{C}_3$ 通り

「少なくとも 1 名の女子を選ぶ」という事象は，「3 名とも男子を選ぶ」という事象の余事象である。

3 名とも男子を選ぶ確率は　$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\dfrac{5}{91}$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{5}{91}=\dfrac{86}{91}$

7

解説

27 枚の中から 2 枚取り出す方法は　${}_{27}\mathrm{C}_2$ 通り

2 枚が同じ数字である事象を A，2 枚の数字の和が 5 以下である事象を B とする。

同じ数字の 2 枚を取り出す方法は　$9\times{}_3\mathrm{C}_2$ 通り

よって　$P(A)=\dfrac{9\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{27}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{13}$

2 枚の数字の和が 5 以下である数字の組合せは

(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，2)，(2，3)

よって　$P(B)=\dfrac{2\times{}_3\mathrm{C}_2+4\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{27}\mathrm{C}_2}=\dfrac{42}{351}=\dfrac{14}{117}$

2 枚が同じ数字で，かつ和が 5 以下となる確率は

$$P(A\cap B)=\frac{2\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{27}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{117}$$

ゆえに，求める確率は　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{13}+\frac{14}{117}-\frac{2}{117}=\frac{21}{117}=\frac{7}{39}$$

8

解説

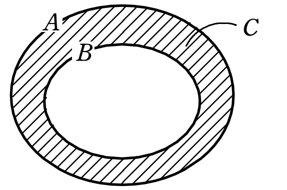
3 個のさいころを同時に投げる方法は，全部で　6^3 通り

(1)　出る目の最小値が 3 以上となるのは，3 個の目がすべて 3 以上のときである。

その場合の数は　4^3 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{4^3}{6^3}=\dfrac{8}{27}$

(2)　出る目の最小値が 3 以上であるという事象を A，最小値が 4 以上であるという事象を B，最小値が 3 であるという事象を C とすると



$$A=B\cup C$$

B と C は互いに排反であるから

$$P(A)=P(B)+P(C)$$

よって，求める確率は

$$P(C)=P(A)-P(B)=\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{64}{216}-\frac{27}{216}=\frac{37}{216}$$

9

解説

試行 S で白玉 1 個が取り出されたとき，試行 T では，白玉 2 個と赤玉 2 個から 1 個を取り出す。

試行 S で赤玉 1 個が取り出されたとき，試行 T では，白玉 3 個と赤玉 1 個から 1 個を取り出す。

したがって，試行 S の結果は試行 T の結果に影響を与えるから，S と T は独立でない。

$\boxed{10}$

(解説)

A が検定試験を受ける試行と，B が検定試験を受ける試行は独立である。

(1)　2 人とも合格する確率は　$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$

(2)　B が不合格になる確率は　$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

よって，A だけが合格する確率は　$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

(3)「少なくとも 1 人が合格する」という事象は,「2 人とも不合格になる」という事象の余事象である。

A が不合格になる確率は　$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

よって，2 人とも不合格になる確率は　$\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$

したがって，求める確率は　$1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$

$\boxed{11}$

(解説)

黒玉の個数が合わせて 2 個になるのは，次の [1]〜[3] のいずれかの場合で，これらの事象は互いに排反である。

[1]　A から黒玉 2 個，B から白玉 3 個を取り出す。

[2]　A から黒玉 1 個と白玉 1 個，B から黒玉 1 個と白玉 2 個を取り出す。

[3]　A から白玉 2 個，B から黒玉 2 個と白玉 1 個を取り出す。

[1] の確率は　$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{108}$

[2] の確率は　$\frac{{}_5C_1\cdot{}_4C_1}{{}_9C_2}\times\frac{{}_6C_1\cdot{}_4C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{18}{108}$

[3] の確率は　$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_6C_2\cdot{}_4C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{9}{108}$

よって，求める確率は　$\frac{1}{108}+\frac{18}{108}+\frac{9}{108}=\frac{28}{108}=\frac{7}{27}$

$\boxed{12}$

(解説)

(1)　さいころを 1 回投げて，2 以下の目が出る確率は　$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

よって，求める確率は　${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-2}={}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(2)　さいころを 1 回投げて，奇数の目が出る確率は　$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

3 回以上奇数の目が出るのは，3 回または 4 回奇数の目が出る場合であるから，その確率は　${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

(3)　さいころを 1 回投げて，5 の目が出る確率は　$\frac{1}{6}$

4 回目に 2 度目の 5 の目が出るのは，3 回目までに 5 がちょうど 1 回出て，4 回目に 2 度目の 5 が出る場合であるから，その確率は

$${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{25}{432}$$

$\boxed{13}$

(解説)

さいころを 1 回投げて，偶数の目が出る確率は　$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

奇数の目が出る確率は　$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

8 回のうち，偶数の目が r 回出るとすると，P の座標は

$$1\cdot r+(-1)(8-r)=2r-8$$

P の座標が 2 となるとき　$2r-8=2$　　これを解いて　$r=5$

よって，8 回のうち，偶数の目がちょうど 5 回出ればよい。

したがって，求める確率は　${}_8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=56\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32}$

$\boxed{14}$

(解説)

A が勝者になるのは，次の [1] 〜 [3] の場合がある。

[1]　3 連勝の場合

その確率は　${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

[2]　3 勝 1 敗の場合

3 ゲームまでに A が 2 回，B が 1 回勝ち，4 ゲーム目を A が勝てばよいから，その確率は　${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

[3]　3 勝 2 敗の場合

4 ゲームまでに A が 2 回，B が 2 回勝ち，5 ゲーム目を A が勝てばよいから，その確率は　${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$

これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$$

$\boxed{15}$

(解説)

選び出された 1 人の生徒が女子であるという事象を A，メガネをかけているという事象を B とすると

$$P(A)=\frac{7}{8+7}=\frac{7}{15},\quad P(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

よって，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{5}\div\frac{7}{15}=\frac{1}{5}\times\frac{15}{7}=\frac{3}{7}$$