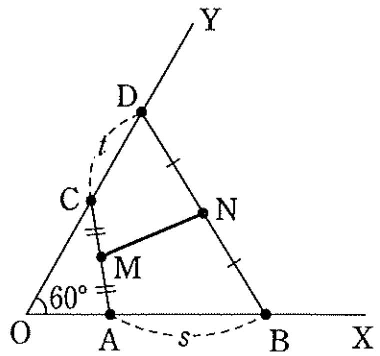
1

解説

(1) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$，　$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$



よって　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$$

ゆえに　$|\overrightarrow{MN}|^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|^2$

$$=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{CD}|^2)=\frac{1}{4}(s^2+2st\cos 60^\circ+t^2)$$

$$=\frac{1}{4}(s^2+st+t^2)$$

したがって　$MN=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

(2) $s^2+t^2=1$ であるから　$MN=\frac{1}{2}\sqrt{1+st}$

ここで，$s>0$，$t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1=s^2+t^2\geqq 2\sqrt{s^2t^2}\qquad \text{よって}\qquad st\leqq\frac{1}{2}$$

等号は，$s=t$ かつ $s^2+t^2=1$　すなわち　$s=t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき成り立つ。

したがって，MN の長さは $s=t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ をとる。

2

解説

時刻 1 で点 B，C，D に動く確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$

時刻 1 で点 B に動く場合，時刻 n までの間に 4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は

$$1-(\text{C または D に行かない確率})$$
$$=1-\{(\text{C に行かない確率})+(\text{D に行かない確率})-(\text{C にも D にも行かない確率})\}$$
$$=1-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

時刻 1 で点 C，D に動く場合も，時刻 n までの間に 4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は同じである。

以上から，求める確率は　$\frac{1}{3}\cdot\left\{1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\times 3=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\boxed{3}$

(解説)

$\sin x+\cos x=t$ とおく。

両辺を 2 乗すると　　$1+2\sin x\cos x=t^2$

よって　　$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

また　　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

与えられた方程式から

$$2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)+3\sin x\cos x=0$$

よって　　$2\sqrt{2}\,t\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)+3\cdot\dfrac{t^2-1}{2}=0$

整理すると　　$2\sqrt{2}\,t^3-3t^2-6\sqrt{2}\,t+3=0$

$f(t)=2\sqrt{2}\,t^3-3t^2-6\sqrt{2}\,t+3$ とおくと

$$f'(t)=6\sqrt{2}\,t^2-6t-6\sqrt{2}=6(\sqrt{2}\,t^2-t-\sqrt{2})$$
$$=6(\sqrt{2}\,t+1)(t-\sqrt{2})$$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	1	$\nearrow$	極大	$\searrow$	-7

$f(0)=3>0$，$f(1)=-4\sqrt{2}<0$ であるから，$f(t)=0$ となる t の値は $0<t<1$ の範囲に 1 つだけ存在する。

その値を α とすると，方程式を満たす x の個数は $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(0\leqq x<2\pi)$ のグラフと直線 $t=\alpha$ の共有点の個数に等しい。

したがって，求める x の個数は 2 である。