$\boxed{1}$ ［2016 北海道大］

解説

ひきだし A，B に入っているメダルをすべて区別する。

(1)　ひきだし A に入っているメダルの色の組は　　$3^3=27$ (通り)

このうち，ひきだし A に入っているメダルの色が 2 種類となるのは，3 枚のメダルがすべて同じ色である場合とすべて異なる場合を除いたものである。

ゆえに　　$27-(3+3!)=18$ (通り)

よって，求める確率は　　$\dfrac{18}{27}=\dfrac{2}{3}$

(2)　ひきだし B に入っているメダルの色の組は $2^2=4$ (通り) あるから，ひきだし A，B をあわせた 5 枚のメダルの色の組は　　$27\times4=108$ (通り)

ひきだし A，B をあわせた 5 枚のメダルの色が 2 種類となるのは，次の場合である。

[1]　5 枚のメダルの色が金，銀の 2 種類であるとき　　$2^5-2=30$ (通り)

[2]　5 枚のメダルの色が金，銅の 2 種類であるとき　　$(2^3-1)\cdot1^2=7$ (通り)

[3]　5 枚のメダルの色が銀，銅の 2 種類であるとき　　$(2^3-1)\cdot1^2=7$ (通り)

[1] ～ [3] から，求める確率は　　$\dfrac{30+7+7}{108}=\dfrac{11}{27}$

(3)　ひきだし A，B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っている確率を，ひきだし A に入っている金メダルの枚数で場合分けをして考える。

[1]　ひきだし A に入っている 3 枚のメダルの色がすべて金であるとき

ひきだし B に入っている 2 枚のメダルの色がともに銀であるから　　1 通り

[2]　ひきだし A に入っている 3 枚のメダルのうち，2 枚のメダルの色が金であるとき

ひきだし B に入っている 2 枚のメダルのうち 1 枚の色が金であるから

$${}_3C_2\cdot1^2\cdot2\cdot{}_2C_1\cdot1^2=12 \text{ (通り)}$$

[3]　ひきだし A に入っている 3 枚のメダルのうち，1 枚のメダルの色が金であるとき

ひきだし B に入っている 2 枚のメダルの色がともに金であるから

$${}_3C_1\cdot1\cdot2^2\cdot1^2=12 \text{ (通り)}$$

[1] ～ [3] から，ひきだし A，B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っている確率は

$$\frac{1+12+12}{108}=\frac{25}{108}$$

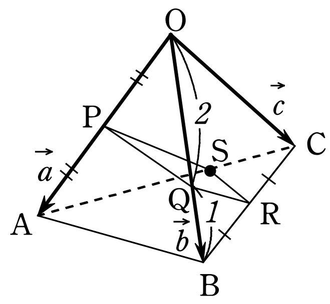
ひきだし A，B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていて，かつひきだし A のメダルの色が 2 種類となるのは，[2] のときと，[3] のうち金メダル以外の 2 枚のメダルの色が同じ色となるときである。

この確率は　$\dfrac{12+{}_3C_1\cdot1\cdot2\cdot1^2}{108}=\dfrac{18}{108}$

よって，求める確率は　$\dfrac{\dfrac{18}{108}}{\dfrac{25}{108}}=\dfrac{18}{25}$

$\boxed{2}$ [2016 神戸大]

(解説)



(1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

(2) 点 S は 3 点 P, Q, R を通る平面上にあるから

$$\overrightarrow{PS}=s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}\quad (s,\ t \text{ は実数})$$

と表される。(1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PS}\\&=\frac{1}{2}\vec{a}+s\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}s+\frac{1}{2}t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}t\vec{c}\quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

また，点 S は辺 AC 上にあるから，AS：SC$=u:(1-u)$ とすると

$$\overrightarrow{OS}=(1-u)\vec{a}+u\vec{c}\quad \cdots\cdots ②$$

と表される。

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，①，② より

$$\frac{1}{2}(1-s-t)=1-u\quad \cdots\cdots ③,\quad \frac{2}{3}s+\frac{1}{2}t=0\quad \cdots\cdots ④,\quad \frac{1}{2}t=u\quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤ から　$t=2u$　　よって，④ から　$s=-\frac{3}{2}u$

ゆえに，③ から　$1+\frac{3}{2}u-2u=2-2u$

これを解いて　$u=\frac{2}{3}$　　よって　$s=-1,\ t=\frac{4}{3}$

ゆえに　$|\overrightarrow{AS}|:|\overrightarrow{SC}|=\frac{2}{3}:\left(1-\frac{2}{3}\right)=2:1$

(3) $\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$

また，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{QS}|^2&=\frac{1}{3^2}|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=\frac{1}{9}\left(1^2+4\cdot1^2+4\cdot1^2-4\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{QS}|=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\boxed{3}$ [2016 京都大]

(解説)

ボタンを押して「はずれ」が表示される確率を p とする。

装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「当たり」の出る確率は 36 % であるから，余事象の確率を考えると　　$1-p^{20}=\dfrac{36}{100}$

よって　　$p^{20}=\dfrac{64}{100}$　　すなわち　　$p=\left(\dfrac{64}{100}\right)^{\frac{1}{20}}$　……①

装置のボタンを n 回押したとする。

このとき，1 回以上「当たり」の出る確率は　　$1-p^n$

よって，90 % 以上，すなわち $\dfrac{90}{100}$ 以上になるとすると　　$1-p^n \geqq \dfrac{90}{100}$

よって　　$p^n \leqq \dfrac{1}{10}$

両辺の常用対数をとると　　$n\log_{10}p \leqq \log_{10}\dfrac{1}{10}$　　すなわち　　$n\log_{10}p \leqq -1$

① から　　$n\log_{10}\left(\dfrac{64}{100}\right)^{\frac{1}{20}} \leqq -1$　　すなわち　　$\dfrac{1}{20}n(\log_{10}64-\log_{10}100) \leqq -1$

ゆえに　　$\dfrac{1}{10}n(3\log_{10}2-1) \leqq -1$

$3\log_{10}2-1<0$　であるから　　$n \geqq \dfrac{10}{1-3\log_{10}2}$　……②

ここで，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であるから

$$\frac{10}{1-3\cdot 0.3010}<\frac{10}{1-3\log_{10}2}<\frac{10}{1-3\cdot 0.3011}$$

よって　　$103.09<\dfrac{10}{1-3\log_{10}2}<103.42$

ゆえに，② を満たす最小の自然数は　$n=104$

したがって，最低 104 回押せばよい。

$\boxed{4}$ [2016 大阪大]

(解説)

(1)　$x+y=c$ であるから

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}$$

$x>0$，$y>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により　　$x+y\geqq 2\sqrt{xy}$

よって　　$xy\leqq\dfrac{c^2}{4}$

$c+1>0$ であるから　　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\geqq 1+\dfrac{c+1}{\dfrac{c^2}{4}}=\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2$

等号が成り立つのは $x=y=\dfrac{c}{2}$ のときである。

よって，求める最小値は　　$\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2$

(2)　z を $0<z<1$ の範囲に固定して考える。

$x+y=1-z$ であるから，(1) より，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ は $x=y=\dfrac{1-z}{2}$ のとき最小値 $\left(1+\dfrac{2}{1-z}\right)^2$ をとる。

$1-\dfrac{4}{3z}<0$ であるから　　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)\leqq\left(1+\dfrac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$

ここで，$f(z)=\left(1+\dfrac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(z)&=2\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\cdot\frac{2}{(1-z)^2}\left(1-\frac{4}{3z}\right)+\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}\\&=4\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\cdot\frac{(2z-1)(2z-3)}{3z^2(1-z)^2}\end{aligned}$$

$f'(z)=0$ とすると　　$z=\dfrac{1}{2}$

よって，$0<z<1$ における $f(z)$ の増減表は右のようになる。

z	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(z)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(z)$	/	↗	$-\frac{125}{3}$	↘	/

$z=\dfrac{1}{2}$ のとき　　$x=y=\dfrac{1}{4}$

ゆえに，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ は $x=\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

$\boxed{5}$ [2016 大阪大]

(解説)

(1)　点 $(a,\ b)$ は放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ 上にあるから　　$b=\sqrt{2}(a-1)^2$

また，$y'=2\sqrt{2}(x-1)$ であるから，点 $(a,\ b)$ における接線の傾きは

$$2\sqrt{2}(a-1) \quad \cdots\cdots ①$$

点 $(a,\ b)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上にあるから，この点における法線は原点を通る。

よって，法線の傾きは　　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}(a-1)^2}{a}$　$\cdots\cdots$ ②

ある点における接線と法線は直交するから，①，② より

$$2\sqrt{2}(a-1)\cdot\frac{\sqrt{2}(a-1)^2}{a}=-1$$

$$4(a-1)^3=-a$$

$$4a^3-12a^2+13a-4=0$$

$$(2a-1)(2a^2-5a+4)=0$$

$2a^2-5a+4=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot4=-7<0$$

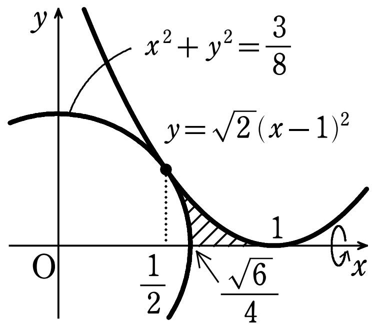
であるから，方程式 $2a^2-5a+4=0$ は実数解をもたない。

よって　　$a=\dfrac{1}{2}$

したがって　　$b=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$r=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき，連立不等式が表す領域は右の図の斜線部分のようになる。



円 $x^2+y^2=\dfrac{3}{8}$ の $y\geqq0$ の部分は $y=\sqrt{\dfrac{3}{8}-x^2}$ であるから，求める体積は

$$\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left(\sqrt{\frac{3}{8}-x^2}\right)^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{5}(x-1)^5\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\pi\left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}=2\pi\cdot\frac{1}{5\cdot2^5}-\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{16}-\frac{7}{48}\right)$$

$$=\frac{38-15\sqrt{6}}{240}\pi$$