

高2理系数学総合S 確認テスト 後期第12講

氏名 _____ 得点 / 10

1 (1)3点 (2)7点

正の実数 a に対し、座標平面上に曲線 $C: y = a^4x + \sin ax$ と直線 $l: y = a^4x$ がある。

- (1) C と l の交点の x 座標のうち、正で最小の値を x_1 とする。 x_1 を a で表せ。
- (2) (1) の x_1 に対し、 $0 \leq x \leq x_1$ の範囲で、 C と l で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。 $V(a)$ を a で表せ。

1 (1) 3点 (2) 7点

解答 (1) $x_1 = \frac{\pi}{a}$ (2) $V(a) = \frac{4a^3+1}{2a}\pi^2$ (3) $a = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{3}{2}\pi^2$

1 (1) 3点 (2) 7点

(1) $a^4x + \sin ax = a^4x$ から $\sin ax = 0$

ゆえに $ax = n\pi$ (n は整数)

これを満たす x のうち正で最小の値 x_1 は, $a > 0$ から $ax_1 = \pi$

よって $x_1 = \frac{\pi}{a}$ 3点

(2) $V(a) = \pi \int_0^{\frac{\pi}{a}} \{(a^4x + \sin ax)^2 - (a^4x)^2\} dx$ 3点

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{a}} (2a^4x \sin ax + \sin^2 ax) dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} x \sin ax dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} x \left(-\frac{1}{a} \cos ax \right)' dx$$

$$= \left[-\frac{1}{a} x \cos ax \right]_0^{\frac{\pi}{a}} + \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \cos ax dx$$

$$= \frac{\pi}{a^2} + \frac{1}{a^2} \left[\sin ax \right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{\pi}{a^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin^2 ax dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{1 - \cos 2ax}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2a} \sin 2ax \right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{\pi}{2a}$$

よって, $V(a) = \pi \left(2a^4 \cdot \frac{\pi}{a^2} + \frac{\pi}{2a} \right) = \frac{4a^3+1}{2a}\pi^2$ 4点

