1

(1)　分数 $\dfrac{41}{27}$ を循環小数で表せ。

(2)　循環小数 $1.\dot{2}3\dot{4}$ を分数で表せ。

2

$\sqrt{x^2+6x+9}+2\sqrt{x^2-10x+25}$ を x の整式で表せ。

3

$x=\dfrac{1}{\sqrt{10+\sqrt{96}}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{10-\sqrt{96}}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　x^2+y^2　　(2)　x^3+y^3　　(3)　x^4+y^4

4

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x-1|=2$　　(2)　$|x+4|<5$　　(3)　$|2x-3|\geqq 4$

5

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x-1|=2x$　　(2)　$|2x-4|\leqq x$

(3)　$|x+1|+|x-3|=6$　　(4)　$|2x+1|\leqq|2x-1|+x$

6

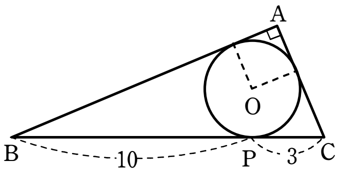
交わる2平面 α，β の交線を ℓ とする。α，β 上にない点Oから α，β に垂線を下ろし，その交点をそれぞれA，Bとする。このとき，$\ell\perp$AB であることを証明せよ。

7

右の図において，円Oは $\angle A=90^\circ$ の直角三角形ABCの内接円であり，点Pは辺BC上の接点である。円Oの半径を r とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　辺AB，CAを r で表せ。

(2)　r の値を求めよ。

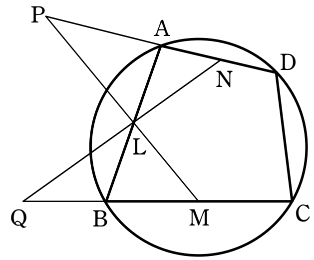


8

AB＝ACである二等辺三角形ABCの頂点Aを通る直線と，辺BCとの交点をD，△ABCの外接円との交点をEとする。このとき，直線ABは3点B，D，Eを通る円に接することを証明せよ。

9

右の図で，L，M，Nはそれぞれ四角形ABCDの辺AB，BC，DAの中点である。このとき，4点M，N，P，Qは1つの円周上にあることを証明せよ。



$\boxed{1}$

解答　(1)　$1.\dot{5}1\dot{8}$　　(2)　$\dfrac{137}{111}$

$\boxed{2}$

解答　$x<-3$ のとき　$-3x+7$，　$-3\leqq x<5$ のとき　$-x+13$，
$5\leqq x$ のとき　$3x-7$

$\boxed{3}$

解答　(1)　5　　(2)　$\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$　　(3)　$\dfrac{49}{2}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=3,\ -1$　　(2)　$-9<x<1$　　(3)　$x\leqq-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\leqq x$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$x=\dfrac{1}{3}$　　(2)　$\dfrac{4}{3}\leqq x\leqq 4$　　(3)　$x=-2,\ 4$　　(4)　$-2\leqq x\leqq 0,\ 2\leqq x$

$\boxed{6}$

解答　略

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\mathrm{AB}=r+10,\ \mathrm{CA}=r+3$　　(2)　$r=2$

$\boxed{8}$

解答　略

$\boxed{9}$

解答　略

$\boxed{1}$

解説

(1)　$\dfrac{41}{27}=1.518518518\cdots\cdots$ であるから　$1.\dot{5}1\dot{8}$

(2)　$x=1.\dot{2}3\dot{4}$ とおくと　$x=1.234234\cdots\cdots$
$1000x=1234.234\cdots\cdots$

$$\begin{array}{rr} & 1000x=1234.234\cdots\cdots \\ -) & x=\quad 1.234\cdots\cdots \\ \hline & 999x=1233 \end{array}$$

$1000x-x$ を計算すると　$999x=1233$

よって　$x=\dfrac{1233}{999}=\dfrac{137}{111}$　　すなわち　$1.\dot{2}3\dot{4}=\dfrac{137}{111}$

$\boxed{2}$

解説

$$\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x+3)^2}=|x+3|$$
$$\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|$$

[1]　$x<-3$ のとき　$|x+3|=-(x+3),\ |x-5|=-(x-5)$
よって　(与式)$=-(x+3)-2(x-5)=-3x+7$

[2]　$-3\leqq x<5$ のとき　$|x+3|=x+3,\ |x-5|=-(x-5)$
よって　(与式)$=x+3-2(x-5)=-x+13$

[3]　$5\leqq x$ のとき　$|x+3|=x+3,\ |x-5|=x-5$
よって　(与式)$=x+3+2(x-5)=3x-7$

$\boxed{3}$

解説

$$\sqrt{10+\sqrt{96}}=\sqrt{10+2\sqrt{24}}=\sqrt{(6+4)+2\sqrt{6\cdot4}}=\sqrt{6}+\sqrt{4}=\sqrt{6}+2$$
$$\sqrt{10-\sqrt{96}}=\sqrt{10-2\sqrt{24}}=\sqrt{(6+4)-2\sqrt{6\cdot4}}=\sqrt{6}-\sqrt{4}=\sqrt{6}-2$$

よって　$x=\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}=\dfrac{\sqrt{6}-2}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}=\dfrac{\sqrt{6}-2}{6-4}=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\dfrac{\sqrt{6}+2}{6-4}=\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$

ゆえに　$x+y=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}+\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

$xy=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}=\dfrac{6-4}{4}=\dfrac{1}{2}$

(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{6})^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=6-1=5$

(2)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(\sqrt{6})^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}$

$$=6\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}$

$$=\sqrt{6}\left(5-\frac{1}{2}\right)=\frac{9\sqrt{6}}{2}$$

(3)　$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$

$$=5^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=25-\frac{1}{2}=\frac{49}{2}$$

4

解説

(1)　$|x-1|=2$ から　$x-1=\pm2$　よって　$x=3,\ -1$

(2)　$|x+4|<5$ から　$-5<x+4<5$

各辺から 4 を引いて　$-9<x<1$

(3)　$|2x-3|\geqq4$ から　$2x-3\leqq-4$ または $4\leqq2x-3$

よって　$2x\leqq-1$ または $7\leqq2x$　ゆえに　$x\leqq-\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\leqq x$

5

解説

(1)　$|x-1|=2x$　……①

[1]　$x-1\geqq0$ すなわち $x\geqq1$ のとき

$|x-1|=x-1$ であるから，① は　$x-1=2x$

よって　$x=-1$　これは $x\geqq1$ を満たさない。

[2]　$x-1<0$ すなわち $x<1$ のとき

$|x-1|=-(x-1)$ であるから，① は　$-(x-1)=2x$

よって　$x=\frac{1}{3}$　これは $x<1$ を満たす。

したがって，求める解は　$x=\frac{1}{3}$

(2)　$|2x-4|\leqq x$　……①

[1]　$2x-4\geqq0$ すなわち $x\geqq2$ のとき

$|2x-4|=2x-4$ であるから，① は　$2x-4\leqq x$　よって　$x\leqq4$

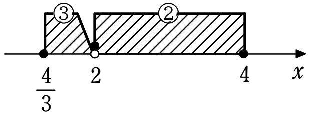
これと $x\geqq2$ との共通範囲は　$2\leqq x\leqq4$　……②

[2]　$2x-4<0$ すなわち $x<2$ のとき

$|2x-4|=-(2x-4)$ であるから，① は　$-(2x-4)\leqq x$　よって　$x\geqq\frac{4}{3}$

これと $x<2$ との共通範囲は

$\frac{4}{3}\leqq x<2$　……③



求める解は，② と ③ を合わせた範囲で　$\frac{4}{3}\leqq x\leqq4$

(3)　$|x+1|+|x-3|=6$　……①

[1]　$x<-1$ のとき

$|x+1|=-(x+1)$，$|x-3|=-(x-3)$ であるから，① は　$-(x+1)-(x-3)=6$

ゆえに　$x=-2$　これは $x<-1$ を満たす。

[2]　$-1\leqq x<3$ のとき

$|x+1|=x+1$，$|x-3|=-(x-3)$ であるから，① は　$(x+1)-(x-3)=6$

左辺は 4 になるから，等式を満たす x の値はない。

[3]　$x\geqq3$ のとき

$|x+1|=x+1$，$|x-3|=x-3$ であるから，① は　$(x+1)+(x-3)=6$

ゆえに　$x=4$　これは $x\geqq3$ を満たす。

したがって，求める解は　$x=-2,\ 4$

(4)　$|2x+1|\leqq|2x-1|+x$　……①

[1]　$x<-\frac{1}{2}$ のとき

$|2x+1|=-(2x+1)$，$|2x-1|=-(2x-1)$ であるから，① は

$-(2x+1)\leqq-(2x-1)+x$　よって　$x\geqq-2$

これと $x<-\frac{1}{2}$ との共通範囲は　$-2\leqq x<-\frac{1}{2}$　……②

[2]　$-\frac{1}{2}\leqq x<\frac{1}{2}$ のとき

$|2x+1|=2x+1$，$|2x-1|=-(2x-1)$ であるから，① は

$2x+1 \leqq -(2x-1)+x$　　　よって　$x \leqq 0$

これと $-\frac{1}{2} \leqq x < \frac{1}{2}$ との共通範囲は　　$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 0$　…… ③

[3]　$x \geqq \frac{1}{2}$ のとき

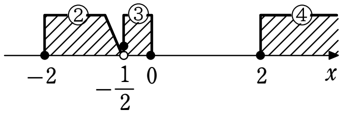
$|2x+1|=2x+1$，$|2x-1|=2x-1$ であるから，① は

$2x+1 \leqq 2x-1+x$　　　よって　$x \geqq 2$

これと $x \geqq \frac{1}{2}$ との共通範囲は　$x \geqq 2$　…… ④

求める解は，②，③，④ を合わせた範囲で

$-2 \leqq x \leqq 0$，$2 \leqq x$



6

解説

OA⊥α であり，ℓ は α 上にあるから

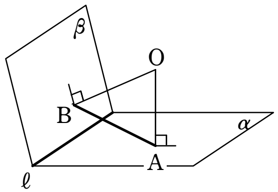
OA⊥ℓ　…… ①

OB⊥β であり，ℓ は β 上にあるから

OB⊥ℓ　…… ②

①，② から，ℓ は平面 OAB に垂直である。

よって，ℓ ⊥AB が成り立つ。



7

解説

(1)　2 辺 CA，AB と円 O の接点を，それぞれ Q，R とおく。

OQ⊥CA，OR⊥AB，OQ＝OR＝r であるから，四角形 AROQ は正方形である。

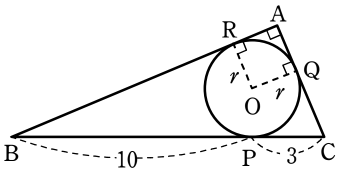
よって　　AR＝AQ＝r

また，BR＝BP であるから　　BR＝10

ゆえに　　AB＝AR＋BR＝$r+10$

CQ＝CP であるから　　CQ＝3

ゆえに　　CA＝AQ＋CQ＝$r+3$



(2)　△ABC において，三平方の定理により

$AB^2+CA^2=BC^2$　　すなわち　　$(r+10)^2+(r+3)^2=13^2$

整理すると　　$r^2+13r-30=0$　　　よって　　$(r+15)(r-2)=0$

$r>0$ であるから　　$r=2$

8

解説

点 B と点 E を結ぶ。

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから

∠ABC＝∠ACB　…… ①

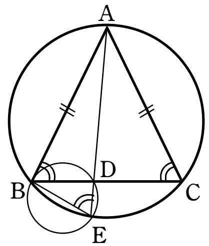
円周角の定理により

∠ACB＝∠AEB　…… ②

①，② から　　∠ABC＝∠AEB

すなわち　　∠ABD＝∠BED

したがって，接線と弦の作る定理の逆により，直線 AB は 3 点 B，D，E を通る円に接する。



9

解説

△ABD において，L は辺 AB の中点，N は辺 DA の中点であるから，中点連結定理により

LN∥BD

よって　　∠PNQ＝∠ADB　…… ①

△ABC において，L は辺 AB の中点，M は辺 BC の中点であるから，中点連結定理により

LM∥AC

よって　　∠PMQ＝∠ACB　…… ②

また，円周角の定理により　　∠ADB＝∠ACB　…… ③

①，②，③ から　　∠PNQ＝∠PMQ

M と N は直線 PQ に関して同じ側にあるから，円周角の定理の逆により，4 点 M，N，P，Q は 1 つの円周上にある。