1

(解説)

関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点は，方程式

$$|2x^2+ax-1|=|x^2-2| \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たす実数 x の個数と一致する。

$(*)$ から　　$2x^2+ax-1=\pm(x^2-2)$

よって　　$x^2+ax+1=0 \quad \cdots\cdots ①$　　または　　$3x^2+ax-3=0 \quad \cdots\cdots ②$

①，② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=a^2-4=(a+2)(a-2), \qquad D_2=a^2+36>0$$

よって，① を満たす実数 x の個数は

$|a|<2$ のとき 0 個，　$|a|=2$ のとき 1 個，　$2<|a|$ のとき 2 個

② を満たす実数 x の個数は常に 2 個である。

ここで ①，② が共通解 $x=\alpha$ をもつとすると

$$\alpha^2+a\alpha+1=0 \quad \cdots\cdots ①', \qquad 3\alpha^2+a\alpha-3=0 \quad \cdots\cdots ②'$$

$②'-①'$ から　　$\alpha^2=2$　　　よって　$\alpha=\pm\sqrt{2}$

[1]　$\alpha=\sqrt{2}$ のとき

①′ から　　$3+\sqrt{2}a=0$　　　ゆえに　$a=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

このとき，①，② の残りの解はそれぞれ解と係数の関係により $\dfrac{1}{\alpha}$，$-\dfrac{1}{\alpha}$ すなわち

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

[2]　$\alpha=-\sqrt{2}$ のとき

①′ から　　$3-\sqrt{2}a=0$　　　ゆえに　$a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

このとき，①，② の残りの解はそれぞれ解と係数の関係により $\dfrac{1}{\alpha}$，$-\dfrac{1}{\alpha}$ すなわち

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

以上から，関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点の個数は

$|a|<2$ のとき 2 個，　$|a|=2$ のとき 3 個，　$2<|a|<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 4 個，

$|a|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 3 個，　$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<|a|$ のとき 4 個

2

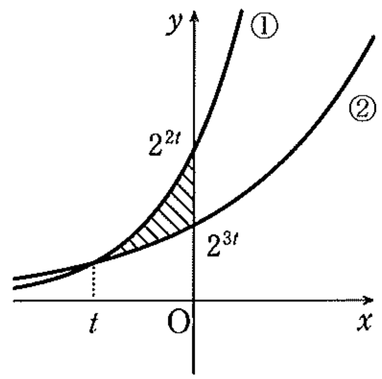
(解説)

(1)　　$y=2^{2x+2t} \quad \cdots\cdots ①$

$y=2^{x+3t} \quad \cdots\cdots ②$

①，② の共有点の x 座標は，次の方程式の実数解である。

$$2^{2x+2t}=2^{x+3t}$$



ゆえに　　$2x+2t=x+3t$

よって　　$x=t$

$$2^{2x+2t}-2^{x+3t}=2^{x+3t}(2^{x-t}-1)$$

$t\leqq x\leqq 0$ のとき　　$0\leqq x-t\leqq -t$

ゆえに　　$2^{x-t}\geqq 1$

よって，$t\leqq x\leqq 0$ において　　$2^{2x+2t}\geqq 2^{x+3t}$

$$V(t)=\pi\int_t^0(2^{2x+2t})^2dx-\pi\int_t^0(2^{x+3t})^2dx$$

$$=\pi\int_t^0(2^{4x+4t}-2^{2x+6t})dx$$

$$=\pi\left[\frac{2^{4t}}{4}\cdot\frac{2^{4x}}{\log 2}-\frac{2^{6t}}{2}\cdot\frac{2^{2x}}{\log 2}\right]_t^0=\frac{\pi}{4\log 2}(2^{8t}-2^{6t+1}+2^{4t})$$

(2)　$V(t)=\dfrac{\pi}{4\log 2}\{(2^{2t})^4-2\cdot(2^{2t})^3+(2^{2t})^2\}$

$2^{2t}=s$ とおくと　　$0<s<1$ で

$$V(t)=\frac{\pi}{4\log 2}(s^4-2s^3+s^2)=\frac{\pi}{4\log 2}s^2(s^2-2s+1)$$

$$=\frac{\pi}{4\log 2}s^2(s-1)^2=\frac{\pi}{4\log 2}\{s(1-s)\}^2$$

$f(s)=s(1-s)$ とおくと　　$f(s)=-s^2+s=-(s^2-s)=-\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

$0<s<1$ において，$f(s)$ は $s=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

$f(s)$ が最大となるとき，$V(t)$ も最大となるから，$V(t)$ は $2^{2t}=\dfrac{1}{2}$ のとき，

すなわち　　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値　$\dfrac{\pi}{4\log 2}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{\pi}{64\log 2}$ をとる。

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$501 \leqq n \leqq 1000$ から　　$0 \leqq n-501 \leqq 499$

よって，$502 \leqq n \leqq 1000$ のとき，n 回目で終わるのは，$(n-501)$ 回目までは表，裏いずれでもよく，$(n-500)$ 回目が裏，$(n-499)$ 回目から n 回目まですべて表が出る場合である。

したがって　　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{500}=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$　　この式は $n=501$ でも成り立つ。

よって，$p(n)$ は一定の値 $\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ をとる。

(2)　1001 回目で終わるのは，500 回目では終わらず，501 回目が裏，502 回目から 1001 回目まですべて表が出る場合である。

よって　　$p(1001)=\{1-p(500)\} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{500}$

1002 回目で終わるのは，500 回目でも 501 回目でも終わらず，502 回目が裏，503 回目から 1002 回目まですべて表が出る場合である。

よって　　$p(1002)=[1-\{p(500)+p(501)\}] \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{500}$

ゆえに　　$p(1002)-p(1001)=-p(501) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{501}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{501} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{501}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}$

(3)　(2) と同様にして

$$\begin{aligned} p(n+1)-p(n)&=[1-\{p(500)+p(501)+\cdots\cdots+p(n-500)\}] \times \left(\frac{1}{2}\right)^{501} \\ &\quad -[1-\{p(500)+p(501)+\cdots\cdots+p(n-501)\}] \times \left(\frac{1}{2}\right)^{501} \\ &=-p(n-500) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{501} \end{aligned}$$

$1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき $502 \leqq n-500 \leqq 1000$ であるから，(1) より

$$p(n-500)=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$

したがって　　$p(n+1)-p(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}$