高2理系数学総合S　確認テスト　1～3月期第7講

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点　　/　10

$\boxed{1}$ （(1) 6点　(2) 4点）

$t \geqq 1$ とし，$f(t)=\int_0^1 |x^2+x-t^2+t|\,dx$ とする。

(1)　$f(t)$ を t を用いて表せ。

(2)　$f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

高2理系数学総合S　確認テスト　1～3月期第7講【解答】

$\boxed{1}$　((1) 6点　(2) 4点)

解答　(1)　$1\leqq t<2$ のとき $f(t)=\dfrac{4}{3}t^3-4t^2+3t+\dfrac{1}{2}$，$t\geqq 2$ のとき $f(t)=t^2-t-\dfrac{5}{6}$

(2)　順に $\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{1}$　((1) 6点　(2) 4点)

(1)　$\displaystyle\int(x^2+x-t^2+t)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-t(t-1)x+C$　(C は積分定数)

$F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-t(t-1)x$ とする。

[1]　$0\leqq t-1<1$ すなわち $1\leqq t<2$ のとき

$$f(t)=\int_0^1|(x+t)(x-t+1)|dx=-\int_0^{t-1}(x+t)(x-t+1)dx+\int_{t-1}^1(x+t)(x-t+1)dx$$

$$=-F(t-1)+F(0)+F(1)-F(t-1)=-2F(t-1)+F(0)+F(1)$$

$$=-2\left\{\frac{(t-1)^3}{3}+\frac{(t-1)^2}{2}-t(t-1)^2\right\}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-t(t-1)$$

$$=\frac{4}{3}t^3-4t^2+3t+\frac{1}{2}$$　」3点

[2]　$1\leqq t-1$ すなわち $t\geqq 2$ のとき

$$f(t)=-\int_0^1(x+t)(x-t+1)dx=-F(1)+F(0)=-\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-t(t-1)\right\}=t^2-t-\frac{5}{6}$$」3点

[1]，[2] から　$f(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}t^3-4t^2+3t+\dfrac{1}{2} & (1\leqq t<2)\\ t^2-t-\dfrac{5}{6} & (t\geqq 2)\end{cases}$

(2)　[1]　$1\leqq t<2$ のとき　$f'(t)=4t^2-8t+3$

よって　$f'(t)=(2t-1)(2t-3)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=\dfrac{3}{2}$

$1\leqq t<2$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	1	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

よって，$f(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最小となり，その最小値は

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3-4\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

[2]　$t\geqq 2$ のとき　$f(t)=t^2-t-\dfrac{5}{6}=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{12}$

よって，$f(t)$ は $t=2$ のとき最小となり，その最小値は　$f(2)=\dfrac{7}{6}$

[1]，[2] から，$f(t)$ の最小値は $\dfrac{1}{2}$ であり，そのときの t の値は，$t=\dfrac{3}{2}$ である　」4点