高2理系数学総合S　課題（2月20日まで）～微分･積分（数Ⅱ範囲）～

1

(1)　加法定理を用いて，$\cos 2x$ および $\cos 3x$ を $\cos x$ で表せ。

(2)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $f(x)=\cos 3x+\cos 2x-2\cos x$ の最大値および最小値を求めよ。

2

曲線 $y=x^3-3x$ を C とする。

(1)　曲線 C 上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C に点 $\mathrm{A}(-2,\ k)$ から異なる3本の接線が引けるような定数 k の値の範囲を求めよ。

3

関数 $f(x)$ が $f(x)=x^2+\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)x+\int_0^1 tf(t)\,dt$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

4

3次関数 $y=f(x)$ が $x=1-\sqrt{3}$ と $x=1+\sqrt{3}$ で極値をとり，点 $(3,\ f(3))$ における $y=f(x)$ のグラフの接線が直線 $y=4x-27$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 3x^2-14x$ が成立することを示せ。

5

関数 $y=\log_3(2x-1)+\log_3(-x^2+2x+3)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

6

すべての正の数 x に対して不等式 $x^3-3a^2x+a>0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

7

$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，関数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\int_0^1 |t^2-x^2|\,dt$ の最大値および最小値を求めよ。

8

実数の定数 a，b に対して，連立方程式 $x+y=a$，$-xy=b$ を考える。

(1)　この連立方程式が実数解をもつとき，定数 a，b の満たす条件を求めよ。

(2)　この連立方程式が実数解 $(x,\ y)$ をもち，かつ，それが $x^2+y^2 \leqq 8$ の範囲にあるとき，定数 a，b の満たす条件を求め，点 $(a,\ b)$ 全体のなす領域 D を図示せよ。

(3)　(2)の領域 D の面積を求めよ。

9

$a>0$ のとき，放物線 $C：y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線を ℓ_1 とし，P を通り ℓ_1 と垂直な直線を ℓ_2 とする。

(1)　直線 ℓ_2 と放物線 C との交点のうち，点 P と異なる方を Q とする。点 Q の座標を a の式で表せ。

(2)　放物線 C と直線 ℓ_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。S を a の式で表せ。

(3)　(2)の S の最小値を求めよ。またそのときの a の値を求めよ。

10

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2$ とする。

(1)　関数 $y=f(x)$ の増減と極値を調べ，グラフをかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ に2点で接する直線の方程式を $y=g(x)$ とする。その接点の x 座標を x_1，x_2（ただし $x_1<x_2$）とするとき，4次方程式 $f(x)-g(x)=0$ が $(x-x_1)^2(x-x_2)^2=0$ と表せることを使って，この直線の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と(2)で求めた直線 $y=g(x)$ とで囲まれる部分の面積 S の値を求めよ。ただし，必要に応じて $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx=\dfrac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$ を使ってよい。

$\boxed{1}$

解答 (1) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$，$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(2) 最大値 $\dfrac{121}{54}$，最小値 $-\dfrac{5}{2}$

$\boxed{2}$

解答 (1) $y = 3(t^2 - 1)x - 2t^3$　(2) $-2 < k < 6$

$\boxed{3}$

解答 $f(x) = x^2 - 5x - \dfrac{17}{6}$

$\boxed{4}$

解答 (1) $f(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 8x + 9$　(2) 略

$\boxed{5}$

解答 (1) $\dfrac{1}{2} < x < 3$　(2) $x = 2$ で最大値 2

$\boxed{6}$

解答 $0 \leqq a < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{7}$

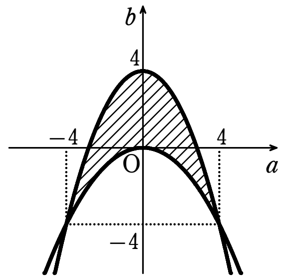
解答 最大値 1，最小値 $-\dfrac{1}{3}$

$\boxed{8}$

解答 (1) $a^2 + 4b \geqq 0$

(2) $a^2 + 4b \geqq 0$ かつ $a^2 + 2b \leqq 8$；
〔図〕，境界線を含む

(3) $\dfrac{64}{3}$



$\boxed{9}$

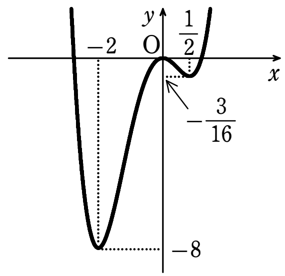
解答 (1) $\mathrm{Q}\left(-a - \dfrac{1}{2a},\ \left(-a - \dfrac{1}{2a}\right)^2\right)$　(2) $\dfrac{1}{6}\left(2a + \dfrac{1}{2a}\right)^3$

(3) $a = \dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{4}{3}$

$\boxed{10}$

解答 (1) $x = -2$ で極小値 -8，$x = 0$ で極大値 0，
$x = \dfrac{1}{2}$ で極小値 $-\dfrac{3}{16}$，〔図〕

(2) $y = 3x - \dfrac{9}{4}$　(3) $\dfrac{49\sqrt{7}}{30}$



$\boxed{1}$

解説

(1) $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$

$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$= 2\cos^2 x - 1$

また，$\sin 2x=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x$

$=2\sin x\cos x$

であるから

$$\begin{aligned}\cos 3x&=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x\\&=(2\cos^2 x-1)\cdot\cos x-2\sin x\cos x\cdot\sin x\\&=2\cos^3 x-\cos x-2\sin^2 x\cos x\\&=2\cos^3 x-\cos x-2(1-\cos^2 x)\cos x\\&=4\cos^3 x-3\cos x\end{aligned}$$

(2)　$y=f(x)$ とする。

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ より　　$-1\leqq t\leqq 1$

(1) より，y を t で表すと

$$\begin{aligned}y&=\cos 3x+\cos 2x-2\cos x\\&=(4\cos^3 x-3\cos x)+(2\cos^2 x-1)-2\cos x\\&=4\cos^3 x+2\cos^2 x-5\cos x-1\\&=4t^3+2t^2-5t-1\end{aligned}$$

よって　　$y'=12t^2+4t-5=(6t+5)(2t-1)$

$y'=0$ とすると　　$t=-\dfrac{5}{6},\ \dfrac{1}{2}$

y の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{5}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	↗	極大	↘	極小	↗	0

ここで，$t=-\dfrac{5}{6}$ のとき

$$y=4\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)^3+2\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)^2-5\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)-1=\frac{121}{54}$$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　　$y=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-5\cdot\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{5}{2}$

したがって，最大値は　$\dfrac{121}{54}$，　最小値は　$-\dfrac{5}{2}$

$\boxed{2}$

解説

(1)　$y=x^3-3x$ から　　$y'=3x^2-3$

よって，曲線 C 上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$$

すなわち　　$y=3(t^2-1)x-2t^3$

(2)　(1) の接線が点 A $(-2,\ k)$ を通るから

$$k=3(t^2-1)\cdot(-2)-2t^3$$

すなわち　　$-2t^3-6t^2+6=k$　……①

ここで，3 次関数のグラフにおいて，接点の x 座標が異なれば接線も異なる。

よって，点 A から曲線 C に異なる 3 本の接線が引けるための条件は，曲線 C 上の接点が 3 つ存在することであり，これは，t についての 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつことと同値である。

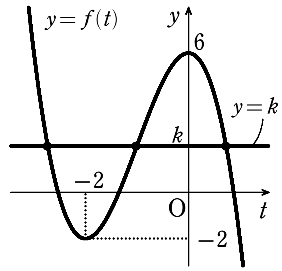
ゆえに，① の左辺を $f(t)$ とおくと，求める条件は，$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる 3 個の共有点をもつことである。

ここで　　$f'(t)=-6t^2-12t=-6t(t+2)$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=0,\ -2$

よって，$f(t)$ の増減表は次のようになり，$y=f(t)$ のグラフは右下のようになる。

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	極小 -2	↗	極大 6	↘



グラフより，求める k の値の範囲は

$-2<k<6$

3

解説

$\int_0^1 f(t)dt=a$，$\int_0^1 tf(t)dt=b$ とおくと，a，b は定数で

$$f(x)=x^2+ax+b$$

このとき

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2+at+b)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b$$

$$\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1(t^3+at^2+bt)dt=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$$

よって　$\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=a$　……①，

$\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=b$　……②

① から　$3a-6b=2$　　② から　$4a-6b=-3$

これを解くと　$a=-5$，$b=-\frac{17}{6}$

よって　$f(x)=x^2-5x-\frac{17}{6}$

4

解説

(1)　3 次関数 $y=f(x)$ が $x=1-\sqrt{3}$，$1+\sqrt{3}$ において極値をとるから，a を 0 でない実数として，

$$f'(x)=a\{x-(1-\sqrt{3})\}\{x-(1+\sqrt{3})\}=a(x^2-2x-2)$$

とおける。

点 $(3,\ f(3))$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の傾きが 4 であるから

$$f'(3)=a(3^2-2\cdot3-2)=4$$

よって　$a=4$

ゆえに　$f'(x)=4x^2-8x-8$

よって　$f(x)=\int(4x^2-8x-8)dx=\frac{4}{3}x^3-4x^2-8x+C$　（C は積分定数）

また，点 $(3,\ f(3))$ は接線 $y=4x-27$ 上の点であるから

$$f(3)=4\cdot3-27=-15$$

ゆえに　$-15=\frac{4}{3}\cdot3^3-4\cdot3^2-8\cdot3+C$

これを解くと　$C=9$

したがって　$f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x^2-8x+9$

(2)　$g(x)=f(x)-(3x^2-14x)=\frac{4}{3}x^3-7x^2+6x+9$ とすると

$$g'(x)=4x^2-14x+6=2(2x-1)(x-3)$$

$g'(x)=0$ とすると　$x=\frac{1}{2}$，3

$x\geqq0$ における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	3	…
$g'(x)$		+	0	−	0	+
$g(x)$	9	↗	極大	↘	極小	↗

ここで　$g(3)=\frac{4}{3}\cdot3^3-7\cdot3^2+6\cdot3+9=0$

よって，$x\geqq0$ において，$g(x)$ は $x=3$ で最小値 0 をとる。

ゆえに，$x\geqq0$ のとき　$g(x)\geqq0$

したがって，$x\geqq0$ のとき　$f(x)\geqq3x^2-14x$

5

解説

(1)　真数条件から

$2x-1>0$ ……① かつ $-x^2+2x+3>0$ ……②

① から　$x>\frac{1}{2}$　……③

② から　$(x+1)(x-3)<0$

よって　$-1<x<3$　……④

③，④から，x のとりうる値の範囲は　　$\frac{1}{2}<x<3$

(2)　$y=\log_3(2x-1)(-x^2+2x+3)$

$f(x)=(2x-1)(-x^2+2x+3)$ とすると

$$f(x)=-2x^3+5x^2+4x-3$$

よって　　$f'(x)=-6x^2+10x+4=-2(x-2)(3x+1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=2,\ -\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}<x<3$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

ゆえに，$f(x)$ は $x=2$ のとき最大となる。

底 3 は 1 より大きいから，$f(x)$ が最大となるとき y も最大になる。

よって，y は $x=2$ のとき最大となり，最大値は

$$\log_3 f(2)=\log_3(3\cdot 3)=\log_3 3^2=2$$

6

解説

$f(x)=x^3-3a^2x+a$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-a,\ a$

[1]　$a=0$ のとき

$f(x)=x^3$ であるから，すべての正の数 x で $f(x)>0$ が成り立つ。

[2]　$a>0$ のとき

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

よって，すべての正の数 x で $f(x)>0$ が成り立つ条件は　　$f(a)>0$

すなわち　　$a^3-3a^2\cdot a+a>0$

よって　　$a(2a^2-1)<0$

$a>0$ であるから　　$2a^2-1<0$

すなわち　　$(\sqrt{2}\,a+1)(\sqrt{2}\,a-1)<0$

ゆえに　　$-\frac{1}{\sqrt{2}}<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a>0$ であるから　　$0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$

[3]　$a<0$ のとき

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

よって，すべての正の数 x で $f(x)>0$ が成り立つ条件は　　$f(-a)>0$

すなわち　　$(-a)^3-3a^2\cdot(-a)+a>0$

よって　　$a(2a^2+1)>0$

$a<0$ であるから　　$2a^2+1<0$

これを満たす実数 a は存在しない。

[1]～[3] より，求める a の値の範囲は　　$0\leqq a<\frac{\sqrt{2}}{2}$

7

解説

$t^2-x^2=0$ を解くと，$(t+x)(t-x)=0$ から　　$t=\pm x$

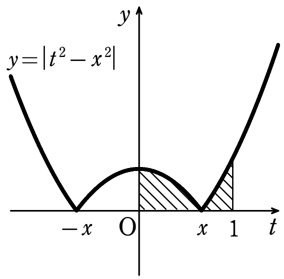
[1]　$0\leqq x<1$ のとき

$0\leqq t\leqq x$ で

$$|t^2-x^2|=-(t^2-x^2)$$
$$=-t^2+x^2$$

$x\leqq t\leqq 1$ で

$$|t^2-x^2|=t^2-x^2$$



よって

$$\int_0^1|t^2-x^2|dt$$

$$=\int_0^x(-t^2+x^2)dt+\int_x^1(t^2-x^2)dt$$

$$=\left[-\frac{t^3}{3}+x^2t\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}-x^2t\right]_x^1$$

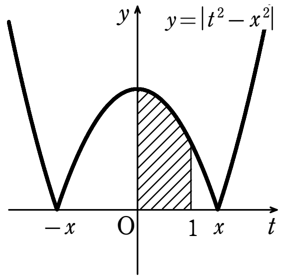
$$=\left(-\frac{x^3}{3}+x^3\right)+\left(\frac{1}{3}-x^2\right)-\left(\frac{x^3}{3}-x^3\right)=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$

ゆえに　$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\left(\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}\right)=x^3-x^2+\frac{1}{3}$

[2]　$1\leqq x\leqq 3$ のとき

$0\leqq t\leqq 1$ で

$$|t^2-x^2|=-(t^2-x^2)$$
$$=-t^2+x^2$$



よって

$$\int_0^1|t^2-x^2|dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+x^2)dt$$
$$=\left[-\frac{t^3}{3}+x^2t\right]_0^1=-\frac{1}{3}+x^2$$

ゆえに　$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\left(-\frac{1}{3}+x^2\right)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}$

よって　$0<x<1$ のとき　$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$

　　　　$1<x<3$ のとき　$f'(x)=-x^2+2x=-x(x-2)$

また　$f(0)=0^3-0^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,　$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{5}{27}$,

$f(1)=-\frac{1}{3}\cdot 1^3+1^2-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,　$f(2)=-\frac{1}{3}\cdot 2^3+2^2-\frac{1}{3}=1$,

$f(3)=-\frac{1}{3}\cdot 3^3+3^2-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{5}{27}$	↗	$\frac{1}{3}$	↗	1	↘	$-\frac{1}{3}$

したがって，$f(x)$ は $x=2$ で最大値 1 をとり，$x=3$ で最小値 $-\frac{1}{3}$ をとる。

$\boxed{8}$

解説

(1)　x，y を解にもつ t の 2 次方程式は

$$t^2-(x+y)t+xy=0$$

すなわち　$t^2-at-b=0$

判別式を D_1 とすると　$D_1=(-a)^2-4\cdot 1\cdot(-b)=a^2+4b$

x，y が実数であるための条件は $D_1\geqq 0$ であるから，定数 a，b の満たす条件は

$$a^2+4b\geqq 0$$

(2)　$x^2+y^2\leqq 8$ から　$(x+y)^2-2xy\leqq 8$

すなわち　$a^2+2b\leqq 8$

(1) の条件と合わせて，定数 a，b の満たす条件は

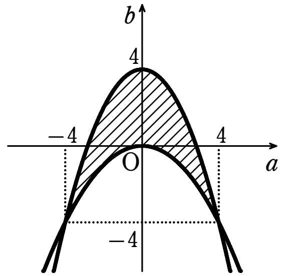
$a^2+4b\geqq 0$ かつ $a^2+2b\leqq 8$

すなわち

$b\geqq -\frac{1}{4}a^2$ かつ $b\leqq -\frac{1}{2}a^2+4$

よって，点 (a, b) 全体のなす領域 D は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(3)　領域 D の面積を S とすると，図形の対称性から

$$S=2\int_0^4\left\{\left(-\frac{1}{2}a^2+4\right)-\left(-\frac{1}{4}a^2\right)\right\}da$$
$$=2\int_0^4\left(-\frac{1}{4}a^2+4\right)da=2\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{a^3}{3}+4a\right]_0^4=\frac{64}{3}$$

別解　$S=\int_{-4}^4\left\{\left(-\frac{1}{2}a^2+4\right)-\left(-\frac{1}{4}a^2\right)\right\}da$

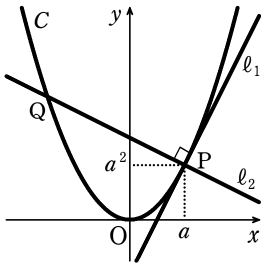
$$=-\frac{1}{4}\int_{-4}^4(a+4)(a-4)da$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\{4-(-4)\}^3=\frac{64}{3}$$

$\boxed{9}$

解説

(1) $y=x^2$ から　　$y'=2x$

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線 ℓ_1 の傾きは $2a$ であるから，P を通り ℓ_1 と垂直な直線 ℓ_2 の方程式は



$$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$$

すなわち　　$y=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$　……①

$y=x^2$ と①から y を消去して　　$x^2=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$

整理すると　　$x^2+\dfrac{1}{2a}x-a^2-\dfrac{1}{2}=0$

すなわち　　$(x-a)\left(x+a+\dfrac{1}{2a}\right)=0$

よって　　$x=a,\ -a-\dfrac{1}{2a}$

ゆえに，点 Q の座標は　　$\left(-a-\dfrac{1}{2a},\ \left(-a-\dfrac{1}{2a}\right)^2\right)$

(2) $a>0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-a-\frac{1}{2a}}^{a}\left\{\left(-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}\right)-x^2\right\}dx$$

$$=-\int_{-a-\frac{1}{2a}}^{a}(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\left\{a-\left(-a-\frac{1}{2a}\right)\right\}^3=\frac{1}{6}\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^3$$

(3) (2) より，$a>0$ の範囲で $2a+\dfrac{1}{2a}$ が最小となるとき，S も最小となる。

$2a>0$，$\dfrac{1}{2a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

等号は，$2a=\dfrac{1}{2a}$ かつ $a>0$，すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ。

したがって，S は $a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{1}{6}\cdot2^3=\dfrac{4}{3}$ をとる。

$\boxed{10}$

解説

(1) $f'(x)=4x^3+6x^2-4x=2x(x+2)(2x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-2,\ 0,\ \dfrac{1}{2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小 -8	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{3}{16}$	↗

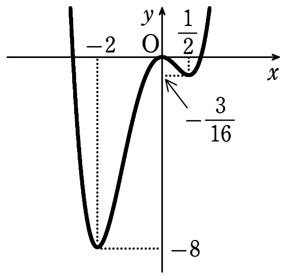
よって，$y=f(x)$ は

$x=-2$ で極小値 -8，

$x=0$ で極大値 0，

$x=\dfrac{1}{2}$ で極小値 $-\dfrac{3}{16}$ をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



(2) $g(x)=ax+b$（a，b は定数）とおく。

$f(x)-g(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2$ から

$x^4+2x^3-2x^2-ax-b$

$\quad=x^4-2(x_1+x_2)x^3+(x_1{}^2+4x_1x_2+x_2{}^2)x^2-2x_1x_2(x_1+x_2)x+(x_1x_2)^2$

両辺の係数を比較して

$-2(x_1+x_2)=2$　……①

$x_1{}^2+4x_1x_2+x_2{}^2=-2$　……②

$-2x_1x_2(x_1+x_2)=-a$　……③

$(x_1x_2)^2=-b$　……④

① から　$x_1+x_2=-1$　……⑤

② から　$(x_1+x_2)^2+2x_1x_2=-2$

⑤ を代入して　$(-1)^2+2x_1x_2=-2$

よって　$x_1x_2=-\dfrac{3}{2}$　……⑥

⑤，⑥ を ③，④ に代入して　$a=3$，$b=-\dfrac{9}{4}$

したがって，求める直線の方程式は

$$y=3x-\frac{9}{4}$$

別解　$f'(x)=4x^3+6x^2-4x$ であるから，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_1,\ x_1{}^4+2x_1{}^3-2x_1{}^2)$ における接線の方程式は

$$y-(x_1{}^4+2x_1{}^3-2x_1{}^2)=(4x_1{}^3+6x_1{}^2-4x_1)(x-x_1)$$

すなわち

$$y=(4x_1{}^3+6x_1{}^2-4x_1)x-3x_1{}^4-4x_1{}^3+2x_1{}^2 \quad \cdots\cdots (*)$$

$$x^4+2x^3-2x^2=(4x_1{}^3+6x_1{}^2-4x_1)x-3x_1{}^4-4x_1{}^3+2x_1{}^2$$

として整理すると

$$(x-x_1)^2\{x^2+2(x_1+1)x+3x_1{}^2+4x_1-2\}=0$$

接線 $(*)$ が $y=f(x)$ に 2 点で接するとき，2 次方程式

$$x^2+2(x_1+1)x+3x_1{}^2+4x_1-2=0 \quad \cdots\cdots (**)$$

は x_1 と異なる重解をもつ。

よって，2 次方程式 $(**)$ の判別式 D について

$$\frac{D}{4}=(x_1+1)^2-(3x_1{}^2+4x_1-2)=0$$

すなわち　$2x_1{}^2+2x_1-3=0$

ここで，恒等式

$$4p^3+6p^2-4p=(2p^2+2p-3)(2p+1)+3,$$

$$-3p^4-4p^3+2p^2=(2p^2+2p-3)\left(-\frac{3}{2}p^2-\frac{1}{2}p-\frac{3}{4}\right)-\frac{9}{4}$$

が成り立つから，$p=x_1$ を代入すると

$$4x_1{}^3+6x_1{}^2-4x_1=3,\quad -3x_1{}^4-4x_1{}^3+2x_1{}^2=-\frac{9}{4}$$

したがって，$(*)$ より，接線の方程式は　$y=3x-\dfrac{9}{4}$

(3)　⑤，⑥ から，x_1，x_2 は 2 次方程式 $t^2+t-\dfrac{3}{2}=0$ の解である。

これを解くと　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$

$x_1<x_2$ であるから　$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$，$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$

区間 $x_1\leqq x\leqq x_2$ において，$f(x)\geqq g(x)$ であるから，求める面積 S は

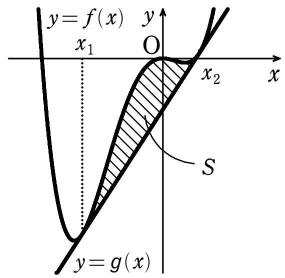
$$S=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)^2(x-x_2)^2dx$$

$$=\frac{1}{30}(x_2-x_1)^5$$

$$=\frac{1}{30}\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}-\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)^5=\frac{1}{30}(\sqrt{7})^5$$

$$=\frac{49\sqrt{7}}{30}$$



参考　$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$ は，

$$\int(x-p)^ndx=\frac{1}{n+1}(x-p)^{n+1}+C \quad (n \text{ は自然数，} C \text{ は積分定数})$$

であることを用いて，次のように証明できる。

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}^2dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)+(\beta-\alpha)^2\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}(x-\alpha)^5-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^4+\frac{(\beta-\alpha)^2}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{5}(\beta-\alpha)^5-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^5+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$