1

解答　(1)　$(-2,\ 1,\ -3)$　(2)　$(-2,\ -1,\ 3)$　(3)　$(-2,\ -1,\ -3)$

解説

(1)　求める点の座標は　$(-2,\ 1,\ -3)$

(2)　求める点の座標は　$(-2,\ -1,\ 3)$

(3)　求める点の座標は　$(-2,\ -1,\ -3)$

2

解答　(1)　$\left(0,\ \dfrac{1}{4},\ 0\right)$　(2)　$\left(0,\ -21,\ \dfrac{17}{2}\right)$

解説

(1)　$\mathrm{P}(0,\ y,\ 0)$ とおく。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ から　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(0-3)^2+(y-0)^2+\{0-(-2)\}^2=\{0-(-1)\}^2+(y-2)^2+(0-3)^2$

整理すると　$1-4y=0$　ゆえに　$y=\dfrac{1}{4}$

したがって　$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{1}{4},\ 0\right)$

(2)　$\mathrm{Q}(0,\ y,\ z)$ とおく。

$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}$ から　$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{BQ}^2$

よって　$(0-3)^2+y^2+\{z-(-2)\}^2=\{0-(-1)\}^2+(y-2)^2+(z-3)^2$

ゆえに　$9+y^2+(z+2)^2=1+(y-2)^2+(z-3)^2$

整理すると　$4y+10z=1$　……①

$\mathrm{AQ}=\mathrm{CQ}$ から　$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{CQ}^2$

よって　$(0-3)^2+y^2+\{z-(-2)\}^2=(0-2)^2+(y-1)^2+z^2$

ゆえに　$9+y^2+(z+2)^2=4+(y-1)^2+z^2$

整理すると　$y+2z=-4$　……②

①，② を解いて　$y=-21,\ z=\dfrac{17}{2}$

したがって　$\mathrm{Q}\left(0,\ -21,\ \dfrac{17}{2}\right)$

3

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: $\overrightarrow{\mathrm{DC}},\ \overrightarrow{\mathrm{EF}},\ \overrightarrow{\mathrm{HG}}$　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$: $\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{EH}},\ \overrightarrow{\mathrm{FG}}$　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$: $\overrightarrow{\mathrm{BF}},\ \overrightarrow{\mathrm{CG}},\ \overrightarrow{\mathrm{DH}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{CE}}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　(3)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{DC}},\ \overrightarrow{\mathrm{EF}},\ \overrightarrow{\mathrm{HG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{EH}},\ \overrightarrow{\mathrm{FG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{BF}},\ \overrightarrow{\mathrm{CG}},\ \overrightarrow{\mathrm{DH}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=2\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{DF}}-\overrightarrow{\mathrm{CE}}=(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})-(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=2\vec{a}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{DF}}-\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

4

解答　(1)　$(5,\ -9,\ -4),\ \sqrt{122}$

解答　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 3,\ -7),\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{14},\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1,\ -4,\ 1),\ |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=3\sqrt{2}$

解説

(1)　$-2\vec{a}-(\vec{c}-3\vec{b})=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}=-2(1,\ 2,\ -1)+3(2,\ -1,\ -2)-(-1,\ 2,\ 0)$

$=(-2,\ -4,\ 2)+(6,\ -3,\ -6)-(-1,\ 2,\ 0)$

$=(-2+6+1,\ -4-3-2,\ 2-6-0)$

$=(5,\ -9,\ -4)$

$|-2\vec{a}-(\vec{c}-3\vec{b})|=\sqrt{5^2+(-9)^2+(-4)^2}=\sqrt{122}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-3,\ 2-(-1),\ 3-2)=(-2,\ 3,\ -7)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(3-2,\ -1-3,\ 2-1)=(1,\ -4,\ 1)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}=3\sqrt{2}$

5

解答　(1)　1　(2)　$\theta=60^\circ$　(3)　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(4)　$\dfrac{3}{2}$

解説

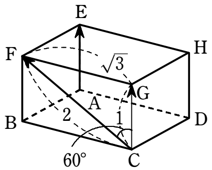
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ のなす角は 60°，

$|\overrightarrow{\mathrm{CG}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{CF}}|=2$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{CG}}||\overrightarrow{\mathrm{CF}}|\cos 60^\circ$

$=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$



(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+(-3)\times(-2)+(-1)\times(-3)=7$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{7}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}}$

$=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

(3)　求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e},\ \vec{b}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{e}=0$

よって　$2x+y+3z=0$ ……①，$x-y=0$ ……②

また，$|\vec{e}|=1$ であるから　$x^2+y^2+z^2=1$ ……③

② から　$y=x$　更に ① から　$z=-x$

これらを ③ に代入して　$x^2+x^2+(-x)^2=1$

ゆえに　$3x^2=1$　よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このとき　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ z=\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (複号同順)

したがって，求める単位ベクトルは

$\vec{e}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ -2,\ 4),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -2,\ 3)$ であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{29}$,

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3)\times(-2)+(-2)\times(-2)+4\times3=22$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{29})^2\cdot(\sqrt{17})^2-22^2}=\dfrac{3}{2}$

別解　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{22}{\sqrt{29}\times\sqrt{17}}=\dfrac{22}{\sqrt{493}}$

$\sin\angle\mathrm{BAC}>0$ から　$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(\dfrac{22}{\sqrt{493}}\right)^2}=\dfrac{3}{\sqrt{493}}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\sqrt{17}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{493}}=\dfrac{3}{2}$

1

解答　xy 平面：$(3,\ 7,\ 4)$，yz 平面：$(-3,\ 7,\ -4)$，x 軸：$(3,\ -7,\ 4)$
　原点：$(-3,\ -7,\ 4)$

解説

xy 平面に関して対称な点の座標は　$(3,\ 7,\ 4)$
yz 平面に関して対称な点の座標は　$(-3,\ 7,\ -4)$
x 軸に関して対称な点の座標は　$(3,\ -7,\ 4)$
原点に関して対称な点の座標は　$(-3,\ -7,\ 4)$

参考　次の座標平面，座標軸，点に関して，点 $(a,\ b,\ c)$ と対称な点の座標は
　xy 平面 …… $(a,\ b,\ -c)$　　x 軸 …… $(a,\ -b,\ -c)$
　yz 平面 …… $(-a,\ b,\ c)$　　y 軸 …… $(-a,\ b,\ -c)$
　zx 平面 …… $(a,\ -b,\ c)$　　z 軸 …… $(-a,\ -b,\ c)$
　原点 …… $(-a,\ -b,\ -c)$

2

解答　(1) $\sqrt{19}$　(2) $\left(0,\ 0,\ -\dfrac{1}{6}\right)$　(3) $\left(-\dfrac{5}{2},\ 8,\ 0\right)$

解説

(1) $\mathrm{AB}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(1-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{19}$

(2) $\mathrm{P}(0,\ 0,\ z)$ とおく。
$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ から　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$
よって　$\{0-(-1)\}^2+(0-0)^2+(z-2)^2=(0-2)^2+(0-1)^2+\{z-(-1)\}^2$
整理すると　$6z=-1$　　よって　$z=-\dfrac{1}{6}$
したがって　$\mathrm{P}\left(0,\ 0,\ -\dfrac{1}{6}\right)$

(3) $\mathrm{Q}(x,\ y,\ 0)$ とおく。
$\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}$ から　$\mathrm{OQ}^2=\mathrm{AQ}^2$
よって　$x^2+y^2=\{x-(-1)\}^2+y^2+(0-2)^2$
整理すると　$2x+5=0$　…… ①
$\mathrm{OQ}=\mathrm{BQ}$ から　$\mathrm{OQ}^2=\mathrm{BQ}^2$
よって　$x^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2+\{0-(-1)\}^2$
整理すると　$2x+y-3=0$　…… ②
①，② を解いて　$x=-\dfrac{5}{2}$，$y=8$
したがって　$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{5}{2},\ 8,\ 0\right)$

3

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　(2) 略

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
および (1) より
$3\overrightarrow{\mathrm{BH}}+2\overrightarrow{\mathrm{DF}}=3(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+2(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$
$=(-3+2)\vec{a}+(3-2)\vec{b}+(3+2)\vec{c}$
$=-\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}$
また　$2\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{CE}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+3(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})+2\vec{b}$
$=(2-3)\vec{a}+(2-3+2)\vec{b}+(2+3)\vec{c}$
$=-\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}$
したがって　$3\overrightarrow{\mathrm{BH}}+2\overrightarrow{\mathrm{DF}}=2\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{CE}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

4

解答　(1) ① $(3,\ -1,\ 1)$，$\sqrt{11}$　② $(-5,\ 5,\ 5)$，$5\sqrt{3}$
　(2) ① $(0,\ 1,\ 2)$，$\sqrt{5}$　② $(1,\ 2,\ -2)$，3

解説

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 0,\ 3)+(2,\ -1,\ -2)$
$=(1+2,\ 0-1,\ 3-2)=(3,\ -1,\ 1)$
$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{11}$

(2) $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ 0,\ 3)-3(2,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ -7)$
$=(2,\ 0,\ 6)-(6,\ -3,\ -6)+(-1,\ 2,\ -7)$
$=(2-6-1,\ 0+3+2,\ 6+6-7)=(-5,\ 5,\ 5)$
$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(-5)^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 1,\ 2)$
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2-1,\ 1-(-1),\ -1-1)=(1,\ 2,\ -2)$
$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$

5

解答　(1) (ア) 3　(イ) -1
　(2) (ア) 内積は 3，$\theta=45°$　(イ) 内積は $-\sqrt{6}$，$\theta=120°$
　(3) (ア) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
　(イ $(-2,\ -1,\ 2)$，$(2,\ 1,\ -2)$　(4) (ア) $\dfrac{3}{2}$　(イ) $\dfrac{7}{2}$

解説

(1) (ア) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は $30°$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 30°$
$=\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

(イ) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ となる点 I をとる。
$\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ のなす角は $135°$，$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{2}$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{CI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=|\overrightarrow{\mathrm{CI}}||\overrightarrow{\mathrm{CH}}|\cos 135°$
$=1\times\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$

(2) (ア) 内積は　$(-2)\times(-1)+1\times 1+2\times 0=3$
また　$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから　$\theta=45°$

(イ) 内積は　$1\times 1+(-1)\times\sqrt{6}+1\times(-1)=-\sqrt{6}$
また　$\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{6})^2+(-1)^2}}=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$
$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから　$\theta=120°$

(3) (ア) $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。
$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$2x+y-3z=0$　…… ①
$\vec{b}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$x-2y+z=0$　…… ②
$|\vec{e}|^2=1^2$ であるから　$x^2+y^2+z^2=1$　…… ③
①，② から x，y を z で表して　$x=z$，$y=z$
これを ③ に代入して　$3z^2=1$　ゆえに　$z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$x=y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$z=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$x=y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
よって　$\vec{e}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(イ) $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。
$\vec{a}\perp\vec{p}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{p}=0$　すなわち　$2y+z=0$　…… ①
$\vec{b}\perp\vec{p}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{p}=0$　すなわち　$2x-2y+z=0$　…… ②
$|\vec{p}|^2=3^2$ であるから　$x^2+y^2+z^2=9$　…… ③
①，② から x，y を z で表して　$x=-z$，$y=-\dfrac{z}{2}$
これを ③ に代入して　$\dfrac{9}{4}z^2=9$　ゆえに　$z=\pm 2$
$z=2$ のとき　$x=-2$，$y=-1$
$z=-2$ のとき　$x=2$，$y=1$
よって　$\vec{p}=(-2,\ -1,\ 2)$，$(2,\ 1,\ -2)$

(4) (ア) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 2,\ 2)$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1)\times(-1)+0\times 2+1\times 2=3$
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-1)^2+0^2+1^2=2$
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=(-1)^2+2^2+2^2=9$
よって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\times 9-3^2}=\dfrac{3}{2}$

(イ) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 2,\ -1)$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3)\times 0+2\times 2+0\times(-1)=4$
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-3)^2+2^2+0^2=13$
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0^2+2^2+(-1)^2=5$
よって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{13\times 5-4^2}=\dfrac{7}{2}$

参考　S は，それぞれ次のようにして求めることもできる。
(ア) $\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times 3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$0°<\angle\mathrm{A}<180°$ であるから　$\angle\mathrm{A}=45°$

よって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}$

(イ)　$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$

$0^\circ<\angle\mathrm{A}<180^\circ$ より，$\sin\angle\mathrm{A}>0$ であるから

$\sin\angle\mathrm{A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{\sqrt{65}}\right)^2}=\dfrac{7}{\sqrt{65}}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\angle\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\sqrt{5}\times\dfrac{7}{\sqrt{65}}=\dfrac{7}{2}$

$\boxed{1}$

解答　D (0，−1，1) または D (6，−1，−7) または D (−4，3，3)

解説

D $(a,\ b,\ c)$ とする。

[1]　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 0,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(a-3,\ b+1,\ c+3)$ から

$-3=a-3$，$0=b+1$，$4=c+3$

よって，$a=0$，$b=-1$，$c=1$ であり　D (0，−1，1)

[2]　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 0,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(3-a,\ -1-b,\ -3-c)$ から

$-3=3-a$，$0=-1-b$，$4=-3-c$

よって，$a=6$，$b=-1$，$c=-7$ であり　D (6，−1，−7)

[3]　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ -2,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(-2-a,\ 1-b,\ 2-c)$ から

$2=-2-a$，$-2=1-b$，$-1=2-c$

よって，$a=-4$，$b=3$，$c=3$ であり　D (−4，3，3)

別解　四角形が平行四辺形であるための条件は，2 本の対角線がそれぞれの中点で交わることである。

[1]　対角線が BC，AD の場合

対角線 BC の中点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，

対角線 AD の中点の座標は　$\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+1}{2},\ \dfrac{c-2}{2}\right)$

これらが一致することから　$a=0$，$b=-1$，$c=1$　ゆえに　D (0，−1，1)

[2]　対角線が AC，BD，[3]　対角線が AB，CD の場合も同様である (解答は省略)。

$\boxed{2}$

解答　$\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

解説

$\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ とすると

$(0,\ 8,\ -3)=p(1,\ 2,\ 3)+q(0,\ -1,\ 2)+r(-2,\ 1,\ -3)$

ゆえに　$(0,\ 8,\ -3)=(p-2r,\ 2p-q+r,\ 3p+2q-3r)$

よって　$0=p-2r$，$8=2p-q+r$，$-3=3p+2q-3r$

これを解いて　$p=2$，$q=-3$，$r=1$

したがって　$\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$　(2)　$\sqrt{21}$

解説

(1)　$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)+t(1,\ 2,\ -1)=(2+t,\ 1+2t,\ 1-t)$

ゆえに　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2+t)^2+(1+2t)^2+(1-t)^2=6t^2+6t+6=6\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小となり，$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから $|\vec{a}+t\vec{b}|$ もこのとき最小になる。

したがって　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

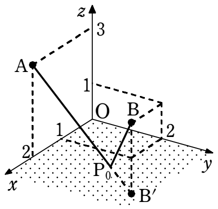
(2)　xy 平面に関して A と B は同じ側にある。

そこで，xy 平面に関して点 B と対称な点を B′ とすると B′ (1，2，−1) であり，PB＝PB′ であるから

AP＋PB＝AP＋PB′≧AB′

よって，P として直線 AB′ と xy 平面の交点 $\mathrm{P_0}$ をとると AP＋PB は最小となり，最小値は

$\mathrm{AB'}=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{21}$



$\boxed{4}$

解答　$s=-1$，$t=1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$

解説

$s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}=s(1,\ 1,\ 1)+t(1,\ 1,\ 0)+(1,\ -1,\ 1)$

$=(s+t+1,\ s+t-1,\ s+1)$

したがって

$|s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}|^2=(s+t+1)^2+(s+t-1)^2+(s+1)^2$

$=(s^2+t^2+1+2st+2t+2s)+(s^2+t^2+1+2st-2t-2s)+(s^2+2s+1)$

$=2t^2+4st+3s^2+2s+3=2(t^2+2st)+3s^2+2s+3$

$=2(t+s)^2-2s^2+3s^2+2s+3=2(t+s)^2+s^2+2s+3$

$=2(t+s)^2+(s+1)^2+2$

ゆえに，$|s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}|^2$ は $t+s=0$ かつ $s+1=0$ すなわち $s=-1$，$t=1$ のとき最小値 2 をとる。

$|s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}|\geqq 0$ であるから，このとき $|s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}|$ も最小で，その最小値は　$\sqrt{2}$

よって　$s=-1$，$t=1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$

$\boxed{5}$

解答　$-\dfrac{1}{2}a^2$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=a\times a\times\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=-\dfrac{1}{2}a^2$

$\boxed{6}$

解答　$(\sqrt{2},\ 1,\ 1)$，60°；$(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$，120°

解説

求めるベクトルを $\vec{a}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$|\vec{a}|=2$ から　$|\vec{a}|^2=4$

ゆえに　$x^2+y^2+z^2=4$　……①

第１講　レベルA

$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とすると，これらは，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きを表す単位ベクトルである。

条件より，$\vec{a}$ と $\overrightarrow{e_1}$ のなす角が 45° であるから　$\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_1}=|\vec{a}||\overrightarrow{e_1}|\cos45^\circ$

すなわち　$x=2\times1\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　よって　$x=\sqrt{2}$ ……②

また，$\vec{a}$ と $\overrightarrow{e_2}$ のなす角が 60° であるから　$\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_2}=|\vec{a}||\overrightarrow{e_2}|\cos60^\circ$

すなわち　$y=2\times1\times\dfrac{1}{2}$　よって　$y=1$ ……③

②，③ を ① に代入して

$$(\sqrt{2})^2+1^2+z^2=4 \quad ゆえに \quad z^2=1$$

よって　$z=\pm1$

したがって　$\vec{a}=(\sqrt{2},\ 1,\ 1)$，$(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$

$\vec{a}$ が z 軸の正の向きとなす角を $\gamma\ (0^\circ\leqq\gamma\leqq180^\circ)$ とすると

[1]　$\vec{a}=(\sqrt{2},\ 1,\ 1)$ のとき

$$\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_3}}{|\vec{a}||\overrightarrow{e_3}|}=\frac{1}{2} \quad よって \quad \gamma=60^\circ$$

[2]　$\vec{a}=(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$ のとき

$$\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_3}}{|\vec{a}||\overrightarrow{e_3}|}=-\frac{1}{2} \quad よって \quad \gamma=120^\circ$$

第１講　レベルB

1

解答　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=8$

解説

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ$

これに $|\vec{a}|=6$ を代入して　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3|\vec{b}|$ ……①

また，$\vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ ……②

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\perp(2\vec{a}-5\vec{b})$ であるから　$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b})=0$ ……③

ここで，$|\vec{a}|=6$ と ①，② から

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b})&=2(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})-5(\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c})\\&=2|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=2\times6^2-3\times3|\vec{b}|-5|\vec{b}|^2\\&=-(5|\vec{b}|^2+9|\vec{b}|-72)=-(5|\vec{b}|+24)(|\vec{b}|-3)\end{aligned}$$

よって，③ から　$(5|\vec{b}|+24)(|\vec{b}|-3)=0$　　$|\vec{b}|>0$ であるから　$|\vec{b}|=3$

これを ① に代入して　$\vec{a}\cdot\vec{b}=9$

したがって

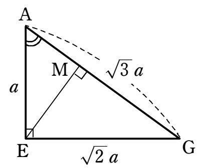
$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=6^2+3^2+1^2+2(9+0+0)=64\end{aligned}$$

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|>0$ であるから　$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=8$

2

解答　(ア) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$　(イ) $-\dfrac{a^2}{3}$　(ウ) $-\dfrac{1}{2}$　(エ) 120

解説



$\mathrm{EG}=\sqrt{2}\,a$，$\mathrm{AG}=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}\,a)^2}=\sqrt{3}\,a$ であるから

$$\mathrm{EM}=\mathrm{AE}\sin\angle\mathrm{EAG}=a\times\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{3}\,a}={}^{ア}\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{DM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}&=(\overrightarrow{\mathrm{EM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}+|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=0$，$\mathrm{MA}=a\cos\angle\mathrm{EAG}=a\times\dfrac{a}{\sqrt{3}\,a}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ であるから

$$0=\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad よって \quad \overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}={}^{イ}-\frac{a^2}{3}$$

また

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}||\overrightarrow{\mathrm{DM}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|^2}=\frac{-\dfrac{a^2}{3}}{\dfrac{2}{3}a^2}={}^{ウ}-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ$ であるから　$\alpha={}^{エ}120^\circ$

3

解答　(1) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　(2) $\dfrac{3}{5}$　(3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ \dfrac{1}{2}r,\ 0\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ -\dfrac{1}{4}r,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}r\right)$

解説

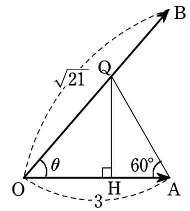
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,\ \sqrt{3},\ 3)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{21},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\cdot3+0\cdot\sqrt{3}+0\cdot3=9$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\dfrac{9}{3\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(2)　$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ と $\angle\mathrm{OAQ}=60^\circ$ は鋭角であるから，Q から線分 OA へ垂線 QH を引くことができる。



また，Q は線分 OB 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0\leqq k\leqq1)$ と表される。

このとき　$\mathrm{OQ}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|k=\sqrt{21}\,k$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

よって　$\mathrm{QH}=\mathrm{OQ}\sin\theta=\sqrt{21}\,k\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=2\sqrt{3}\,k$

また　$\mathrm{HA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{QH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot2\sqrt{3}\,k=2k$

$\mathrm{OH}=\mathrm{OQ}\cos\theta=\sqrt{21}\,k\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{7}=3k$

$\mathrm{OH}+\mathrm{HA}=\mathrm{OA}$ より　$3k+2k=3$

したがって　$k=\dfrac{3}{5}$　($0\leqq k\leqq1$ を満たす)

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(x,\ y,\ z)$ とする。

条件 (A) から　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2=r^2$　すなわち　$x^2+y^2+z^2=r^2$ ……①

条件 (B) から　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos30^\circ$　すなわち　$3x=r\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$ ……②

条件 (C) から　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\sqrt{3}\,r$　すなわち　$3x+\sqrt{3}\,y+3z=2\sqrt{3}\,r$

よって　$\sqrt{3}\,x+y+\sqrt{3}\,z=2r$ ……③

② を ①，③ に代入すると　$y^2+z^2=\dfrac{1}{4}r^2$ ……④，　$y+\sqrt{3}\,z=\dfrac{1}{2}r$ ……⑤

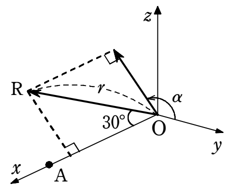
⑤ から　$y=-\sqrt{3}\,z+\dfrac{1}{2}r$ ……⑥

④ に代入して　$\left(-\sqrt{3}\,z+\dfrac{1}{2}r\right)^2+z^2=\dfrac{1}{4}r^2$

整理すると　$z(4z-\sqrt{3}\,r)=0$　　したがって　$z=0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}r$ ……⑦

②，⑥，⑦ から，点 R の座標は　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ \dfrac{1}{2}r,\ 0\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ -\dfrac{1}{4}r,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}r\right)$

別解　条件 (A)，(B) から



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=(r\cos30^\circ,\ r\sin30^\circ\cos\alpha,\ r\sin30^\circ\sin\alpha)\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r,\ \frac{1}{2}r\cos\alpha,\ \frac{1}{2}r\sin\alpha\right)\quad(0^\circ\leqq\alpha<360^\circ)\end{aligned}$$

とおける。ただし，α は $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の yz 平面への正射影と y 軸の正の部分が作る角である。

条件 (C) より　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\sqrt{3}\,r$

よって　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}r+\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\cos\alpha+\dfrac{3}{2}r\sin\alpha=2\sqrt{3}\,r$

整理すると　$\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=1$

$$2\sin(\alpha+30^\circ)=1$$

$$\sin(\alpha+30^\circ)=\frac{1}{2}$$

$30^\circ \leqq \alpha+30^\circ<390^\circ$ であるから　　$\alpha+30^\circ=30^\circ,\ 150^\circ$

よって　　$\alpha=0^\circ,\ 120^\circ$

したがって，点 R の座標は　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r,\ \frac{1}{2}r,\ 0\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r,\ -\frac{1}{4}r,\ \frac{\sqrt{3}}{4}r\right)$

$\boxed{1}$

解答　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}$

解説

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{10}{9}\overrightarrow{OP}=\frac{10}{9}\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OQ}}{4}=\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

よって　$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OB}}{3}$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)+\frac{1}{3}\vec{b}$$

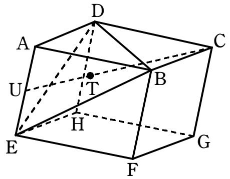
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略，CT : TU=2 : 1　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。



T は △BDE の重心であるから　$\overrightarrow{AT}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}$

よって　　$\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AC}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}-(\vec{b}+\vec{d})$

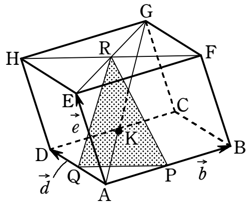
$$=\frac{-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e}}{3}$$

$$\overrightarrow{CU}=\overrightarrow{AU}-\overrightarrow{AC}=\frac{\vec{e}}{2}-(\vec{b}+\vec{d})=\frac{-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e}}{2}$$

ゆえに　　$\overrightarrow{CU}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CT}$

したがって，3 点 C，T，U は一直線上にあり　　CT : TU=2 : 1

(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とすると



$$\overrightarrow{AP}=\frac{\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{AQ}=\frac{\vec{d}}{2}$$

また　　$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

点 R は対角線 EG の中点であるから

$$\overrightarrow{AR}=\frac{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{2}$$

ゆえに，△PQR の重心 K について

$$\overrightarrow{AK}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{d}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{2}\right)$$

$$=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}$$

よって　　$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AK}$

したがって，対角線 AG は △PQR の重心 K を通る。

$\boxed{3}$

解答　$x=6$

解説

[解答 1]　$\overrightarrow{AP}=(3,\ 4,\ x)$，$\overrightarrow{AB}=(2,\ 3,\ 5)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ 2,\ 6)$

3 点 A，B，C は一直線上にないから，点 P が平面 ABC 上にあるための条件は，

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t があることである。

よって　　$(3,\ 4,\ x)=s(2,\ 3,\ 5)+t(0,\ 2,\ 6)$

すなわち　$(3,\ 4,\ x)=(2s,\ 3s+2t,\ 5s+6t)$

ゆえに　　$2s=3,\ 3s+2t=4,\ 5s+6t=x$

よって　　$s=\frac{3}{2},\ t=-\frac{1}{4}$　　　したがって　　$x=6$

[解答 2]　3 点 A，B，C は一直線上にないから，原点を O とすると，点 P が平面 ABC 上にあるための条件は，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$ となる実数 s，t，u があることである。

よって　　$(4,\ 5,\ x)=s(1,\ 1,\ 0)+t(3,\ 4,\ 5)+u(1,\ 3,\ 6)$

すなわち　$(4,\ 5,\ x)=(s+3t+u,\ s+4t+3u,\ 5t+6u)$

ゆえに　　$s+3t+u=4,\ s+4t+3u=5,\ 5t+6u=x$

また　　$s+t+u=1$

これらを解くと　　$s=-\frac{1}{4},\ t=\frac{3}{2},\ u=-\frac{1}{4}$

したがって　　$x=5\cdot\frac{3}{2}+6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=6$

別解　3 点 A，B，C を通る平面の方程式を求めると　　$2x-3y+z+1=0$

この平面上に点 P があるための条件は　　$2\cdot4-3\cdot5+x+1=0$

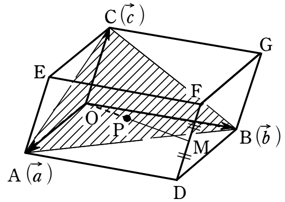
よって　　$x=6$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$　　(2)　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OC}$

解説

(1)　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$



$$=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

点 P は直線 OM 上にあるから，

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}$ (k は実数) とおけて

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}=k\left(\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

また，点 P は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ (s，t は実数) とおけて

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた表し方はただ 1 通りである。

①，② から　　$s=k,\ t=k,\ 1-s-t=\frac{1}{2}k$

s，t を消去すると　　$1-k-k=\frac{1}{2}k$　　　これを解くと　　$k=\frac{2}{5}$

これを ① に代入して　　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$

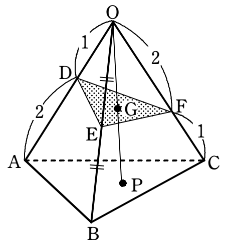
別解　点 P は平面 ABC 上にあるから，① より

$$k+k+\frac{1}{2}k=1 \qquad \text{これを解くと} \qquad k=\frac{2}{5}$$

よって　　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\vec{a}}{3},\quad \overrightarrow{OE}=\frac{\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\vec{c}$$



よって　　$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{3}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{2}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

点 P は直線 OG 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$ (k は実数) とおけて

$$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)=\frac{k}{9}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}k\vec{c} \quad \cdots\cdots ①$$

また，P は平面 ABC 上にあるから，s，t を実数として $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と表される。

これを変形すると　　$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

よって　　$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$　$\cdots\cdots$ ②

①，② から　　$\frac{k}{9}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}k\vec{c}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$$\frac{k}{9}=1-s-t,\quad \frac{k}{6}=s,\quad \frac{2}{9}k=t$$

ゆえに　　$\frac{k}{9}=1-\frac{k}{6}-\frac{2k}{9}$　　　これを解くと　　$k=2$

$k=2$ を ① に代入して　　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$

すなわち　　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OC}$

参考　一直線上にない 3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ の定める平面を α とするとき，
次のことが成り立つ。

点 P$(\vec{p})$ が平面 α 上にある

$\iff$　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1$　(s，t，u は実数)

このことを利用すると，① から直ちに k の値を求めることができる。

(別解)　P は平面 ABC 上にあるから，① より

$$\frac{k}{9}+\frac{k}{6}+\frac{2}{9}k=1 \qquad \text{これを解くと} \qquad k=2$$

$\boxed{5}$

解答　$\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$

解説

点 H は平面 ABC 上にあるから

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，　$s+t+u=1$　$\cdots\cdots$ ①　　(s，t，u は実数)

と表される。

よって　　$\overrightarrow{OH}=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ 1)=(s,\ 2t,\ u)$

OH⊥ 平面 ABC であるから　　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

ここで　　$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から　　$s\times(-1)+2t\times2+u\times0=0$　　　よって　$t=\frac{1}{4}s$　$\cdots\cdots$ ②

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から　　$s\times(-1)+2t\times0+u\times1=0$　　　よって　$u=s$　$\cdots\cdots$ ③

①，②，③ を解くと　　$s=\frac{4}{9}$，$t=\frac{1}{9}$，$u=\frac{4}{9}$

ゆえに，$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$ であるから，点 H の座標は　$\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$

注意　点 P が平面 ABC 上にある

$\iff$　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$ (s，t，u は実数)

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\overrightarrow{MN}=\frac{-3\vec{a}-\vec{b}+4\vec{c}}{6}$，$\overrightarrow{GN}=\frac{-\vec{a}+2\vec{c}}{3}$　　(2)　$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{13}{27}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

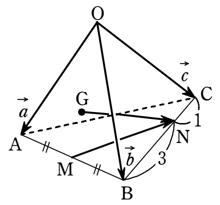
解説

(1)　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{2+1}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

$$=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{-3\vec{a}-\vec{b}+4\vec{c}}{6}$$

$\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$

$$=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{-\vec{a}+2\vec{c}}{3}$$



(2)　点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分するから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

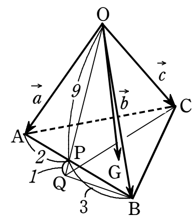
点 Q は線分 OP を 10 : 1 に外分するから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{10}{9}\overrightarrow{OP}=\frac{10}{9}\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$$

点 G は △QBC の重心であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{13}{27}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$



$\boxed{2}$

解答　(1)　証明略，TH : HD＝1 : 2　　(2)　略

解説

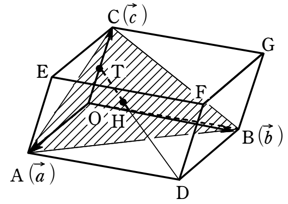
(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

T は辺 OC の中点であるから

$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

H は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



よって　　$\overrightarrow{TH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OT}$

$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{c} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{TD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OT}=\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　　$\overrightarrow{TD}=3\overrightarrow{TH}$

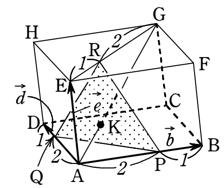
したがって，3 点 T，H，D は一直線上にあり　　TH : HD＝1 : 2

(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\vec{d}$$

また，$\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$　$\cdots\cdots$ ① から

$$\overrightarrow{AR}=\frac{2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+3\vec{e}}{3}$$



ゆえに，△PQR の重心 K について

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}+\frac{\vec{b}+\vec{d}+3\vec{e}}{3}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}\quad\cdots\cdots②$$

①，② から　$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AK}$

したがって，対角線 AG は △PQR の重心 K を通る。

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=1$　　(2)　$z=-6$

解説

(1)　$\overrightarrow{OC}=(x,\ 12,\ 5)$，$\overrightarrow{OA}=(1,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,\ 3,\ -2)$ に対して，

$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ となる実数 s，t があるから

$(x,\ 12,\ 5)=s(1,\ 2,\ 3)+t(-1,\ 3,\ -2)$

すなわち

$(x,\ 12,\ 5)=(s-t,\ 2s+3t,\ 3s-2t)$

ゆえに　$x=s-t$　……①

$12=2s+3t$　……②

$5=3s-2t$　……③

②，③ から　$s=3$，$t=2$

よって，① から　$x=1$

(2)　$\overrightarrow{AD}=(-5,\ -2,\ z-2)$，$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 3)$ に対して，

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t があるから

$(-5,\ -2,\ z-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$

すなわち

$(-5,\ -2,\ z-2)=(s+2t,\ s+t,\ s+3t)$

ゆえに　$-5=s+2t$　……①

$-2=s+t$　……②

$z-2=s+3t$　……③

①，② から　$s=1$，$t=-3$

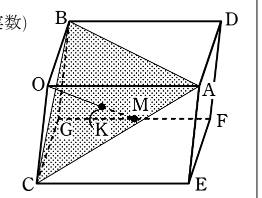
よって，③ から　$z=-6$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$　　(2)　$\overrightarrow{OK}=\frac{6}{23}\vec{a}+\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$

解説

(1)　点 K は直線 OM 上にあるから　$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OM}$ (k は実数) とおける。



ここで　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}=\vec{b}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OM}=k\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{k}{2}\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$

ところで点 K は平面 ABC 上にあるから

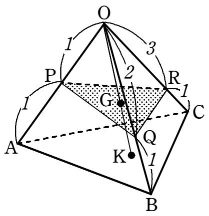
$\frac{k}{2}+k+k=1$

よって　$k=\frac{2}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

(2)　点 K は直線 OG 上にあるから $\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OG}$ (k は実数) とおける。

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}\vec{c}$ であるから



$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OG}=k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)$

$=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{2k}{9}\vec{b}+\frac{k}{4}\vec{c}$

ところで，点 K は平面 ABC 上にあるから　$\frac{k}{6}+\frac{2k}{9}+\frac{k}{4}=1$

よって　$k=\frac{36}{23}$　　したがって　$\overrightarrow{OK}=\frac{6}{23}\vec{a}+\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$

$\boxed{5}$

解答　$\left(\frac{18}{17},\ \frac{12}{17},\ \frac{12}{17}\right)$

解説

H が平面 ABC 上にあるから

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，　$s+t+u=1$　……①

(s，t，u は実数) と表される。

よって　$\overrightarrow{OH}=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 3,\ 0)+u(0,\ 0,\ 3)$

$=(2s,\ 3t,\ 3u)$　……②

OH⊥(平面 ABC) であるから，$\overrightarrow{OH}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直である。

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　……③，　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　……④

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 3,\ 0)$ であるから，③ より　$2s\times(-2)+3t\times3+3u\times0=0$

ゆえに　$-4s+9t=0$　……⑤

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ 3)$ であるから，④ より　$2s\times(-2)+3t\times0+3u\times3=0$

ゆえに　$-4s+9u=0$　……⑥

⑤，⑥ から　$t=\frac{4}{9}s$，$u=\frac{4}{9}s$　……⑦

⑦ を ① に代入して　$s+\frac{4}{9}s+\frac{4}{9}s=1$　　これを解いて　$s=\frac{9}{17}$

このとき，⑦ から　$t=\frac{4}{17}$，$u=\frac{4}{17}$

s，t，u の値を ② に代入すると　$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{18}{17},\ \frac{12}{17},\ \frac{12}{17}\right)$

したがって，点 H の座標は　$\left(\frac{18}{17},\ \frac{12}{17},\ \frac{12}{17}\right)$

$\boxed{1}$

解答　略

解説

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると

$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{\vec{b}}{2}$，　$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$，

$\overrightarrow{AR}=\frac{\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}}{5+1}=\frac{\vec{c}+5\vec{d}}{6}$，　$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

線分 AG を 5 : 1 に内分する点を S とすると

$\overrightarrow{AS}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\times\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}=\frac{5(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})}{18}$

△PQR の重心を H とすると

$\overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}+\frac{\vec{c}+5\vec{d}}{6}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3\vec{b}+2(\vec{b}+2\vec{c})+(\vec{c}+5\vec{d})}{6}=\frac{5(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})}{18}$

よって　$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AH}$

ゆえに，S と H は一致する。

すなわち，線分 AG を 5 : 1 に内分する点は，△PQR の重心と一致する。

$\boxed{2}$

解答　略

解説

点 R が 3 点 A，P，Q の定める平面上にあるための条件は，$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AQ}$ となる実数 s，t が存在することである。

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とすると

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$，　$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FQ}=\vec{a}+\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}$，

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DR}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AQ}$ とすると

$\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=s\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)+t\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)$

よって　$\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=(s+t)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}+\left(\frac{2}{3}s+t\right)\vec{c}$

4 点 A，B，D，E は同じ平面上にないから

$s+t=0$　……①，　$\frac{2}{3}t=1$　……②，　$\frac{2}{3}s+t=\frac{1}{2}$　……③

①，② から　$s=-\frac{3}{2}$，$t=\frac{3}{2}$　　これは ③ を満たす。

ゆえに，$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AQ}$ となる実数 s，t が存在するから，4 点 A，P，Q，R は同一平面上にある。

$\boxed{3}$

解答　辺 BC を 3 : 2 に内分する点を Q，線分 QD を 6 : 5 に内分する点を R とすると，
点 P は線分 AR を 11 : 1 に内分する点

解説

与えられた等式から　$\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})+6(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})=\vec{0}$

よって　$12\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AD}$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AD}}{12}=\dfrac{1}{12}\left(5\times\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}+6\overrightarrow{AD}\right)$

$\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}=\overrightarrow{AQ}$ とおくと

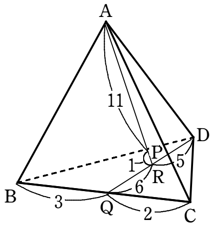
$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{12}(5\overrightarrow{AQ}+6\overrightarrow{AD})=\frac{11}{12}\times\frac{5\overrightarrow{AQ}+6\overrightarrow{AD}}{11}$$

$\dfrac{5\overrightarrow{AQ}+6\overrightarrow{AD}}{11}=\overrightarrow{AR}$ とおくと　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{11}{12}\overrightarrow{AR}$

よって　BQ : QC＝3 : 2，QR : RD＝6 : 5，

AP : PR＝11 : 1

したがって，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を Q，線分 QD を 6 : 5 に内分する点を R とすると，点 P は線分 AR を 11 : 1 に内分する点である。



4

解答　(1)　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{7}\vec{c}+\dfrac{2}{7}\vec{d}$　　(2)　2 : 1

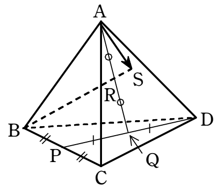
解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{d}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}$$

$$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\times\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{8}$$



点 S は直線 BR 上にあるから

$\overrightarrow{BS}=k\overrightarrow{BR}$　…… ①

(k は実数) とおける。

① から　$\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AB})$

よって　$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+k(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AB})=\vec{b}+k\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{8}-\vec{b}\right)$

$=\left(1-\dfrac{7}{8}k\right)\vec{b}+\dfrac{k}{8}\vec{c}+\dfrac{k}{4}\vec{d}$　…… ②

また，点 S は平面 ACD 上にあるから，s，t を実数として

$\overrightarrow{AS}=s\vec{c}+t\vec{d}$　…… ③　　と表される。

②，③ から　$\left(1-\dfrac{7}{8}k\right)\vec{b}+\dfrac{k}{8}\vec{c}+\dfrac{k}{4}\vec{d}=s\vec{c}+t\vec{d}$

4 点 A，B，C，D は同じ平面上にないから

$$1-\frac{7}{8}k=0,\quad \frac{k}{8}=s,\quad \frac{k}{4}=t$$

よって　$k=\dfrac{8}{7}$，$s=\dfrac{1}{7}$，$t=\dfrac{2}{7}$　　　したがって　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{7}\vec{c}+\dfrac{2}{7}\vec{d}$

(2)　点 T は直線 AS 上にあるから，$\overrightarrow{AT}=l\overrightarrow{AS}$ (l は実数) とおける。

(1) から　$\overrightarrow{AT}=l\left(\dfrac{1}{7}\vec{c}+\dfrac{2}{7}\vec{d}\right)=\dfrac{l}{7}\vec{c}+\dfrac{2}{7}l\vec{d}$

T は直線 CD 上にあるから　$\dfrac{l}{7}+\dfrac{2}{7}l=1$　　　ゆえに　$l=\dfrac{7}{3}$

よって　$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{2}{3}\vec{d}=\dfrac{\vec{c}+2\vec{d}}{2+1}$

すなわち，T は辺 CD を 2 : 1 に内分する。

したがって　CT : TD＝2 : 1

5

解答　OR : OQ＝10 : 23

解説

O に関する位置ベクトルを考え，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$，E$(\vec{e})$，F$(\vec{f})$ とする。

また，R は線分 OQ 上にあるから，OR : OQ＝k : 1 とおくと，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OC}}{2+3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$$

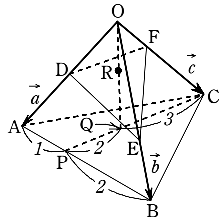
$=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}\right)=\frac{2}{5}k\vec{a}+\frac{1}{5}k\vec{b}+\frac{2}{5}k\vec{c}$$

$\vec{d}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\vec{e}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\vec{f}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}k\cdot 2\vec{d}+\frac{1}{5}k\cdot\frac{3}{2}\vec{e}+\frac{2}{5}k\cdot 3\vec{f}$$

$=\dfrac{4}{5}k\vec{d}+\dfrac{3}{10}k\vec{e}+\dfrac{6}{5}k\vec{f}$　…… ①



R は平面 DEF 上にあるから，$\overrightarrow{DR}=s\overrightarrow{DE}+t\overrightarrow{DF}$ とおくと

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DR}=\vec{d}+s(\vec{e}-\vec{d})+t(\vec{f}-\vec{d})$

$=(1-s-t)\vec{d}+s\vec{e}+t\vec{f}$　…… ②

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，①，② より

$$1-s-t=\frac{4}{5}k,\quad s=\frac{3}{10}k,\quad t=\frac{6}{5}k$$

これを解くと $k=\dfrac{10}{23}$ であるから　OR : OQ＝$\dfrac{10}{23}$: 1＝10 : 23

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$ から　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

ゆえに　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ …… ①

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$

よって　$|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2-2(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB})$

OA＝OB と ① から　$|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2=0$

したがって　$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$　　すなわち　AC＝BC

(2)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ であるから

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OG}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\dfrac{1}{3}(|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})$

OA＝OB と ① から　$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AB}$

別解　辺 AB の中点を M とする．

(1)　OA＝OB であるから　OM⊥AB

また，OC⊥AB であるから　(平面 OCM)⊥AB

よって　CM⊥AB　　　したがって　AC＝BC

(2)　G は線分 CM 上にあるから，平面 OCM 上にある．

(平面 OCM)⊥AB であるから　OG⊥AB　すなわち　$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AB}$

2

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=3$　　(2)　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

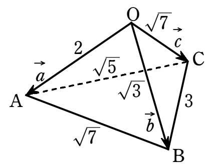
解説

(1)　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{7}$ から　　$|\overrightarrow{AB}|^2=(\sqrt{7})^2$

よって　　$|\vec{b}-\vec{a}|^2=7$

すなわち　　$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=7$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ を代入して整理すると　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$



$|\overrightarrow{BC}|=3$ から　　$|\overrightarrow{BC}|^2=3^2$

よって　　$|\vec{c}-\vec{b}|^2=9$

すなわち　　$|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=9$

$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=\sqrt{7}$ を代入して整理すると　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$

$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{5}$ から　　$|\overrightarrow{CA}|^2=(\sqrt{5})^2$

よって　　$|\vec{a}-\vec{c}|^2=5$

すなわち　　$|\vec{a}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2=5$

$|\vec{c}|=\sqrt{7}$，$|\vec{a}|=2$ を代入して整理すると　　$\vec{c}\cdot\vec{a}=3$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ (x, y は実数) とおく。

CH⊥平面 α であるから　　$\mathrm{CH}\perp\mathrm{OA}$，$\mathrm{CH}\perp\mathrm{OB}$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ から　　$(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

よって　　$x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　　ゆえに　　$4x-3=0$　　よって　　$x=\dfrac{3}{4}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から　　$(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　　$x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　よって　　$3y-\dfrac{1}{2}=0$　　ゆえに　　$y=\dfrac{1}{6}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

(3)　$\cos\angle\mathrm{AOB}=0$ より，$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ であるから

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|=\sqrt{3}$$

また　　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}-\vec{c}\right|^2$

$$=\frac{9}{16}|\vec{a}|^2+\frac{1}{36}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{9}{16}\times4+\frac{1}{36}\times3+7-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\times3=\frac{56}{12}=\frac{14}{3}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|>0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\dfrac{14}{3}}$

ゆえに，四面体 OABC の体積は　　$\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

$\boxed{3}$

解答　AS : SC＝6 : 1

解説

点 S は線分 AC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(0\leqq k\leqq1)$

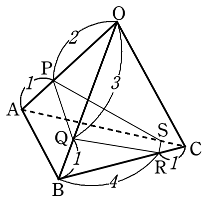
とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　……①

また，点 S は 3 点 P，Q，R を通る平面上にあるから，

実数 s，t，u を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+u\overrightarrow{\mathrm{OR}},\ s+t+u=1$$

と表される。



ここで，BR : RC＝4 : 1 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4+1}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{3}{4}t+\frac{1}{5}u\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{5}u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots②$$

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから，①，② より

$$1-k=\frac{2}{3}s,\ 0=\frac{3}{4}t+\frac{1}{5}u,\ k=\frac{4}{5}u$$

ゆえに　　$s=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}k$，$t=-\dfrac{1}{3}k$，$u=\dfrac{5}{4}k$

これらを $s+t+u=1$ に代入して　　$\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}k-\dfrac{1}{3}k+\dfrac{5}{4}k=1$

よって　　$k=\dfrac{6}{7}$　　これは $0\leqq k\leqq1$ を満たす。

ゆえに　　AS : SC＝6 : 1

$\boxed{1}$

解答　(1)　内分 $\left(\dfrac{11}{4},\ -2,\ \dfrac{5}{4}\right)$，外分 $\left(\dfrac{1}{2},\ -5,\ -\dfrac{5}{2}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{13}{2},\ 0,\ 3\right)$　　(3)　$(5,\ -1,\ 2)$

解説

(1)　線分 AB を 1 : 3 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{3\cdot2+1\cdot5}{1+3},\ \frac{3\cdot(-3)+1\cdot1}{1+3},\ \frac{3\cdot0+1\cdot5}{1+3}\right)\ \text{すなわち}\ \left(\frac{11}{4},\ -2,\ \frac{5}{4}\right)$$

線分 AB を 1 : 3 に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-3\cdot2+1\cdot5}{1-3},\ \frac{-3\cdot(-3)+1\cdot1}{1-3},\ \frac{-3\cdot0+1\cdot5}{1-3}\right)\ \text{すなわち}\ \left(\frac{1}{2},\ -5,\ -\frac{5}{2}\right)$$

(2)　$\left(\dfrac{5+8}{2},\ \dfrac{1+(-1)}{2},\ \dfrac{5+1}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{13}{2},\ 0,\ 3\right)$

(3)　$\left(\dfrac{2+5+8}{3},\ \dfrac{-3+1+(-1)}{3},\ \dfrac{0+5+1}{3}\right)$　すなわち　$(5,\ -1,\ 2)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=18$　　(2)　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=8$

(3)　$(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=4$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+\{-1-(-2)\}^2+(-1-3)^2}=3\sqrt{2}$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2+(z-3)^2=(3\sqrt{2})^2$$

したがって　　$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=18$

(2)　線分 AB の中点 M が球面の中心であるから

$$\mathrm{M}\left(\frac{3-1}{2},\ \frac{2+2}{2},\ \frac{-4+0}{2}\right)\ \text{すなわち}\ \mathrm{M}(1,\ 2,\ -2)$$

また　　$\mathrm{AM}=\sqrt{(1-3)^2+(2-2)^2+\{-2-(-4)\}^2}=2\sqrt{2}$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2+\{z-(-2)\}^2=(2\sqrt{2})^2$$

したがって　　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=8$

(3)　中心の z 座標が 2 であるから，球面の半径は　2

よって，求める球面の方程式は

$$(x-3)^2+\{y-(-5)\}^2+(z-2)^2=2^2$$

したがって　　$(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=4$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=4+3t$，$y=5+2t$，$z=3-4t$；$\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$

(2)　$x=1+t$，$y=2-3t$，$z=3+2t$；$x-1=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$

解説

(1)　点 A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y,\ z)=(4,\ 5,\ 3)+t(3,\ 2,\ -4)$$

すなわち　　$x=4+3t$，$y=5+2t$，$z=3-4t$

また，t を消去して　　$\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$

(2)　2 点 A，B を通る直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y,\ z)=(1-t)(1,\ 2,\ 3)+t(2,\ -1,\ 5)$$

すなわち　$x=1+t,\ y=2-3t,\ z=3+2t$

また，t を消去して　$x-1=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$

4

解答　$(9,\ -8,\ 0)$

解説

与えられた直線上の点 P の原点を始点とする位置ベクトル $\vec{p}$ は

$\vec{p}=(2,\ 6,\ 7)+t\vec{u}=(t+2,\ -2t+6,\ -t+7)$ (t は実数)　と表される．

よって，P$(x,\ y,\ z)$ とおくと　$x=t+2,\ y=-2t+6,\ z=-t+7$

よって，P が xy 平面上にあるとすると $z=0$ から　$-t+7=0$　すなわち　$t=7$

このとき，$x=9,\ y=-8$ であるから　P$(9,\ -8,\ 0)$

5

解答　$(6,\ 9,\ 12)$

解説

2 直線 ℓ，m は，s，t を実数として

$$\ell:(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 0)+s(1,\ 2,\ 3)=(2+s,\ 1+2s,\ 3s)$$

$$m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ -3)+t(2,\ 3,\ 5)=(2t,\ 3t,\ -3+5t)$$

と表される。

$(2+s,\ 1+2s,\ 3s)=(2t,\ 3t,\ -3+5t)$ とすると

$2+s=2t$ ……①，　$1+2s=3t$ ……②，　$3s=-3+5t$ ……③

①，② から　$s=4,\ t=3$　　これは ③ を満たす。

したがって，ℓ と m の交点の座標は　$(6,\ 9,\ 12)$

6

解答　H$(2,\ -4,\ -2)$，OH$=2\sqrt{6}$

解説

H は直線 AB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t がある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(5,\ -2,\ -3)$　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ 2,\ -1)$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(5,\ -2,\ -3)+t(3,\ 2,\ -1)=(5+3t,\ -2+2t,\ -3-t) \quad \cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$3(5+3t)+2(-2+2t)-(-3-t)=0$$

これを解いて　$t=-1$

よって，① から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ -4,\ -2)$

したがって，H の座標は　$(2,\ -4,\ -2)$

また　$\mathrm{OH}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$

7

解答　(1)　$3x-2y+4z=7$　(2)　$2x-3y+9z-6=0$

解説

(1)　求める平面の方程式は　$3\times(x-1)+(-2)\times(y-2)+4\times(z-2)=0$

すなわち　$3x-2y+4z=7$

(2)

[解答 1]　平面の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)\ (\vec{n}\neq\vec{0})$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(6,\ -2,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3,\ -2,\ 0)$ であるから，

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　よって　$6a-2b-2c=0$ ……①

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　よって　$-3a-2b=0$ ……②

①，② から　$b=-\dfrac{3}{2}a,\ c=\dfrac{9}{2}a$　ゆえに　$\vec{n}=\dfrac{a}{2}(2,\ -3,\ 9)$

$\vec{n}\neq\vec{0}$ より，$a\neq0$ であるから，$\vec{n}=(2,\ -3,\ 9)$ とする。

よって，求める平面は，点 A$(0,\ 1,\ 1)$ を通り $\vec{n}=(2,\ -3,\ 9)$ に垂直であるから，その方程式は

$$2x-3(y-1)+9(z-1)=0 \quad \text{すなわち} \quad 2x-3y+9z-6=0$$

[解答 2]　求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とすると

A$(0,\ 1,\ 1)$ を通るから　$b+c+d=0$ ……①

B$(6,\ -1,\ -1)$ を通るから　$6a-b-c+d=0$ ……②

C$(-3,\ -1,\ 1)$ を通るから　$-3a-b+c+d=0$ ……③

① ～ ③ から　$b=-\dfrac{3}{2}a,\ c=\dfrac{9}{2}a,\ d=-3a$

よって，求める平面の方程式は　$ax-\dfrac{3}{2}ay+\dfrac{9}{2}az-3a=0$

$a\neq0$ であるから　$2x-3y+9z-6=0$

1

解答　(1)　$\left(\dfrac{21}{8},\ -\dfrac{15}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$　(2)　$\left(3,\ -\dfrac{1}{2},\ 5\right)$　(3)　$\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{9}{2},\ -4\right)$

(4)　$\left(\dfrac{73}{24},\ -\dfrac{55}{24},\ \dfrac{3}{4}\right)$

解説

(1)　$\left(\dfrac{5\cdot3+3\cdot2}{3+5},\ \dfrac{5\cdot(-3)+3\cdot0}{3+5},\ \dfrac{5\cdot(-1)+3\cdot5}{3+5}\right)$

よって　P$\left(\dfrac{21}{8},\ -\dfrac{15}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{0+(-1)}{2},\ \dfrac{5+5}{2}\right)$　よって　Q$\left(3,\ -\dfrac{1}{2},\ 5\right)$

(3)　$\left(\dfrac{-3\cdot3+1\cdot2}{1-3},\ \dfrac{-3\cdot(-3)+1\cdot0}{1-3},\ \dfrac{-3\cdot(-1)+1\cdot5}{1-3}\right)$

よって　R$\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{9}{2},\ -4\right)$

(4)　$\left(\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{21}{8}+3+\dfrac{7}{2}\right),\ \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{15}{8}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2}\right),\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{4}+5-4\right)\right)$

よって　G$\left(\dfrac{73}{24},\ -\dfrac{55}{24},\ \dfrac{3}{4}\right)$

2

解答　(1)　$(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=13$　(2)　$(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=27$

(3)　$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(\sqrt{5}-0)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-3)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=(\sqrt{13})^2$$

ゆえに　$(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=13$

(2)　線分 AB の中点 M が球面の中心であるから

$$\mathrm{M}\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{1+7}{2},\ \frac{2+(-4)}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{M}(2,\ 4,\ -1)$$

また　$\mathrm{AM}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(4-1)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{3}$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-2)^2+(y-4)^2+\{z-(-1)\}^2=(3\sqrt{3})^2$$

ゆえに　$(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=27$

(3)　中心の y 座標が -3 であるから，球面の半径は 3 となる。

よって，求める球面の方程式は

$$(x-2)^2+\{y-(-3)\}^2+(z-1)^2=3^2$$

ゆえに　$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

3

解答　(1)　$x=1+2t,\ y=1+3t,\ z=-1+t$；$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$

(2)　$x=5+t,\ y=8-17t,\ z=-7+10t$；$x-5=\dfrac{y-8}{-17}=\dfrac{z+7}{10}$

解説

(1)　求める直線の媒介変数表示は　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ -1)+t(2,\ 3,\ 1)$

すなわち　$x=1+2t,\ y=1+3t,\ z=-1+t$

t を消去して　$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$

(2)　求める直線の方向ベクトル $\vec{d}$ は

$$\vec{d}=(6-5,\ -9-8,\ 3-(-7))=(1,\ -17,\ 10)$$

点 $(5,\ 8,\ -7)$ を通るから　$(x,\ y,\ z)=(5,\ 8,\ -7)+t(1,\ -17,\ 10)$

よって　$x=5+t$，$y=8-17t$，$z=-7+10t$

t を消去して　$x-5=\dfrac{y-8}{-17}=\dfrac{z+7}{10}$

4

解答　$(0,\ -1,\ 9)$

解説

点 $(3,\ 5,\ 6)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(1,\ 2,\ -1)$ に平行な直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと　$x=3+t$，$y=5+2t$，$z=6-t$　（t は実数）

と表すことができる。

$x=0$ とすると　$t=-3$　　このとき　$y=-1$，$z=9$

よって，求める交点の座標は　$(0,\ -1,\ 9)$

5

解答　$\left(\dfrac{11}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$

解説

2 直線が交点をもつとき，$(1,2,-3)+s\vec{a}=(4,-3,1)+t\vec{b}$ を満たす実数 s，t が存在する.

よって　$(1,2,-3)+s(3,-1,2)=(4,-3,1)+t(3,7,-2)$ から

$(3s+1,-s+2,2s-3)=(3t+4,7t-3,-2t+1)$

ゆえに　$3s+1=3t+4$，$-s+2=7t-3$，$2s-3=-2t+1$

整理して　$s=t+1$，$-s=7t-5$，$s=-t+2$

第 1，第 3 式から　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$　　これは第 2 式を満たす.

よって，交点の 座標は　$(3s+1,-s+2,2s-3)=\left(\dfrac{11}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$

6

解答　$\mathrm{H}(4,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{PH}=3$

解説

H は直線 AB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t がある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-3,\ -1,\ -7)$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(8,\ 6,\ 10)$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(-3,\ -1,\ -7)+t(8,\ 6,\ 10)$$
$$=(-3+8t,\ -1+6t,\ -7+10t)\ \cdots\cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$8(-3+8t)+6(-1+6t)+10(-7+10t)=0$$

これを解いて　$t=\dfrac{1}{2}$

よって，① から　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(1,\ 2,\ -2)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(3,\ -1,\ 4)+(1,\ 2,\ -2)=(4,\ 1,\ 2)$

したがって，H の座標は　$(4,\ 1,\ 2)$

また　$\mathrm{PH}=|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$

7

解答　(1)　①　$2x+5y+z+9=0$　　②　$z=0$

(2)　①　$3x+7y+2z-7=0$　　②　$3x+2y+6z-6=0$

解説

(1)　①　求める平面の方程式は

$$2(x-1)+5(y+3)+(z-4)=0\quad すなわち\quad 2x+5y+z+9=0$$

②　求める平面の方程式は

$$0\times(x-\sqrt{2})+0\times(y-2)+z=0\quad すなわち\quad z=0$$

(2)　①

［解答 1］　平面の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)\ (\vec{n}\neq\vec{0})$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1,\ -5)$ であるから，

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　　よって　$-a+b-2c=0$ ……①

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　　よって　$a+b-5c=0$ ……②

①，② から　$a=\dfrac{3}{2}c$，$b=\dfrac{7}{2}c$　　ゆえに　$\vec{n}=\dfrac{c}{2}(3,\ 7,\ 2)$

$\vec{n}\neq\vec{0}$ より，$c\neq0$ であるから，$\vec{n}=(3,\ 7,\ 2)$ とする。

よって，求める平面は，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を通り $\vec{n}=(3,\ 7,\ 2)$ に垂直であるから，その方程式は　$3(x-1)+7y+2(z-2)=0$　　すなわち　$3x+7y+2z-7=0$

［解答 2］　求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とすると，3 点 A，B，C を通ることから　$a+2c+d=0$ ……①，$b+d=0$ ……②，$2a+b-3c+d=0$ ……③

①～③ から　$a=-\dfrac{3}{7}d$，$b=-d$，$c=-\dfrac{2}{7}d$

よって，求める平面の方程式は　$-\dfrac{3}{7}dx-dy-\dfrac{2}{7}dz+d=0$

$d\neq0$ であるから　$3x+7y+2z-7=0$

②　求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とすると，3 点 A，B，C を通ることから　$2a+d=0$，$3b+d=0$，$c+d=0$

ゆえに　$a=-\dfrac{d}{2}$，$b=-\dfrac{d}{3}$，$c=-d$

よって，求める平面の方程式は　$-\dfrac{d}{2}x-\dfrac{d}{3}y-dz+d=0$

$d\neq0$ であるから　$3x+2y+6z-6=0$

1

解答　(1)　中心の座標は $(4,\ -3,\ 2)$，半径は $\sqrt{29}$

(2)　$(x-4)^2+(y+3)^2=25$，$z=0$

解説

(1)　球面の方程式を

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

とする。

点 O，A，B，C がこの球面上にあるから

$D=0$，$16+4C+D=0$，

$1+1+A+B+D=0$，

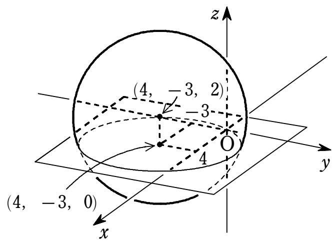
$1+1+36+A-B+6C+D=0$

この連立方程式を解いて

$A=-8$，$B=6$，$C=-4$，$D=0$

よって，球面の方程式は

$x^2+y^2+z^2-8x+6y-4z=0$



変形すると　$(x-4)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=29$

中心の座標は $(4,\ -3,\ 2)$，半径は $\sqrt{29}$

(2)　xy 平面では $z=0$ であるから　$(x-4)^2+(y+3)^2=25$，$z=0$

2

解答　$k=-6$

解説

2 直線 ℓ，m は，s，t を実数として

$$\ell:(x,\ y,\ z)=(-2,\ 0,\ 2)+s(-3,\ 2,\ k)$$
$$=(-2-3s,\ 2s,\ 2+ks)$$
$$m:(x,\ y,\ z)=(-3,\ -3,\ 0)+t(2,\ -1,\ 4)$$
$$=(-3+2t,\ -3-t,\ 4t)$$

と表される。

ℓ と m が交わるとき，

$$(-2-3s,\ 2s,\ 2+ks)=(-3+2t,\ -3-t,\ 4t)$$

を満たす実数 s，t，k が存在する。

よって　$-2-3s=-3+2t$ ……①，$2s=-3-t$ ……②，$2+ks=4t$ ……③

①，② から　$s=-7$，$t=11$

これらを ③ に代入して　$2-7k=44$　　したがって　$k=-6$

3

解答　$\alpha=30^\circ$

解説

$\vec{d_1}=(3,\ 5,\ 4)$，$\vec{d_2}=(1,\ -10,\ -7)$ とすると，$\vec{d_1}$，$\vec{d_2}$ はそれぞれ直線 ℓ，m に平行である。

$\vec{d_1}$ と $\vec{d_2}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\frac{3\times1+5\times(-10)+4\times(-7)}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+(-10)^2+(-7)^2}}$$
$$=\frac{-75}{5\sqrt{2}\times5\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=150^\circ$

α は鋭角であるから　$\alpha=180°-\theta=180°-150°=30°$

4

解答 (1) $(-1,\ 5,\ -3)$　(2) $k=4$，接点の座標は $(-2,\ 0,\ 4)$

解説

(1) ℓ の方程式は $(x,\ y,\ z)=(2,\ 4,\ -1)+t(3,\ -1,\ 2)$ から

$$x=2+3t,\ y=4-t,\ z=-1+2t\ (t\text{ は実数})$$

これらを $2x+3y-z=16$ に代入して

$$2(2+3t)+3(4-t)-(-1+2t)=16$$

よって　$t=-1$

ゆえに，求める交点の座標は　$(-1,\ 5,\ -3)$

(2) m の方程式は $(x,\ y,\ z)=(-3,\ -1,\ 0)+t(1,\ 1,\ k)$ から

$$x=-3+t,\ y=-1+t,\ z=kt\ (t\text{ は実数})\ \cdots\cdots ①$$

また，球面の方程式は　$x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

① を代入すると　$(-3+t)^2+(-3+t)^2+(kt-3)^2=9$

よって　$(k^2+2)t^2-6(k+2)t+18=0$　……②

直線 m が球面に接する条件は，2 次方程式 ② の判別式 D に

ついて　$\dfrac{D}{4}=\{-3(k+2)\}^2-18(k^2+2)=0$

ゆえに　$k^2-4k=0$　　よって　$k(k-4)=0$

ゆえに　$k=0,\ 4$　　$k>0$ であるから　$k=4$

このとき，② から　$t=-\dfrac{-3(4+2)}{4^2+2}=1$

よって，接点の座標は，① から　$(-2,\ 0,\ 4)$

1

解答 $(2,\ -3,\ 4)$

解説

円の方程式を変形すると

$$(x-2)^2+(y+3)^2=9,\ z=0\ \cdots\cdots ①$$

これは xy 平面上で中心 $(2,\ -3,\ 0)$ の円を表す。

ゆえに，球の中心の座標は $(2,\ -3,\ p)\ (p>0)$ と表され，半径が 5 であるから，その方程式は　$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-p)^2=5^2$

この球面と xy 平面の交わりの図形の方程式は

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(0-p)^2=25,\ z=0$$

よって　$(x-2)^2+(y+3)^2=25-p^2,\ z=0$

条件より，この方程式が ① と一致するから　$25-p^2=9$

ゆえに　$p^2=16$　　$p>0$ であるから　$p=4$

したがって，求める球の中心の座標は　$(2,\ -3,\ 4)$

別解 [球の中心の座標を $(2,\ -3,\ p)\ (p>0)$ とおくまでは同じ。]

球の半径は 5，円 ① の半径は 3 であるから，三平方の定理により　$p^2+3^2=5^2$

$p>0$ であるから　$p=4$

したがって，求める球の中心の座標は　$(2,\ -3,\ 4)$

2

解答 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 2,\ 0)$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(1,\ -1,\ 1)$ であるから，直線 ℓ，m の方程式は，s，t を実数とすると

$\ell:(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ -1)+s(-1,\ 1,\ 2)$ から　$x=1-s,\ y=1+s,\ z=-1+2s$

$m:(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 1)+t(1,\ -1,\ 1)$ から　$x=2+t,\ y=1-t,\ z=1+t$

よって，$\mathrm{P}(1-s,\ 1+s,\ -1+2s)$，$\mathrm{Q}(2+t,\ 1-t,\ 1+t)$ とすると

$$\mathrm{PQ}^2=(1+t+s)^2+(-t-s)^2+(2+t-2s)^2=6s^2-6s+3t^2+6t+5$$

$$=6\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+3(t+1)^2+\frac{1}{2}$$

よって，PQ^2 は $s=\dfrac{1}{2}$ かつ $t=-1$，すなわち $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 2,\ 0)$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

$\mathrm{PQ}>0$ であるから，PQ はこのとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとる。

別解 $\mathrm{P}(1-s,\ 1+s,\ -1+2s)$，$\mathrm{Q}(2+t,\ 1-t,\ 1+t)$ とするところまでは同じ。

長さ PQ が最小となるのは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のときであるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ より

$$-1\times(1+s+t)+1\times(-s-t)+2\times(2-2s+t)=0,$$

$$1\times(1+s+t)-1\times(-s-t)+1\times(2-2s+t)=0$$

ゆえに，$-6s+3=0$，$3t+3=0$ から　$s=\dfrac{1}{2},\ t=-1$

このとき $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 2,\ 0)$，最小値は　$\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2+0^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3

解答 (1) $30°$　(2) $3x+y-2z-4=0$

解説

(1) 直線 ℓ の方向ベクトル $\vec{d}$ は，$\vec{d}=(4,\ -1,\ 1)$ とおける。

平面 α の法線ベクトル $\vec{n}$ は，$\vec{n}=(1,\ -4,\ 1)$ とおける。

$\vec{d}$ と $\vec{n}$ のなす角を $\theta_1\ (0°\leqq\theta_1\leqq180°)$ とすると

$$\cos\theta_1=\frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}||\vec{n}|}$$

$$=\frac{4\cdot1+(-1)\cdot(-4)+1\cdot1}{\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta_1\leqq180°$ であるから　$\theta_1=60°$

よって，直線 ℓ と平面 α のなす角は　$90°-60°=30°$

(2) 直線 $\dfrac{x-6}{3}=y-2=\dfrac{z-1}{-2}$ の方向ベクトル $\vec{d}$ は，$\vec{d}=(3,\ 1,\ -2)$ とおける。

求める平面は点 A $(1,\ 1,\ 0)$ を通り，$\vec{d}$ を法線ベクトルとする平面であるから，その方程式は

$$3\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+(-2)(z-0)=0$$

ゆえに　$3x+y-2z-4=0$

4

解答 (1) $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{2}$　(2) $6x+2y+3z+6=0$

解説

(1) ②－① から　$6y-9z+18=0$　　よって　$z=\dfrac{2(y+3)}{3}$

①×2＋② から　$9x+9z=0$　　ゆえに　$z=-x$

よって，$-x=\dfrac{2(y+3)}{3}=z$ から　$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{2}$

(2) 交線 ℓ 上に 2 点 A $(0,\ -3,\ 0)$，B $(-2,\ 0,\ 2)$ があるから，γ は 3 点 A，B，P を通る平面である。

平面 γ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)\ (\vec{n}\neq\vec{0})$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 3,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1,\ -6,\ 2)$ であるから，

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　　よって　$-2a+3b+2c=0$ ……③

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$　　よって　$a-6b+2c=0$　……④

③，④ から　$a=3b$，$c=\dfrac{3}{2}b$　　ゆえに　$\vec{n}=\dfrac{b}{2}(6,\ 2,\ 3)$

$\vec{n}\neq\vec{0}$ より，$b\neq0$ であるから，$\vec{n}=(6,\ 2,\ 3)$ とする。

よって，平面 γ は点 A $(0,\ -3,\ 0)$ を通り，$\vec{n}=(6,\ 2,\ 3)$ に垂直であるから，その方程式は　$6x+2(y+3)+3z=0$　すなわち　$6x+2y+3z+6=0$