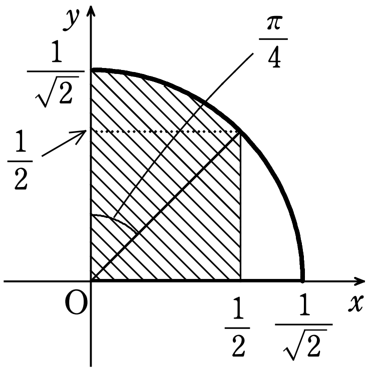
$\boxed{1}$

(解説)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx+\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x^2)'\cdot(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}dx$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{24}+\frac{1}{6}$$



また，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積と等しいから

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{\pi}{16}$$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\left(-\frac{\sqrt{2}}{24}+\frac{1}{6}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{\pi}{16}\right)$

$$=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$$

2

(解説)

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\log(1+x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2 + \int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta = \Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}$

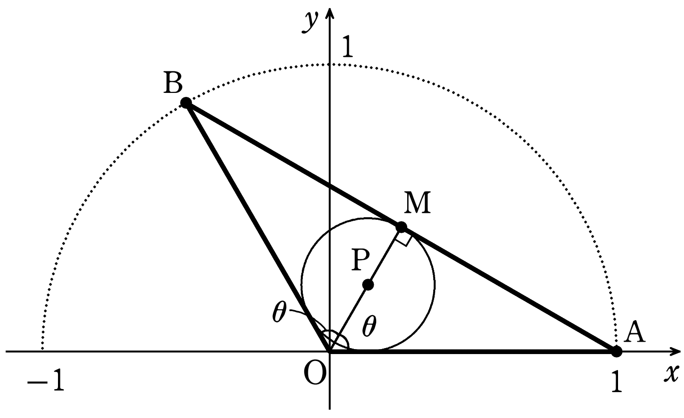
したがって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2 + \frac{\pi}{12}$

3

(解説)

(1)　$\triangle$OAB は OA＝OB である二等辺三角形であり，AB の中点を M とすると，

M の座標は　$\left(\dfrac{1+\cos 2\theta}{2},\ \dfrac{\sin 2\theta}{2}\right)$



また，$\angle$AOM＝θ であるから　AM＝$\sin\theta$

AP は $\angle$OAB の二等分線であるから　OP：PM＝AO：AM＝1：$\sin\theta$

よって，点 P の x 座標は　$\dfrac{1}{1+\sin\theta}\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2} = \dfrac{2-2\sin^2\theta}{2(1+\sin\theta)} = 1-\sin\theta$

y 座標は　$\dfrac{1}{1+\sin\theta}\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$

したがって，点 P の座標は　$\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$

(2) $\begin{cases} x=1-\sin\theta \\ y=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta} \end{cases}$ とすると，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\cos\theta$ であるから，x は単調に減少する。

また，θ と x の対応は右のようになる。

x	$0 \to 1$
θ	$\dfrac{\pi}{2} \to 0$

よって，D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2(-\cos\theta)d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\cdot\cos\theta\, d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}\cdot\cos\theta\, d\theta$$

ここで，$1+\sin\theta=t$ とおくと　$\cos\theta\, d\theta=dt$

また，θ と t の対応は右のようになる。

θ	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$
t	$1 \to 2$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_1^2\frac{(t-1)^2(2-t)}{t}dt=\pi\int_1^2\left(-t^2+4t-5+\frac{2}{t}\right)dt$

$$=\pi\left[-\frac{t^3}{3}+2t^2-5t+2\log t\right]_1^2=\left(2\log 2-\frac{4}{3}\right)\pi$$

$\boxed{4}$

(解説)

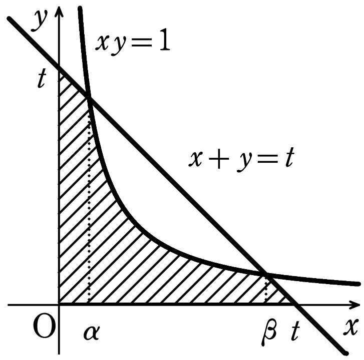
$t>2$ のとき，直線 $x+y=t$ と曲線 $xy=1$ との共有点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とおく。$x(t-x)=1$ から

$$x^2-tx+1=0$$

よって

$$\alpha+\beta=t,\ \alpha\beta=1\ (\alpha<\beta)$$

$$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2},\ \beta=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$$



ゆえに　$\beta-\alpha=\sqrt{t^2-4}$

$$S(t)=\frac{1}{2}t^2-\left\{\frac{1}{2}(t-\alpha+t-\beta)(\beta-\alpha)-\int_\alpha^\beta\frac{1}{x}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}+\Big[\log|x|\Big]_\alpha^\beta=\frac{1}{2}t\left(t-\sqrt{t^2-4}\right)+\log\frac{\beta}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}t\left(t-\sqrt{t^2-4}\right)+\log\frac{\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}t\left(t-\sqrt{t^2-4}\right)+2\log\beta$$

$$=\frac{1}{2}t\cdot\frac{t^2-(t^2-4)}{t+\sqrt{t^2-4}}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$$

$$=\frac{2t}{t+\sqrt{t^2-4}}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S(t)-2\log t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2t}{t+\sqrt{t^2-4}}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2t}\right)$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}+2\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{1+1}+2\cdot0=1$$