高1数学総合S　総復習問題［小問］

$\boxed{1}$［2022 宮崎大］

x を実数とするとき，次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

$$8^x+8^{-x}-(4^x+4^{-x})-11\geqq 0$$

$\boxed{2}$［2023 札幌医科大］

$\sqrt{23}$ の整数部分を n_0，$(\sqrt{23}-n_0)^{-1}$ の整数部分を n_1，$\{(\sqrt{23}-n_0)^{-1}-n_1\}^{-1}$ の整数部分を n_2 とする。このとき $n_0+(n_1+n_2{}^{-1})^{-1}$ を求めよ。

$\boxed{3}$［2023 宮崎大］

$a=2023$，$b=1742$ とする。このとき，

$$\frac{1}{ab}=\frac{m}{a}+\frac{n}{b}$$

となる整数の組 $(m,\ n)$ で，$1\leqq n\leqq 2000$ を満たすものをすべて求めよ。

$\boxed{4}$［2023 琉球大］

1 個のさいころを 6 の目が 2 回出るまで投げ続ける。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して p_k を $k+1$ 回目に 2 回目の 6 の目が出る確率とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_k を求めよ。

(2)　p_k を最大にする k の値を求めよ。

(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k$ を求めよ。

$\boxed{5}$［2023 群馬大］

3 次関数 $f(x)$ は常に $f(-x)=-f(x)$ を満たし，$x=1$ のときに極大値 2 をとる。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分のうち，$y\geqq 0$ の領域にある部分を D とする。直線 $y=ax$ が D の面積を 2 等分するように a の値を定めよ。

$\boxed{6}$［2023 鳥取大］

$\triangle$ABC において，$\angle$A$=60^\circ$，AB$=8$，AC$=6$ とする。$\triangle$ABC の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

$\boxed{7}$［2022 徳島大］

$a=18^{50}$ とする。次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　$\log_{10}\sqrt{18}$，および $\log_{10}5$ の値を求めよ。

(2)　a の桁数，および a の最高位の数字を求めよ。

(3)　a を 5 進法で表したときの桁数，および最高位の数字を求めよ。

$\boxed{8}$［2023 福島県立医科大］

右表は，100 人の生徒を 2 つのクラス X，Y に分けて行った試験の結果である。100 人全員の点数についての平均点が 60 点，分散が 87 であるとき，X クラスの平均点 $\overline{x}$ の値を求めよ。ただし，$\overline{x}<\overline{y}$ である。

クラス	人数	平均点	分散
X	60	$\overline{x}$	83
Y	40	$\overline{y}$	78

$\boxed{9}$［2022 三重大］

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n{}^5\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。この数列の一般項を求めよ。

$\boxed{10}$［2020 弘前大］

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$$

$\boxed{11}$［佐賀大］

方程式 $z^5=1$ の解 z について

(1)　$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ を用いて $z+\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

(2)　$\cos\dfrac{4}{5}\pi$ の値を求めよ。

$\boxed{12}$［香川大］

楕円 $C:x^2+9y^2=1$ と直線 $\ell:y=t(x-3)$ を考える。ただし，t は実数とする。

(1)　C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつような t の値の範囲を求めよ。また，これら 2 点を結ぶ線分の中点 M の座標を t を用いて表せ。

(2)　t の値が (1) で求めた範囲を動くとき，点 M の描く図形を図示せよ。

$\boxed{1}$［2022 宮崎大］

解答　$x \leqq \log_2(3-\sqrt{5})-1$，$\log_2(3+\sqrt{5})-1 \leqq x$

$\boxed{2}$［2023 札幌医科大］

解答　$\dfrac{19}{4}$

$\boxed{3}$［2023 宮崎大］

解答　$(m,\ n)=(-36,\ 31)$，$(-2059,\ 1773)$

$\boxed{4}$［2023 琉球大］

解答　(1)　$p_k=\dfrac{k\cdot 5^{k-1}}{6^{k+1}}$　　(2)　$k=5$，6　　(3)　$S_n=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\dfrac{n}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

$\boxed{5}$［2023 群馬大］

解答　(1)　$f(x)=-x^3+3x$　　(2)　$a=3-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{6}$［2023 鳥取大］

解答　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\boxed{7}$［2022 徳島大］

解答　(1)　順に，0.6276，0.6990　(2)　桁数は 63，最高位の数字は 5

(3)　桁数は90，最高位の数字は 3

$\boxed{8}$［2023 福島県立医科大］

解答　58

$\boxed{9}$［2022 三重大］

解答　$a_n=3^{\frac{1}{4}(5^{n-1}-1)}$

$\boxed{10}$［2020 弘前大］

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{11}$［佐賀大］

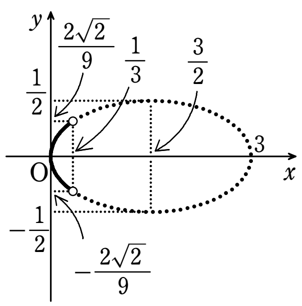
解答　(1)　$z+\dfrac{1}{z}=2$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　　(2)　$\cos\dfrac{4}{5}\pi=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{12}$［香川大］

解答　(1)　$-\dfrac{\sqrt{2}}{12}<t<\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

$\mathrm{M}\left(\dfrac{27t^2}{9t^2+1},\ -\dfrac{3t}{9t^2+1}\right)$

(2)　〔図〕



$\boxed{1}$ [2022 宮崎大]

解説

$t=2^x+2^{-x}$ とおく。

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

よって　$t\geqq 2$　……①

$$t^2=(2^x+2^{-x})^2=4^x+4^{-x}+2,\quad t^3=(2^x+2^{-x})^3=8^x+8^{-x}+3(2^x+2^{-x})$$

であるから

$$4^x+4^{-x}=t^2-2,\quad 8^x+8^{-x}=t^3-3t$$

よって，不等式は　$t^3-t^2-3t-9\geqq 0$　すなわち　$(t-3)(t^2+2t+3)\geqq 0$

$t^2+2t+3=(t+1)^2+2>0$ であるから　$t-3\geqq 0$

ゆえに　$t\geqq 3$

これは ① を満たす。

したがって　$2^x+2^{-x}\geqq 3$

両辺に $2^x\,(>0)$ をかけて整理すると　$(2^x)^2-3\cdot 2^x+1\geqq 0$

よって　$2^x\leqq\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\leqq 2^x$

ゆえに　$x\leqq\log_2(3-\sqrt{5})-1$，$\log_2(3+\sqrt{5})-1\leqq x$

$\boxed{2}$ [2023 札幌医科大]

解説

$16<23<25$ であるから　$4<\sqrt{23}<5$

よって，$\sqrt{23}$ の整数部分は　$n_0=4$

したがって

$$(\sqrt{23}-n_0)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{23}-4}=\frac{\sqrt{23}+4}{(\sqrt{23}-4)(\sqrt{23}+4)}=\frac{\sqrt{23}+4}{7}$$

$8<\sqrt{23}+4<9$ であるから　$\dfrac{8}{7}<\dfrac{\sqrt{23}+4}{7}<\dfrac{9}{7}$

よって　$n_1=1$

したがって

$$\{(\sqrt{23}-n_0)^{-1}-n_1\}^{-1}=\left(\frac{\sqrt{23}+4}{7}-1\right)^{-1}=\left(\frac{\sqrt{23}-3}{7}\right)^{-1}$$

$$=\frac{7}{\sqrt{23}-3}=\frac{7(\sqrt{23}+3)}{(\sqrt{23}-3)(\sqrt{23}+3)}=\frac{\sqrt{23}+3}{2}$$

$7<\sqrt{23}+3<8$ であるから　$\dfrac{7}{2}<\dfrac{\sqrt{23}+3}{2}<4$

よって　$n_2=3$

ゆえに　$n_0+(n_1+n_2{}^{-1})^{-1}=4+\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=4+\dfrac{3}{4}=\dfrac{19}{4}$

$\boxed{3}$ [2023 宮崎大]

解説

$a>0$，$b>0$ であるから，$\dfrac{1}{ab}=\dfrac{m}{a}+\dfrac{n}{b}$ の両辺に ab を掛けて整理すると

$$an+bm=1$$

よって　$2023n+1742m=1$　……①

2023 と 1742 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$2023=1742\cdot1+281$　移項すると　$281=2023-1742\cdot1$

$1742=281\cdot6+56$　移項すると　$56=1742-281\cdot6$

$281=56\cdot5+1$　移項すると　$1=281-56\cdot5$

よって　$1=281-56\cdot5=281-(1742-281\cdot6)\cdot5$

$=281\cdot31-1742\cdot5=(2023-1742\cdot1)\cdot31-1742\cdot5$

$=2023\cdot31+1742\cdot(-36)$

したがって　$2023\cdot31+1742\cdot(-36)=1$　……②

①−② から　$2023(n-31)+1742(m+36)=0$

互除法の計算により，2023 と 1742 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$m+36=-2023k,\quad n-31=1742k$$

すなわち　$m=-2023k-36$，$n=1742k+31$

$1\leqq n\leqq 2000$ を満たすとき，$k=0$，1 であるから

$k=0$ のとき　$m=-36$，$n=31$

$k=1$ のとき　$m=-2059$，$n=1773$

したがって，求める整数の組 $(m,\ n)$ は　$(m,\ n)=(-36,\ 31)$，$(-2059,\ 1773)$

$\boxed{4}$ [2023 琉球大]

解説

(1)　p_k は，k 回目までに 6 の目が 1 回出て，$(k+1)$ 回目に 6 の目が出る確率であるから

$$p_k={}_k\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}=\frac{k\cdot5^{k-1}}{6^{k+1}}$$

(2)　(1) から　$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}=\dfrac{(k+1)\cdot5^k}{6^{k+2}}\times\dfrac{6^{k+1}}{k\cdot5^{k-1}}=\dfrac{5(k+1)}{6k}$

$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ とすると　$\dfrac{5(k+1)}{6k}>1$　　よって　$k<5$

$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}<1$ とすると　$\dfrac{5(k+1)}{6k}<1$　　ゆえに　$k>5$

よって　$p_1<p_2<\cdots\cdots<p_5=p_6$，$p_6>p_7>\cdots\cdots$

ゆえに，p_k を最大にする k の値は

$k=5$，6

(3)　$$S_n=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}=\frac{1}{36}\left\{1+2\cdot\frac{5}{6}+3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

両辺に $\dfrac{5}{6}$ を掛けると

$$\frac{5}{6}S_n=\frac{1}{36}\left\{\frac{5}{6}+2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots\cdots+(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+n\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

辺々を引くと

$$\frac{1}{6}S_n=\frac{1}{36}\left\{1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-n\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}-\frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$=\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}-\frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって　$S_n=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\dfrac{n}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

$\boxed{5}$ [2023 群馬大]

解説

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq0)$ とおくと　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$ のとき極大値 2 をとるから　$f(1)=2$，$f'(1)=0$

ゆえに　$a+b+c+d=2$　……①

$3a+2b+c=0$　……②

$f(-x)=-f(x)$ より　$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$

ゆえに　$2bx^2+2d=0$　……③

③ がすべての x に対して成り立つから　$b=0$，$d=0$

①，② に代入して　$a+c=2$，$3a+c=0$

これを解いて　$a=-1$，$c=3$

逆に，このとき　$f(x)=-x^3+3x$

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm1$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘

したがって　$f(x)=-x^3+3x$

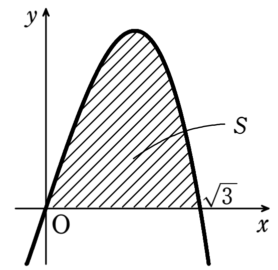
(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は，

$-x^3+3x=0$ すなわち $-x(x^2-3)=0$ を解いて

$x=\pm\sqrt{3}$，0

よって，D の面積 S は

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}(-x^3+3x)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{9}{4}$$



曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ の交点の x 座標は，

$-x^3+3x=ax$ すなわち $x^3+(a-3)x=0$

を解いて　$x=0$，$\pm\sqrt{3-a}$

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が原点以外の共有点を

もつとき　$3-a>0$

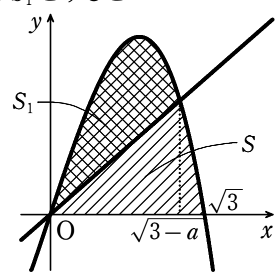
ゆえに　$a<3$

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_0^{\sqrt{3-a}}(-x^3+3x-ax)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3-a}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3-a}}$$

$$=\frac{1}{4}(3-a)^2$$



直線 $y=ax$ が D の面積を 2 等分するとき

$0<\sqrt{3-a}<\sqrt{3}$ かつ $2S_1=S$

すなわち　$0<a<3$ かつ $\dfrac{1}{2}(3-a)^2=\dfrac{9}{4}$

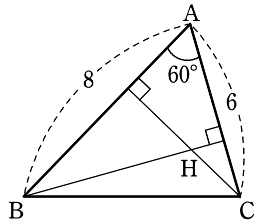
$\dfrac{1}{2}(3-a)^2=\dfrac{9}{4}$ から　$3-a=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$0<a<3$ より　$a=3-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

6 [2023 鳥取大]

解説

実数 α, β を用いて, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。



$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

すなわち　$(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

よって　$(\alpha-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\beta|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=8\times6\times\cos60^\circ=24$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=36$ から

$24(\alpha-1)+36\beta=0$

ゆえに　$2\alpha+3\beta=2$　…… ①

また, $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

すなわち　$(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって　$\alpha|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+(\beta-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

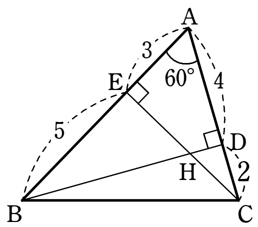
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=64$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=24$ から　$64\alpha+24(\beta-1)=0$

ゆえに　$8\alpha+3\beta=3$　…… ②

①, ② から　$\alpha=\dfrac{1}{6}$, $\beta=\dfrac{5}{9}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

別解　点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を D, 点 C から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB の交点を E とする。



$\angle\mathrm{A}=60^\circ$ であるから,

AB$=8$ より　AD$=4$

AC$=6$ より　AE$=3$

よって, DC$=2$, EB$=5$ であるから,

△ACE と直線 BD において, メネラウスの定理

により　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}}\times\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}}\times\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{HC}}=1$

よって　$\dfrac{2}{4}\times\dfrac{8}{5}\times\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{HC}}=1$

すなわち　$\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{HC}}=\dfrac{5}{4}$

したがって　EH : HC$=5:4$

点 H は線分 EC を $5:4$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AE}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5+4}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

7 [2022 徳島大]

解説

(1)　$\log_{10}\sqrt{18}=\dfrac{1}{2}\log_{10}(2\times3^2)=\dfrac{1}{2}(\log_{10}2+2\log_{10}3)$

$=\dfrac{1}{2}(0.3010+2\times0.4771)=0.6276$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

(2)　$\log_{10}a=\log_{10}18^{50}=50\log_{10}18=50(\log_{10}2+2\log_{10}3)$

$=50(0.3010+2\times0.4771)=62.76$

よって　$a=10^{62.76}=10^{0.76}\cdot10^{62}$

また　$\log_{10}5=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

したがって　$\log_{10}5<0.76<\log_{10}6$

よって　$5<10^{0.76}<6$

$5\cdot10^{62}<10^{0.76}\cdot10^{62}<6\cdot10^{62}$

ゆえに　$5\cdot10^{62}<a<6\cdot10^{62}$

したがって, a は 63 桁であり, 最高位の数字は 5 である。

(3)　$\log_5 a=\log_5 18^{50}=50\log_5 18=\dfrac{50\log_{10}18}{\log_{10}5}=\dfrac{62.76}{0.6990}=89.78$ ……

よって　$89.7<\log_5 a<89.8$

ゆえに　$5^{89.7}<a<5^{89.8}$　すなわち　$5^{0.7}\cdot5^{89}<a<5^{0.8}\cdot5^{89}$　…… ①

また　$\log_5 3=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}5}=\dfrac{0.4771}{0.6990}=0.68$ ……

$\log_5 4=\dfrac{2\log_{10}2}{\log_{10}5}=\dfrac{0.602}{0.6990}=0.86$ ……

よって　$\log_5 3<0.7<0.8<\log_5 4$　すなわち　$3<5^{0.7}<5^{0.8}<4$　…… ②

①, ② から　$3\cdot5^{89}<a<4\cdot5^{89}$

したがって, a を 5 進法で表したときの桁数は 90 桁であり, 最高位の数字は 3 である。

8 [2023 福島県立医科大]

解説

X クラスと Y クラスの点数の 2 乗の平均値をそれぞれ $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ とすると, 平均点と分散から　$\overline{x^2}-(\overline{x})^2=83$, $\overline{y^2}-(\overline{y})^2=78$

すなわち　$\overline{x^2}=(\overline{x})^2+83$　…… ①

$\overline{y^2}=(\overline{y})^2+78$　…… ②

また, 100 人全員の点数の平均値を $\overline{z}$, 点数の 2 乗の平均値を $\overline{z^2}$ とすると, 平均点と分散から　$\overline{z^2}-(\overline{z})^2=87$

よって　$\overline{z^2}=(\overline{z})^2+87$　…… ③

ここで, X クラスは 60 人, Y クラスは 40 人であるから

$60\overline{x}+40\overline{y}=100\overline{z}$, $60\overline{x^2}+40\overline{y^2}=100\overline{z^2}$

すなわち　$3\overline{x}+2\overline{y}=5\overline{z}$　…… ④

$3\overline{x^2}+2\overline{y^2}=5\overline{z^2}$　…… ⑤

ここで, $\overline{x}=\overline{z}-k$ とすると, ④ から

$3(\overline{z}-k)+2\overline{y}=5\overline{z}$

すなわち　$\overline{y}=\overline{z}+\dfrac{3}{2}k$

$\overline{x}<\overline{y}$ であるから　$k>0$

⑤ に ①, ②, ③ を代入して

$3\{(\overline{x})^2+83\}+2\{(\overline{y})^2+78\}=5\{(\overline{z})^2+87\}$

整理すると

$3(\overline{x})^2+2(\overline{y})^2=5(\overline{z})^2+30$

よって　$3(\overline{z}-k)^2+2\left(\overline{z}+\dfrac{3}{2}k\right)^2=5(\overline{z})^2+30$

整理すると　$k^2=4$

$k>0$ であるから　$k=2$

したがって, $\overline{z}=60$ であるから　$\overline{x}=\overline{z}-2=58$

9 [2022 三重大]

解説

$a_1=1>0$ と漸化式の形から, 数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して

$a_n>0$

よって, $a_{n+1}=3a_n{}^5$ の両辺の 3 を底とする対数をとると

$\log_3 a_{n+1}=\log_3 3a_n{}^5$

したがって　$\log_3 a_{n+1}=5\log_3 a_n+1$

よって, $b_n=\log_3 a_n$ とすると　$b_1=\log_3 a_1=0$, $b_{n+1}=5b_n+1$

この漸化式を変形すると　$b_{n+1}+\dfrac{1}{4}=5\left(b_n+\dfrac{1}{4}\right)$

したがって, 数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{4}\right\}$ は初項 $b_1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$, 公比 5 の等比数列であるから

$b_n+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\cdot5^{n-1}$

よって　$b_n=\dfrac{1}{4}(5^{n-1}-1)$

ゆえに　$\log_3 a_n=\dfrac{1}{4}(5^{n-1}-1)$

したがって　$a_n=3^{\frac{1}{4}(5^{n-1}-1)}$

10 [2020 弘前大]

解説

$\sin\theta+\cos\theta=t$ とすると　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$

よって　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　…… ①

$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ から　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$

ゆえに, $\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$ を t を用いて表すと

$t+\dfrac{t^2-1}{2}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$　すなわち　$t^2+2t-2-2\sqrt{2}=0$

よって　$(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}+2)=0$　ゆえに　$t=\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-2$

① から　$t=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ から　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ であるから　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　よって　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{11}$ [佐賀大]

(解説)

(1) $z^5=1$ から　$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

[1] $z=1$ のとき　$z+\dfrac{1}{z}=2$

[2] $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ のとき　$z \fallingdotseq 0$ であるから，

両辺を z^2 で割ると　$z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0$

ゆえに　$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)-1=0$

よって　$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

[1]，[2] から　$z+\dfrac{1}{z}=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2) z は 1 の 5 乗根であるから

$$z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$k=2$ のとき　$z=\cos\dfrac{4}{5}\pi+i\sin\dfrac{4}{5}\pi$ であり

$$z+\frac{1}{z}=\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)+\left(\cos\frac{4}{5}\pi-i\sin\frac{4}{5}\pi\right)=2\cos\frac{4}{5}\pi$$

$\cos\dfrac{4}{5}\pi<0$ であるから，(1) より　$2\cos\dfrac{4}{5}\pi=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

よって　$\cos\dfrac{4}{5}\pi=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{12}$ [香川大]

(解説)

(1) $x^2+9y^2=1$，$y=t(x-3)$ から y を消去すると　$x^2+9\{t(x-3)\}^2=1$

整理すると　$(9t^2+1)x^2-54t^2x+81t^2-1=0$　……①

x の 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-27t^2)^2-(9t^2+1)(81t^2-1)=-72t^2+1$$

① が異なる 2 つの実数解をもつから　$D>0$

よって　$-72t^2+1>0$

これを解くと　$-\dfrac{\sqrt{2}}{12}<t<\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

また，C と ℓ の共有点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，α，β は ① の実数解であるから，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=\dfrac{54t^2}{9t^2+1}$

点 M の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{27t^2}{9t^2+1},\quad Y=t(X-3)=t\left(\frac{27t^2}{9t^2+1}-3\right)=-\frac{3t}{9t^2+1}$$

よって，点 M の座標は　$\left(\dfrac{27t^2}{9t^2+1},\ -\dfrac{3t}{9t^2+1}\right)$

(2) (1) より　$X=-9t\cdot\left(-\dfrac{3t}{9t^2+1}\right)=-9tY$　……②

また，$X=3-\dfrac{3}{9t^2+1}\fallingdotseq 3$ であるから，$Y=t(X-3)$ より

$$t=\frac{Y}{X-3}$$

これを ② に代入して　$X=-\dfrac{9Y^2}{X-3}$

よって　$X(X-3)+9Y^2=0$　すなわち　$\left(X-\dfrac{3}{2}\right)^2+9Y^2=\dfrac{9}{4}$

また，(1) より $0\leqq t^2<\dfrac{1}{72}$ であるから　$1\leqq 9t^2+1<\dfrac{9}{8}$

よって，$\dfrac{8}{3}<\dfrac{3}{9t^2+1}\leqq 3$ であるから　$0\leqq 3-\dfrac{3}{9t^2+1}<\dfrac{1}{3}$

すなわち　$0\leqq X<\dfrac{1}{3}$

したがって，点 M の軌跡は楕円 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+9y^2=\dfrac{9}{4}$ の $0\leqq x<\dfrac{1}{3}$ の部分

であり，点 M が描く図形は右の図の実線部分である。