$\boxed{1}$［2017 大阪大］

(解説)

(1)　$a_1=2>0$ で，$a_{n+1}=8a_n{}^2$ であるから，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である。

よって，$a_{n+1}=8a_n{}^2$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 8a_n{}^2$$

よって　$\log_2 a_{n+1}=\log_2 8+2\log_2 a_n$

ゆえに　$b_{n+1}=2b_n+3$　……①

(2)　① を変形して　$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$

また　$b_1+3=\log_2 a_1+3=1+3=4$

数列 $\{b_n+3\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n+3=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}\qquad \text{すなわち}\qquad b_n=2^{n+1}-3$$

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n>0$ であるから，$P_n>0$ である。

よって，$P_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 P_n=\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots\cdots+\log_2 a_n$$

ゆえに，(2) から

$$\begin{aligned}\log_2 P_n&=\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-3)\\&=\frac{4(2^n-1)}{2-1}-3n\\&=2^{n+2}-3n-4\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

よって　$P_n=2^{2^{n+2}-3n-4}$

(4)　$P_n>10^{100}$ について，両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 P_n>100\log_2 10\quad\cdots\cdots③$$

ここで，② から　$\log_2 P_{n+1}-\log_2 P_n=2^{n+3}-3(n+1)-2^{n+2}+3n$
$=2^{n+2}-3$

$n\geqq 1$ のとき，$2^{n+2}-3>0$ であるから　$\log_2 P_{n+1}-\log_2 P_n>0$

よって，$\log_2 P_n$ は単調に増加するから，③ を満たす最小の自然数 n について考える。

$\log_2 8<\log_2 10<\log_2 16$ であるから　$3<\log_2 10<4$

ゆえに　$300<100\log_2 10<400$

② から　$\log_2 P_6=2^8-3\cdot 6-4=234<300$,

$\log_2 P_7=2^9-3\cdot 7-4=487>400$

よって，③ を満たす最小の自然数 n は $n=7$ であり，求める最小の自然数 n は　$n=7$

$\boxed{2}$ [2017 京都大]

解説

n 桁の数 X を X_n とおく。k 回目に取り出したカードの数字を $a_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とおくと，X_n が 3 で割り切れるための条件は，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ が 3 で割り切れることである。

ここで，X_n が 3 で割り切れる確率を P_n，3 で割って 1 余る確率を Q_n，3 で割って 2 余る確率を R_n とする。

X_{n+1} が 3 で割り切れるのは，次の 3 つの場合がある。

[1]　X_n が 3 で割り切れ，$a_{n+1}=3$ となるとき

[2]　X_n が 3 で割ると 1 余る数で，$a_{n+1}=2,\ 5$ となるとき

[3]　X_n が 3 で割ると 2 余る数で，$a_{n+1}=1,\ 4$ となるとき

よって　$P_{n+1}=P_n\times\dfrac{1}{5}+Q_n\times\dfrac{2}{5}+R_n\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}P_n+\dfrac{2}{5}(Q_n+R_n)$

ここで，$P_n+Q_n+R_n=1$ であるから

$$P_{n+1}=\frac{1}{5}P_n+\frac{2}{5}(1-P_n)$$

すなわち　$P_{n+1}=-\dfrac{1}{5}P_n+\dfrac{2}{5}$

これを変形すると　$P_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{5}\left(P_n-\dfrac{1}{3}\right)$

また　$P_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{15}$

ゆえに，数列 $\left\{P_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $-\dfrac{2}{15}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$P_n-\frac{1}{3}=-\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

したがって　$P_n=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n+\dfrac{1}{3}$

$\boxed{3}$ [2017 神戸大]

(解説)

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c\ (a \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0)$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通るから　　$a+b+c=4$　…… ①

また　　$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{2}=3a+\frac{3}{2}b+3c$

$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx=15$ であるから　　$3a+\dfrac{3}{2}b+3c=15$

すなわち　　$2a+b+2c=10$　…… ②

①×2−② から　　$b=-2$

よって，$f(x)$ の 1 次の項の係数は　　-2

(2)　解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

ここで，②−① から　　$a+c=6$　　　すなわち　　$c=-a+6$

ゆえに　　$\alpha\beta=\dfrac{-a+6}{a}=\dfrac{6}{a}-1=3\cdot\dfrac{2}{a}-1=3(\alpha+\beta)-1$

したがって　　$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)-1$

(3)　(2) から　　$\alpha\beta-3\alpha-3\beta+1=0$

これを変形すると　　$(\alpha-3)(\beta-3)=8$　…… ③

α と β がともに正の整数であるとき　　$\alpha-3 \geqq -2$，$\beta-3 \geqq -2$

よって，③ を満たす $\alpha-3$ と $\beta-3$ の組は

$$(\alpha-3,\ \beta-3)=(1,\ 8),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (8,\ 1)$$

すなわち　　$(\alpha,\ \beta)=(4,\ 11),\ (5,\ 7),\ (7,\ 5),\ (11,\ 4)$

[1]　$(\alpha,\ \beta)=(4,\ 11),\ (11,\ 4)$ のとき

$\alpha+\beta=15$ であるから，(2) より　　$a=\dfrac{2}{15}$，$c=-a+6=\dfrac{88}{15}$

これは $a \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ を満たす。

[2]　$(\alpha,\ \beta)=(5,\ 7),\ (7,\ 5)$ のとき

$\alpha+\beta=12$ であるから，(2) より　　$a=\dfrac{1}{6}$，$c=-a+6=\dfrac{35}{6}$

これは $a \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ を満たす。

[1]，[2] から　　$f(x)=\dfrac{2}{15}x^2-2x+\dfrac{88}{15}$，$\dfrac{1}{6}x^2-2x+\dfrac{35}{6}$

$\boxed{4}$ [2017 北海道大]

(解説)

(1)　$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

$f'(x)=0$ のとき　　$x=0,\ \pi,\ 2\pi$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

したがって，$f(x)$ は $x=\pi$ で最大値 $\pi+1$ をとり，$x=2\pi$ で最小値 $1-2\pi$ をとる。

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\pi+1$	$\searrow$	$1-2\pi$

(2)　$\displaystyle\int f(x)dx=\int(1+\sin x-x\cos x)dx=x-\cos x-\int x(\sin x)'dx$

$$=x-\cos x-\left(x\sin x-\int\sin x\,dx\right)=x-\cos x-(x\sin x+\cos x)+C$$

$$=x-x\sin x-2\cos x+C$$ （C は積分定数）

(3)　(1) の増減表から，$f(x)=0$ を満たす実数 x は，$\pi<x<2\pi$ の範囲にただ 1 つ存在する。ここで，$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=0$ であるから，(2) より

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}f(x)dx$$

$$=\Big[x-x\sin x-2\cos x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}-\Big[x-x\sin x-2\cos x\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$=4\pi+4$$

$\boxed{5}$ [2017 東京大]

(解説)

(1)　$y=ax+b$ と $y=x^2+k$ から y を消去して整理すると　　$x^2-ax+k-b=0$

この 2 次方程式の判別式を E_1 とすると　　$E_1=(-a)^2-4(k-b)=a^2-4(k-b)$

直線と放物線 C が接する必要十分条件は $E_1=0$ である。

よって　　$k-b=\dfrac{1}{4}a^2$　……①

$a=0$ であるとすると，直線 $y=b$ は放物線 D とただ 1 点で交わるから，接線でない。

ゆえに，$a\neq 0$ であるから　　$x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$

これと $x=y^2+k$ から x を消去して整理すると　　$y^2-\dfrac{1}{a}y+k+\dfrac{b}{a}=0$

この 2 次方程式の判別式を E_2 とすると

$$E_2=\left(-\frac{1}{a}\right)^2-4\left(k+\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a^2}-4\left(k+\frac{b}{a}\right)$$

直線と放物線 D が接する必要十分条件は $E_2=0$ である。

よって　　$k+\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4a^2}$　……②

①，② から　　$(a+1)k=\dfrac{a^3+1}{4a}$　……③

$a \fallingdotseq -1$ であるから，両辺を $a+1$ で割って　　$k=\dfrac{a^3+1}{4a(a+1)}=\dfrac{a^2-a+1}{4a}$

これと ① から　　$b=\dfrac{a^2-a+1}{4a}-\dfrac{1}{4}a^2=\dfrac{-a^3+a^2-a+1}{4a}$

(2)　$a=2$ のとき　　$k=\dfrac{3}{8}$

$k=\dfrac{3}{8}$ のとき，③ を満たす実数 a の値を求めると

$$\frac{3}{8}(a+1)=\frac{a^3+1}{4a}$$

$$2a^3-3a^2-3a+2=0$$

$$(a+1)(a-2)(2a-1)=0$$

$$a=-1,\ 2,\ \frac{1}{2}$$

これと ① から，それぞれ　$b=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$，$b=\dfrac{3}{8}-1=-\dfrac{5}{8}$，$b=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$

よって，共通接線は　$y=-x+\dfrac{1}{8}$，$y=2x-\dfrac{5}{8}$，$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{16}$　の 3 本が存在し，傾きと y 切片の組は　　$\left(-1,\ \dfrac{1}{8}\right)$，$\left(2,\ -\dfrac{5}{8}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{16}\right)$