高2理系数学総合S　課題(12月5日まで)　～面積等～

$\boxed{1}$

$a>0$ とし，座標平面上の点 A $(a,\ 0)$ から曲線 $C$：$y=\dfrac{1}{x}$ に引いた接線を $\ell$ とする。

(1)　接線 $\ell$ の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $C$ と接線 $\ell$，および直線 $x=a$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

$a>1$ に対して，3 つの曲線 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=a\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を $a$ の式で表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to1+0}\frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ。

$\boxed{3}$

$t$ を媒介変数として，$x=4\cos t$，$y=\sin 2t$　$\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{4}$

$xy$ 平面上に 3 点 A $(1,\ 0)$，P $(p,\ 0)$，Q $(p,\ \log p)$ がある。ただし，$p>1$ とする。

(1)　直線 AQ の方程式を求めよ。

(2)　関数 $y=\log x$ の第 2 次導関数 $y''$ を求め，曲線 $y=\log x$ が上に凸であることを示せ。

(3)　曲線 $y=\log x$ と直線 AQ で囲まれた図形の面積 $S(p)$ を求めよ。

(4)　△APQ の面積を $T(p)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ。

$\boxed{5}$

座標空間の 3 つの動点 P $(x,\ 0,\ 0)$，Q $(x,\ \sin x,\ 0)$，R $(x,\ 0,\ x+\sin x)$ について

(1)　三角形 PQR の面積を $x$ を用いて表せ。ただし，$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2)　点 P が $x$ 軸上を原点 O $(0,\ 0,\ 0)$ から点 A $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0,\ 0\right)$ まで動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体の体積 $V$ を求めよ。

$\boxed{6}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の範囲で，曲線 $y=\cos x$ と曲線 $y=\cos 2x$ とで囲まれた図形を $x$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ。

$\boxed{7}$

正の実数 $a$ に対し，座標平面上に曲線 $C$：$y=a^4x+\sin ax$ と直線 $\ell$：$y=a^4x$ がある。

(1)　$C$ と $\ell$ の交点の $x$ 座標のうち，正で最小の値を $x_1$ とする。$x_1$ を $a$ で表せ。

(2)　(1) の $x_1$ に対し，$0\leqq x\leqq x_1$ の範囲で，$C$ と $\ell$ で囲まれた図形を $x$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。$V(a)$ を $a$ で表せ。

(3)　(2) の $V(a)$ に対し，関数 $y=V(a)$ の増減を調べ，$y$ の最小値とそのときの $a$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$

中心が原点 O で半径が $a$ の定円 $C_1$ 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 $C_2$ が内接しながらすべることなく回転する。円 $C_2$ 上の点 P は最初に点 A $(a,\ 0)$ にあるとする。円 $C_2$ の中心を B とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を $a$，$\theta$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $a$，$\theta$ で表せ。

(3)　$0\leqq\theta\leqq2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めよ。

$\boxed{1}$

解答 (1) $y=-\dfrac{4}{a^2}x+\dfrac{4}{a}$ (2) $\log 2-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$

解答 (1) $S(a)=\sqrt{2}-1+a-\sqrt{a^2+1}\ (a>1)$ (2) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{3}$

解答 $\dfrac{8}{3}$

$\boxed{4}$

解答 (1) $y=\dfrac{\log p}{p-1}x-\dfrac{\log p}{p-1}$ (2) $y''=-\dfrac{1}{x^2}$，証明略

(3) $S(p)=\dfrac{p+1}{2}\log p-p+1$ (4) 1

$\boxed{5}$

解答 (1) $\dfrac{1}{2}\sin x(x+\sin x)$ (2) $\dfrac{4+\pi}{8}$

$\boxed{6}$

解答 $V=\dfrac{\pi(\pi+3\sqrt{3})}{8}$

$\boxed{7}$

解答 (1) $x_1=\dfrac{\pi}{a}$ (2) $V(a)=\dfrac{4a^3+1}{2a}\pi^2$ (3) $a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{3}{2}\pi^2$

$\boxed{8}$

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\dfrac{a}{4}\cos 3\theta,\ -\dfrac{a}{4}\sin 3\theta\right)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{a}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta),\ \dfrac{a}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)\right)$ (3) $6a$

$\boxed{1}$

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ から $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

接点の $x$ 座標を $t$ $(t\neq 0)$ とすると，接線の方程式は

$$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t} \quad \cdots\cdots ①$$

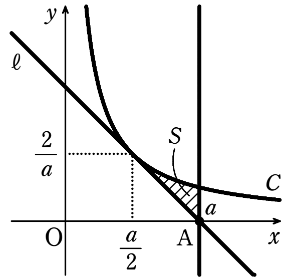
これが点 A $(a,\ 0)$ を通るから $0=-\dfrac{1}{t^2}a+\dfrac{2}{t}$

両辺に $t^2$ を掛けて $0=-a+2t$ よって $t=\dfrac{a}{2}$

これを ① に代入して，接線 $\ell$ の方程式は $y=-\dfrac{4}{a^2}x+\dfrac{4}{a}$

(2) $C$ と $\ell$ の接点の座標は $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{2}{a}\right)$

よって，求める面積を $S$ とすると




$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{2}{a}$$

$$=\Big[\log x\Big]_{\frac{a}{2}}^{a}-\frac{1}{2}$$

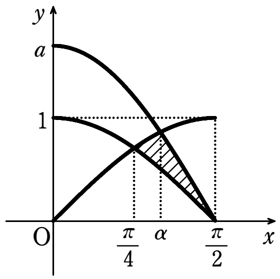
$$=\log a-\log\frac{a}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=\log a-(\log a-\log 2)-\frac{1}{2}=\log 2-\frac{1}{2}$$

参考 (2) の面積は，点 A $(a,\ 0)$ の位置によらず一定である。

$\boxed{2}$

2曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ は右の図のように
1点で交わる。
その交点の $x$ 座標を $\alpha$ とする。
このとき　$\sin\alpha=a\cos\alpha$ ……①



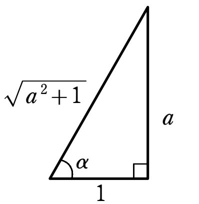

(1)　$S(a)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}\sin x\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

$=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}+\Big[a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\sqrt{2}-1+a-\cos\alpha-a\sin\alpha$

$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ より，① から　　$\tan\alpha=a$

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから




$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，　$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

ゆえに　　$S(a)=\sqrt{2}-1+a-\sqrt{a^2+1}$　$(a>1)$

(2)　$\lim_{a\to 1+0}\frac{S(a)}{a-1}=\lim_{a\to 1+0}\frac{a-1-(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2})}{a-1}=\lim_{a\to 1+0}\left(1-\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2}}{a-1}\right)$

$=\lim_{a\to 1+0}\left(1-\frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{3}$

$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ ……① の範囲で $y=0$ となる $t$ の値は　　$t=0$，$\frac{\pi}{2}$

また，① の範囲においては，常に $y\geqq 0$ である。

$x=4\cos t$ から　　$\frac{dx}{dt}=-4\sin t$

$y=\sin 2t$ から　　$\frac{dy}{dt}=2\cos 2t$

① において $\frac{dy}{dt}=0$ とすると　　$t=\frac{\pi}{4}$

したがって，右のような表が得られる。

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dx}{dt}$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x$ | $4$ | $\leftarrow$ | $2\sqrt{2}$ | $\leftarrow$ | $0$ |
| $\frac{dy}{dt}$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $y$ | $0$ | $\uparrow$ | $1$ | $\downarrow$ | $0$ |

よって，求める面積を $S$ とすると

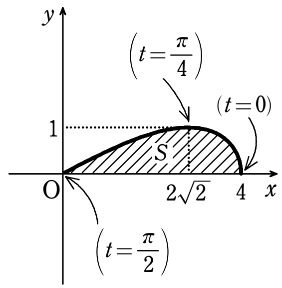
$S=\int_0^4 y\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin 2t\cdot(-4\sin t)dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sin t\,dt$

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t\,dt$

$=8\Big[\frac{1}{3}\sin^3 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}$




$\boxed{4}$

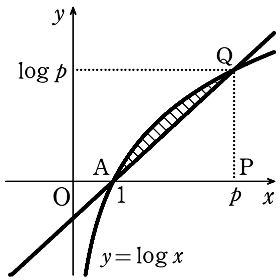
(1)　$y-0=\frac{\log p-0}{p-1}(x-1)$　　　すなわち　　$y=\frac{\log p}{p-1}x-\frac{\log p}{p-1}$

(2)　$y=\log x$ であるから　　$y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$

よって，$x>0$ で　　$y''<0$

ゆえに，曲線 $y=\log x$ は上に凸である。

(3)　曲線 $y=\log x$ と直線 AQ で囲まれた図形は，右の図の斜線部分である。




よって　　$S(p)=\int_1^p \log x\,dx-(\triangle \mathrm{APQ}\text{ の面積})$

$$=\Big[x\log x\Big]_1^p-\int_1^p x\cdot\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}(p-1)\log p$$

$$=p\log p-\Big[x\Big]_1^p-\frac{p-1}{2}\log p$$

$$=\frac{p+1}{2}\log p-p+1$$

(4)　$T(p)=\dfrac{p-1}{2}\log p$ であるから

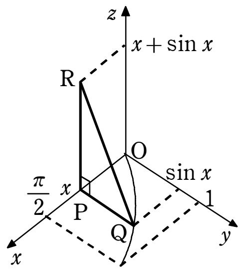
$$\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}=\lim_{p\to\infty}\frac{\dfrac{p+1}{2}\log p-p+1}{\dfrac{p-1}{2}\log p}=\lim_{p\to\infty}\left(\frac{p+1}{p-1}-\frac{2}{\log p}\right)$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{1}{p}}{1-\dfrac{1}{p}}-\frac{2}{\log p}\right)=1-0=1$$

$\boxed{5}$

(1)　$\triangle$PQR は，$\angle \mathrm{QPR}=90^\circ$，$\mathrm{PQ}=\sin x$，$\mathrm{PR}=x+\sin x$ の直角三角形であるから，その面積は

$$\triangle \mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\sin x(x+\sin x)$$




(2)　$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin x(x+\sin x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x+\sin^2 x)dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

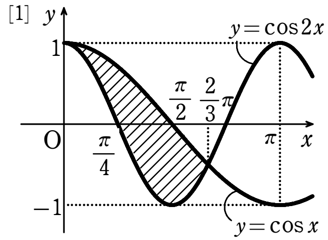
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

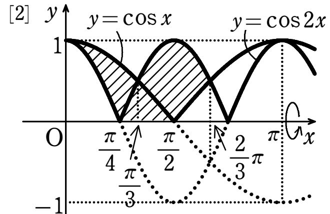
よって　　$V=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4+\pi}{8}$

$\boxed{6}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の範囲で，曲線 $y=\cos x$ と曲線 $y=\cos 2x$ で囲まれた図形は，下の図 [1] の斜線部分のようになる。

この 2 曲線の $y\leqq 0$ の部分を $x$ 軸に関して折り返すと，下の図 [2] のようになる。




求める体積 $V$ は，図 [2] の斜線部分を $x$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積であるから

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}(-\cos 2x)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,dx-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}(-\cos x)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2x)dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}(1+\cos 4x)dx-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4x)dx-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}-\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi(\pi+3\sqrt{3})}{8}$$

$\boxed{7}$

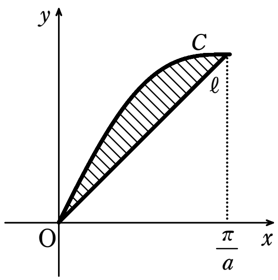
(1) $a^4x+\sin ax=a^4x$ から　$\sin ax=0$

ゆえに　$ax=n\pi$　($n$ は整数)

これを満たす $x$ のうち正で最小の値 $x_1$ は，$a>0$ から　$ax_1=\pi$

よって　$x_1=\dfrac{\pi}{a}$

(2) $V(a)=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{a}}\{(a^4x+\sin ax)^2-(a^4x)^2\}dx$




$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{a}}(2a^4x\sin ax+\sin^2 ax)dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}}x\sin ax\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{a}}x\left(-\frac{1}{a}\cos ax\right)'dx$$

$$=\left[-\frac{1}{a}x\cos ax\right]_0^{\frac{\pi}{a}}+\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{a}}\cos ax\,dx$$

$$=\frac{\pi}{a^2}+\frac{1}{a^2}\Big[\sin ax\Big]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{\pi}{a^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}}\sin^2 ax\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{a}}\frac{1-\cos 2ax}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2a}\sin 2ax\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{\pi}{2a}$$

よって，$V(a)=\pi\left(2a^4\cdot\dfrac{\pi}{a^2}+\dfrac{\pi}{2a}\right)=\dfrac{4a^3+1}{2a}\pi^2$

(3) $V(a)=\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\left(4a^2+\dfrac{1}{a}\right)$

$$V'(a)=\frac{\pi^2}{2}\cdot\left(8a-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{8a^3-1}{2a^2}\pi^2$$

$V'(a)=0$ とすると，$a>0$ から　$a=\dfrac{1}{2}$

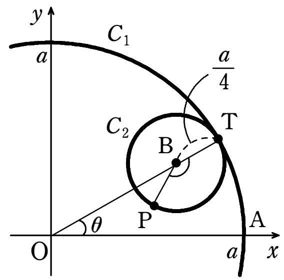
$a>0$ における $y=V(a)$ の増減は右のようになる。

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $V(a)'$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $V(a)$ | | ↘ | 極小<br>$\frac{3}{2}\pi^2$ | ↗ |

よって，$y$ は $a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{2}\pi^2$ をとる。

$\boxed{8}$

(1) 2つの円の接点を T とする。




$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから　$a\theta=\dfrac{a}{4}\angle\mathrm{PBT}$

よって　$\angle\mathrm{PBT}=4\theta$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が $x$ 軸の正の方向となす角は

$\theta-4\theta=-3\theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{a}{4}\cos(-3\theta),\ \frac{a}{4}\sin(-3\theta)\right)$$

$$=\left(\frac{a}{4}\cos 3\theta,\ -\frac{a}{4}\sin 3\theta\right)$$

(2) 点 B の座標は $\left(\dfrac{3}{4}a\cos\theta,\ \dfrac{3}{4}a\sin\theta\right)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{3}{4}a\cos\theta,\ \frac{3}{4}a\sin\theta\right)+\left(\frac{a}{4}\cos 3\theta,\ -\frac{a}{4}\sin 3\theta\right)$$

$$=\left(\frac{a}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta),\ \frac{a}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)\right)$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とすると

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{3}{4}a(\sin\theta+\sin 3\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{3}{4}a(\cos\theta-\cos 3\theta)$$

であるから　$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2=\dfrac{9}{16}a^2(\sin^2\theta+2\sin\theta\sin 3\theta+\sin^2 3\theta)$

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\frac{9}{16}a^2(\cos^2\theta-2\cos\theta\cos3\theta+\cos^2 3\theta)$$

よって　$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\frac{9}{16}a^2(2-2\cos(\theta+3\theta))=\frac{9}{16}a^2\cdot2\cdot2\sin^2 2\theta$

$$=\frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta$$

したがって，動点 P が移動する距離は

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|\,d\theta=\frac{3}{2}a\cdot4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$$

$$=6a\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$$