1

(解説)

$x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2$ を x^3+x^2+x+1 で割ったときの商は $x^2+x+(a-2)$ で余りが $(3-a)x^2+(4-a)x+4-a$ であるから

$$Q(x)=x^2+x+(a-2),$$
$$R(x)=(3-a)x^2+(4-a)x+4-a$$

$R(x)$ の x の1次の項の係数が1であるから　　$4-a=1$

よって　　$a=3$

このとき　　$Q(x)=x^2+x+1$，$R(x)=x+1$

2

(解説)

(1)　$0\leqq x\leqq\pi$　……①，$0\leqq y\leqq\pi$　……② とする。

また，$2\sin(x+y)-2\cos(x+y)\geqq\sqrt{2}$ から　　$2\sqrt{2}\sin\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right)\geqq\sqrt{2}$

ゆえに　　$\sin\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right)\geqq\frac{1}{2}$　……③

①＋② から　　$0\leqq x+y\leqq 2\pi$

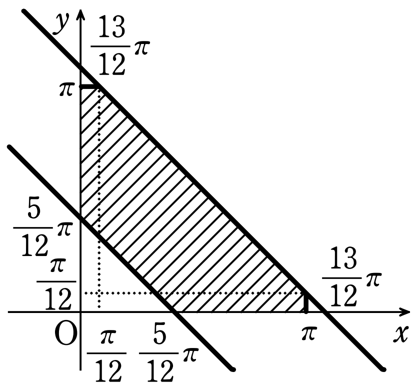
よって　　$-\frac{\pi}{4}\leqq x+y-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{7}{4}\pi$

この範囲で ③ を解くと

$$\frac{\pi}{6}\leqq x+y-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{6}\pi$$

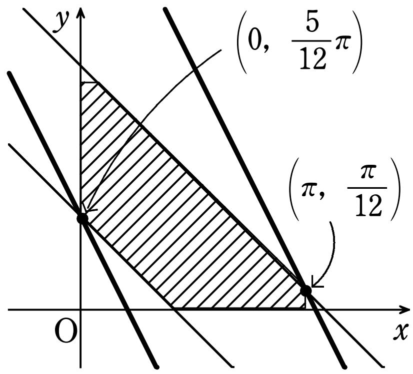
よって　　$\frac{5}{12}\pi\leqq x+y\leqq\frac{13}{12}\pi$　……④

①，②，④ をすべて満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合が D であるから，D は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



(2)　$2x+y=k$ …… ⑤ とおくと，これは傾き -2，y 切片 k の直線を表す。

この直線 ⑤ が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。



図から，k の値は，直線 ⑤ が

点 $\left(\pi,\ \dfrac{\pi}{12}\right)$ を通るとき最大になり，

点 $\left(0,\ \dfrac{5}{12}\pi\right)$ を通るとき最小になる。

よって，$2x+y$ は

$x=\pi$，$y=\dfrac{\pi}{12}$ のとき　最大値 $2\cdot\pi+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{25}{12}\pi$，

$x=0$，$y=\dfrac{5}{12}\pi$ のとき　最小値 $2\cdot0+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{5}{12}\pi$

をとる。

3

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=(-a+2b,\ 2a-2b,\ b)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$=(-a+2b-p,\ 2a-2b+1,\ b-2)$

$\mathrm{PQ}\perp\alpha$ から　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

ゆえに　$5a-6b+p+2=0$

よって　$5a-6b=-p-2$　…… ①

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

ゆえに　$-6a+9b-2p-4=0$

よって　$6a-9b=-2p-4$　…… ②

①，② から　$a=\dfrac{p+2}{3}$，$b=\dfrac{4p+8}{9}$

(2)　点 Q が $\triangle\mathrm{OAB}$ の周または内部にあるための条件は

$\dfrac{p+2}{3}\geqq0$　…… ③，

$\dfrac{4p+8}{9}\geqq0$　…… ④，

$$0 \leqq \frac{p+2}{3}+\frac{4p+8}{9} \leqq 1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

③，④ から　　$p \geqq -2$　……⑥

⑤ から　　$0 \leqq \dfrac{7p+14}{9} \leqq 1$

ゆえに　　$-2 \leqq p \leqq -\dfrac{5}{7}$　……⑦

⑥，⑦，$p<0$ の共通範囲をとって　　$-2 \leqq p \leqq -\dfrac{5}{7}$

4

解説

(1)　$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=e$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	極大	↘

また　　$f(e)=\dfrac{1}{e}$

したがって，$f(x)$ は $x=e$ のとき最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

(2)　$g(x)=e^x$，$h(x)=x^a$ とおくと　　$g'(x)=e^x$，$h'(x)=ax^{a-1}$

$y=g(x)$ のグラフと $y=h(x)$ のグラフが $x=t\ (t>0)$ で共有点をもち，かつ，その点で共通の接線をもつための条件は　　$\begin{cases} g(t)=h(t) \\ g'(t)=h'(t) \end{cases}$

すなわち　　$\begin{cases} e^t=t^a & \cdots\cdots ① \\ e^t=at^{a-1} & \cdots\cdots ② \end{cases}$　　① を ② に代入すると　　$t^a=at^{a-1}$

$t^{a-1}>0$ であるから，両辺を t^{a-1} で割ると　　$t=a$　　　① から　　$e^a=a^a$

$a>0$ であるから，両辺を $\dfrac{1}{a}$ 乗すると　　$e=a$　　　よって　　$a=e$，$t=e$

(3)　(1) から，$x \neq e$ のとき　　$f(x)<f(e)$　　　すなわち　　$\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{\log e}{e}$

$ex>0$ であるから，両辺に ex を掛けると　　$e\log x<x\log e$

$$\log x^e<\log e^x$$

底 e は 1 より大きいから　　$x^e<e^x$

したがって，$x>0$ かつ $x \neq t$ のとき　　$e^x>x^a$

$\boxed{5}$

(解説)

常用対数表より，$\log_{10} 8.94 = 0.9513$ であるから

$$\log_{10} 8.94^{18} = 18\log_{10} 8.94 = 18 \times 0.9513$$
$$= 17.1234 = 0.1234 + 17$$

よって　　$8.94^{18} = 10^{0.1234} \times 10^{17}$

ここで，$1 < 10^{0.1234} < 10$ であるから，8.94^{18} の整数部分は　　18 桁

また，$\log_{10} 1.32 = 0.1206$，$\log_{10} 1.33 = 0.1239$ から

$$1.32 < 10^{0.1234} < 1.33$$

各辺に 10^{17} を掛けると

$$1.32 \times 10^{17} < 10^{17.1234} < 1.33 \times 10^{17}$$

したがって，8.94^{18} の最高位からの 2 桁は　　13