$\boxed{1}$

(解説)

(1)　自転車が最初に自宅を出発するとき，歩行者との間隔は2である。自転車が歩行者を追いかけるときに，間隔が1分間に1ずつ縮まるから，自転車が最初に歩行者に追いつくのは出発してから2分後である。

よって，自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は

$({}^{ア}4,\ 4)$である。

その後，自転車が自宅に戻るまでに要する移動時間は2分であり，停止している時間と合わせると，2回目に自宅を出発するのは最初に歩行者に追いつく時刻の4分後である。

よって　　$a_2=4+4={}^{イ}8$

この8分の間に歩行者が移動した時間は，停止していた1分を除く7分である。

ゆえに　　$b_2={}^{ウ}7$

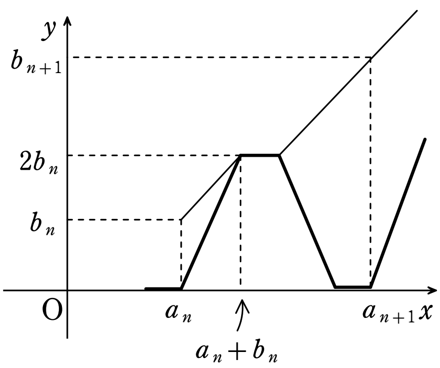
自転車がn回目に自宅を出発するときを考える。自転車が出発するとき，歩行者の位置はb_nであるから，追いつくまでに要する移動時間はb_n分である。

よって，自転車が歩行者に追いつく時刻は

$$x=a_n+b_n$$

自転車がb_n分移動する間に，歩行者はb_nだけ移動するから，自転車が歩行者に追いつく位置は

$$y=b_n+b_n=2b_n$$



したがって，求める点の座標は　　$(a_n+b_n,\ 2b_n)$　(^{エ}③，^{オ}④)

この後，自転車が自宅に戻るのに要する移動時間はb_n分であり，停止している時間と合わせると，$n+1$回目に自宅を出発するのは，n回目に歩行者に追いつく時刻のb_n+2分後である。

よって　　$a_{n+1}=a_n+b_n+b_n+2=a_n+{}^{カ}2b_n+{}^{キ}2$　……①

自転車がn回目に歩行者に追いついてから$n+1$回目に自宅を出発するまでのb_n+2分の間に，歩行者が移動した時間は，停止していた1分を除くb_n+1分である。

ゆえに　　$b_{n+1}=2b_n+b_n+1=3b_n+{}^{ク}1$　……②

② を変形すると　　$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$

数列$\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$は初項$b_1+\dfrac{1}{2}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$，公比3の等比数列であるから

$b_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}\cdot3^{n-1}$　　　よって　　$b_n=\dfrac{5}{2}\cdot3^{n-1}-\dfrac{1}{2}$　(^{ケ}⑦)

この結果を ① に代入すると　　$a_{n+1}=a_n+2\left(\dfrac{5}{2}\cdot3^{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)+2=a_n+5\cdot3^{n-1}+1$

ゆえに，$a_{n+1}-a_n=5\cdot3^{n-1}+1$ より，数列$\{a_n\}$の階差数列の第n項は$5\cdot3^{n-1}+1$で

あるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(5 \cdot 3^{k-1} + 1) = 2 + \frac{5(3^{n-1}-1)}{3-1} + n - 1$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n - \frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

$n=1$ のとき　$\frac{5}{2} \cdot 3^0 + 1 - \frac{3}{2} = 2$

$a_1 = 2$ であるから，③ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n - \frac{3}{2}$　（コ ⑨）

(2)　歩行者が $y=300$ の位置に到達するまでに，自転車が歩行者に k 回追いつくとする。自転車が k 回目に歩行者に追いつく位置は $2b_k$ であるから，k は $2b_k \leqq 300$ すなわち $b_k \leqq 150$ を満たす最大の整数である。

$k=4$ のとき　$b_4 = \frac{5}{2} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} = \frac{134}{2} = 67 \leqq 150$

$k=5$ のとき　$b_5 = \frac{5}{2} \cdot 3^4 - \frac{1}{2} = \frac{404}{2} = 202 > 150$

よって　$k = {}^{サ}4$

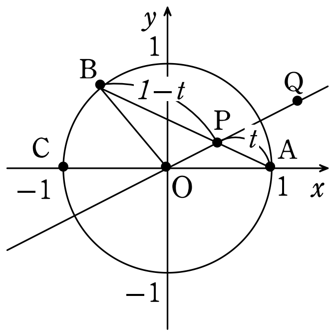
また，4 回目に自転車が歩行者に追いつく時刻は

$$x = a_4 + b_4 = \left(\frac{5}{2} \cdot 3^3 + 4 - \frac{3}{2}\right) + 67 = 70 + 67 = {}^{シスセ}137$$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ であるから



$$\cos\angle \mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{^{\text{アイ}}-2}{^{\text{ウ}}3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，実数 k を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表せるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}$$
$$=(k-kt)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+kt\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots\cdots ①\quad(^{\text{エ}}①，^{\text{オ}}⓪)$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$=(k-kt+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+kt\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(^{\text{カ}}④，^{\text{キ}}⓪)$$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=(1-t)-\frac{2}{3}t=1-\frac{5}{3}t$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ であるから　$1-\frac{5}{3}t=0$

よって　$t=\frac{^{\text{ク}}3}{^{\text{ケ}}5}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

$$=-(k-kt+1)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-kt\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=-(k-kt+1)+\frac{2}{3}kt=\left(\frac{5}{3}t-1\right)k-1$$

$\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0$

よって　$\left(\frac{5}{3}t-1\right)k-1=0$

ゆえに　$k=\dfrac{1}{\frac{5}{3}t-1}=\dfrac{^{\text{コ}}3}{^{\text{サ}}5t-{}^{\text{シ}}3}\quad\cdots\cdots ②$

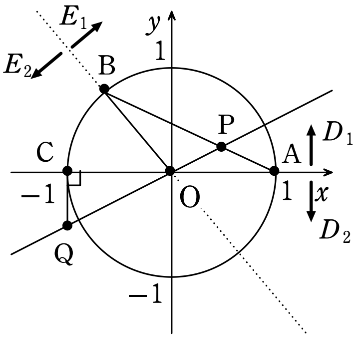
$0<t<\frac{3}{5}$ のとき，② から　$k<0$

よって，Q は O に関して P と反対側で，D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる。　$(^{\text{ス}}③)$

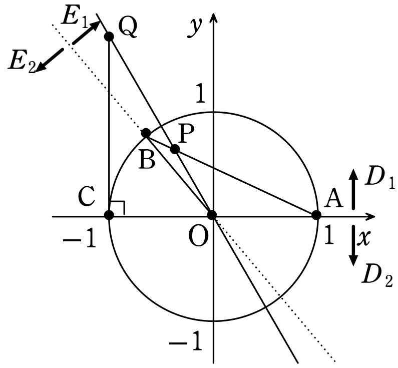
$\frac{3}{5}<t<1$ のとき，② から　$k>0$

よって，Q は O に関して P と同じ側で，D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる。　$(^{\text{セ}}⓪)$

$k<0$ のとき



$k>0$ のとき



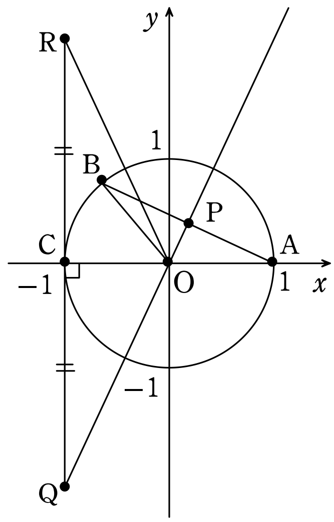
(3)　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，② から　　$k=-6$

① に代入して　　$\overrightarrow{OQ}=-3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$

よって　　$|\overrightarrow{OQ}|^2=9(|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2)=9\left(1-\dfrac{4}{3}+1\right)=6$

ゆえに　　$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{{}^{ソ}6}$

直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{CR}&={}^{タ}-\overrightarrow{CQ}\\&=-(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC})=-\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\\&=-(-3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OA}\\&={}^{チ}2\overrightarrow{OA}+{}^{ツ}3\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となる。

よって　　$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{CR}-\overrightarrow{CO}=(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OA}$

$$=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{4}$$

したがって　　$t=\dfrac{{}^{テ}3}{{}^{ト}4}$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2+y^2,$$

$$|\vec{a}+3\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=x^2+9y^2,$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2=x^2+3y^2$$

ゆえに $\quad \cos\theta=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+3\vec{b}|}=\dfrac{x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+9y^2}}$ $\quad\cdots\cdots$ ①

よって $\quad \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{(x^2+3y^2)^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}$

$$=\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}$$

(2) $x>0$, $y>0$ と ① から $\quad \cos\theta>0$

ゆえに $\quad 0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\sin^2\theta$ が最大値をとるとき，θ は最大値をとる。

(1) の結果から $\quad \sin^2\theta=\dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}=\dfrac{4\times\dfrac{y^2}{x^2}}{\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(1+9\times\dfrac{y^2}{x^2}\right)}$

ここで，$\dfrac{y^2}{x^2}=t$ とおくと

$$\sin^2\theta=\frac{4t}{(1+t)(1+9t)}=\frac{4t}{9t^2+10t+1}=\frac{4}{9t+10+\dfrac{1}{t}}$$

$x>0$，$y>0$ より $t>0$，$\dfrac{1}{t}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{4}{9t+10+\dfrac{1}{t}}\leqq\frac{4}{2\sqrt{9t\times\dfrac{1}{t}}+10}=\frac{1}{4}$$

$t>0$ より，等号が成り立つのは，$9t=\dfrac{1}{t}$ すなわち $t=\dfrac{1}{3}$ のときである。

よって，$\sin^2\theta$ は $t=\dfrac{1}{3}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

このとき，$\sin\theta>0$ であるから $\quad \sin\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\quad \theta=\dfrac{\pi}{6}$

したがって，θ の最大値は $\quad \dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$3^{4x}=X$，$3^{y^2}=Y$ とすると，(*) から　　$X^2+9Y^2=6XY$

すなわち　　$X^2-6XY+9Y^2=0$

$(X-3Y)^2=0$

よって　　$X=3Y$

したがって　　$3^{4x}=3\cdot 3^{y^2}$　　すなわち　　$3^{4x}=3^{y^2+1}$

ゆえに　　$4x=y^2+1$　　すなわち　　$y^2=4x-1$　……①

(2)　$y>0$ より，$1-\dfrac{x}{y}>0$ の両辺に y を掛けて　　$y>x$

$x>0$ より，両辺を 2 乗して　　$y^2>x^2$

① を代入して　　$4x-1>x^2$　　すなわち　　$x^2-4x+1<0$

これを解くと　　$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

また　　$\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}=\log_4\left(1+\dfrac{x}{y}\right)+\log_4\left(1-\dfrac{x}{y}\right)=\log_4\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\left(1-\dfrac{x}{y}\right)$

$$=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)=\log_4\left(1-\frac{x^2}{4x-1}\right)$$

$f(x)=1-\dfrac{x^2}{4x-1}$ とすると　　$f'(x)=-\dfrac{2x\cdot(4x-1)-x^2\cdot 4}{(4x-1)^2}=-\dfrac{2x(2x-1)}{(4x-1)^2}$

$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ において

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{1}{2}$

$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大 $\dfrac{3}{4}$	$\searrow$	

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

$y=\log_4 x$ は単調に増加するから，$\log_4 f(x)$ は $f(x)$ が最大となるとき最大値をとる。

$x=\dfrac{1}{2}$ を ① に代入すると　　$y^2=1$

$y>0$ であるから　　$y=1$

したがって，$\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$ は $x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$で最大値 $\log_4\dfrac{3}{4}$

すなわち $\log_4 3-1$ をとる。

5

解説

番号1の箱と番号 k の箱から同じ色の玉を取り出す確率を p_k とおく。

番号1の箱と番号 $k+1$ の箱から同じ色の玉を取り出すのは，

[1]　番号1の箱と番号 k の箱から同じ色の玉を取り出し，番号 $k+1$ の箱からも番号1の箱から取り出した玉と同じ色の玉を取り出す。

その確率は　$p_k\times\dfrac{2}{3}$

[2]　番号1と番号 k の箱から異なる色の玉を取り出し，番号 $k+1$ の箱から番号1の箱から取り出した玉と同じ色の玉を取り出す。

その確率は　$(1-p_k)\times\dfrac{1}{3}$

[1]，[2] から　$p_{k+1}=\dfrac{2}{3}p_k+\dfrac{1}{3}(1-p_k)=\dfrac{1}{3}p_k+\dfrac{1}{3}$

漸化式を変形すると　$p_{k+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(p_k-\dfrac{1}{2}\right)$

また　$p_1-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

よって，数列 $\left\{p_k-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$p_k-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$　　したがって，求める確率は　$p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

6

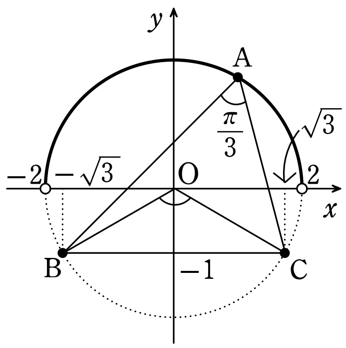
解説

(1)　条件 (*) から，△ABC の外接円は線分 BC を弦とする円である。

△ABC の外心を D とすると，D は辺 BC の垂直二等分線上，すなわち y 軸上の点である。

また，円周角の定理により

$$\angle\mathrm{BDC}=2\angle\mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$$



これを満たす D の座標は　$(0,\ 0)$，$(0,\ -2)$

ここで，D$(0,\ -2)$ のとき，DB=DC=2 より，△ABC の外接円は点 $(0,\ -2)$ を中心とする半径2の円となる。このとき，円周上の点の y 座標が常に0以下となるが，円周上の点 A の y 座標は常に正であるから，不適。

したがって，求める外心の座標は　$(0,\ 0)$

(2)　(1) の結果から，A は中心 $(0,\ 0)$，半径2の円周上の点であるから，A$(s,\ t)$ とすると　$s^2+t^2=4$　……①，$t>0$　……②

垂心を H$(x,\ y)$とする。

点 A から直線 BC に下ろした垂線は y 軸に平行な直線であるから　$x=s$

ゆえに　$s=x$　……③

このとき　　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(s+\sqrt{3},\ y+1)$,

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(s-\sqrt{3},\ t+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ であるから

$$(s+\sqrt{3})(s-\sqrt{3})+(y+1)(t+1)=0$$

すなわち　　$s^2-3+(y+1)(t+1)=0$

① より $s^2=4-t^2$ であるから　　$4-t^2-3+(y+1)(t+1)=0$

すなわち　　$(t+1)y=(t+1)(t-2)$

② より $t+1\fallingdotseq 0$ であるから　　$y=t-2$

ゆえに　　$t=y+2$　……④

よって，③ と ④ を ① に代入して　　$x^2+(y+2)^2=4$

また，② と ④ から　　$y+2>0$　　　すなわち　　$y>-2$

したがって，△ABC の垂心の軌跡は

円 $x^2+(y+2)^2=4$ の $y>-2$ の部分

別解　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たす点 H をとる。

このとき　　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\fallingdotseq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\fallingdotseq\vec{0}$ から　　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　……①

また　　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

(1) の結果より，原点 O は △ABC の外心であるから

$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$　　　ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\fallingdotseq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\fallingdotseq\vec{0}$ から　　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……②

①，② から，H は △ABC の垂心である。

A$(s,\ t)$，H$(x,\ y)$ とおくと，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=2$ から　　$a^2+b^2=4$　……③

また　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(a,\ b-2)$

ゆえに　　$x=s,\ y=t-2$

すなわち　　$s=x,\ t=y+2$

これを ③ に代入して　　$x^2+(y+2)^2=4$

ここで，条件 (*) から　　$t>0$　　　ゆえに　　$y>-2$

したがって，△ABC の垂心の軌跡は

円 $x^2+(y+2)^2=4$ の $y>-2$ の部分