

1

数字の2が書かれたカードが2枚、同様に、数字の0, 1, 8が書かれたカードがそれぞれ2枚、あわせて8枚のカードがある。これらから4枚を取り出し、横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし、0のカードが左から1枚または2枚現れる場合は、 n は3桁または2桁の自然数とそれぞれ考える。例えば、左から順に0, 0, 1, 1の数字のカードが並ぶ場合の n は11である。

- (1) a, b, c, d は整数とする。 $1000a + 100b + 10c + d$ が9の倍数になることと
 $a + b + c + d$ が9の倍数になることは同値であることを示せ。
- (2) n が9の倍数である確率を求めよ。
- (3) n が偶数であったとき、 n が9の倍数である確率を求めよ。

2

1個のさいころを3回投げる試行において、1回目に出る目を a 、2回目に出る目を b 、3回目に出る目を c とする。

- (1) $\int_a^c (x-a)(x-b)dx = 0$ である確率を求めよ。
- (2) a, b が2以上かつ $2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$ である確率を求めよ。

3

t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。OABCを1辺の長さが1の正四面体とする。辺OAを $1-t:t$ に内分する点をP、辺OBを $t:1-t$ に内分する点をQ、辺BCの中点をRとする。また $\vec{a} = \vec{OA}$ 、 $\vec{b} = \vec{OB}$ 、 $\vec{c} = \vec{OC}$ とする。

- (1) \vec{QP} と \vec{QR} を $t, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ のとき、 t の値を求めよ。
- (3) t が(2)で求めた値をとるとき、 $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

4

$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

5

α は $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。

(ii) $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$

条件 (i) と (ii) を満たす四角形のなかで、4 辺の長さの積 $k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$ が最大となるものについて、 k の値を求めよ。