$\boxed{1}$

解説

(1)　$f(x)=x+\sqrt{c-x^2}$ とおくと

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{c-x^2}}=\frac{\sqrt{c-x^2}-x}{\sqrt{c-x^2}}=\frac{(c-x^2)-x^2}{\sqrt{c-x^2}(\sqrt{c-x^2}+x)}$$
$$=\frac{c-2x^2}{\sqrt{c-x^2}(\sqrt{c-x^2}+x)}=\frac{-(\sqrt{2}\,x-\sqrt{c})(\sqrt{2}\,x+\sqrt{c})}{\sqrt{c-x^2}(\sqrt{c-x^2}+x)}$$

$f'(x)=0$ とすると，$0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ より

$$x=\sqrt{\frac{c}{2}}$$

$0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{c}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{c}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{c}$	$\nearrow$	$\sqrt{2c}$	$\searrow$	$\sqrt{c}$

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{\frac{c}{2}}$ で最大値 $\sqrt{2c}$ をとるから　　$a_1=\sqrt{\frac{c}{2}}=\frac{\sqrt{2c}}{2}$

(2)　$f_n(x)=x+\sqrt{a_n-x^2}$ とおく。

$0\leqq x\leqq\sqrt{a_n}$ より，(1) と同様に考えると，$f_n(x)$ は $x=\sqrt{\frac{a_n}{2}}$ で最大値をとるから

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n}{2}}$$

両辺とも正であるから

$$\log_2 a_{n+1}=\frac{1}{2}(\log_2 a_n-1)\qquad すなわち\qquad b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}$$

(3)　$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}$ を変形して　　$b_{n+1}+1=\frac{1}{2}(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 b_1+1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n+1=(b_1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=(\log_2 a_1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1$$

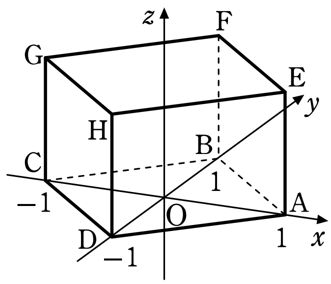
ここで　　$\log_2 a_1+1=\log_2\sqrt{\frac{c}{2}}+1=\frac{1}{2}(\log_2 c-1)+1=\frac{1}{2}(\log_2 c+1)$

したがって　　$b_n=(\log_2 c+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　X_1 は底面が半径 AC の円で高さが AE の円柱である。



AC$=2$，AE$=1$ より

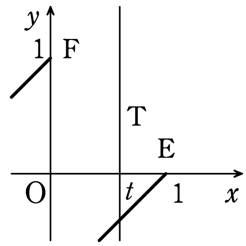
$$V_1=\pi\cdot 2^2\cdot 1=4\pi$$

X_2 は底面が半径 AH の円で高さが AB の円柱である。

AH$=\sqrt{3}$，AB$=\sqrt{2}$ であるから

$$V_2=\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{2}$$
$$=3\sqrt{2}\pi$$

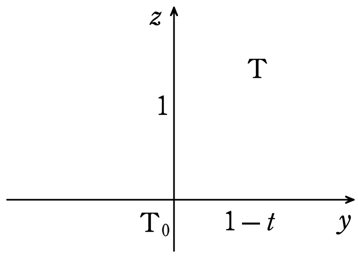
(2)　平面 $x=t$ と線分 EF の共有点を T とおく。



直線 EF の方程式は「$x+y=1$ かつ $z=1$」であるから

$$\mathrm{T}(t,\ 1-t,\ 1)$$

(3)　$\mathrm{T}_0(1,\ 0,\ 0)$ とおく。



X_3 の $x=t$ における断面は右の図のように半径 $\mathrm{T}_0\mathrm{T}$ の円になる。

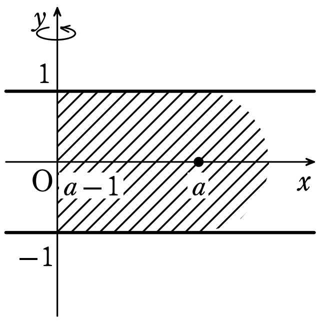
$\mathrm{T}_0\mathrm{T}=\sqrt{(1-t)^2+1^2}=\sqrt{t^2-2t+2}$ であり，X_3 は平面 $x=0$ に関して対称であるから

$$V_3=2\pi\int_0^1\left(\sqrt{t^2-2t+2}\right)^2dt$$
$$=2\pi\int_0^1(t^2-2t+2)dt=2\pi\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\right]_0^1$$
$$=2\pi\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\pi$$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$a>1$ であるから，円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y=1$，$y=-1$ で囲まれた図形は右の図の斜線部分である。



$(x-a)^2+y^2=1$ から　　$(x-a)^2=1-y^2$

よって　　$x=a\pm\sqrt{1-y^2}$

$x \geqq a$ より　　$x=a+\sqrt{1-y^2}$

斜線部分は x 軸に関して対称であるから

$$V_1=2\pi\int_0^1 x^2dy=2\pi\int_0^1(a+\sqrt{1-y^2})^2dy$$

$$=2\pi\int_0^1\left\{(a^2+1-y^2)+2a\sqrt{1-y^2}\right\}dy=2\pi\left\{\int_0^1(a^2+1-y^2)dy+2a\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy\right\}$$

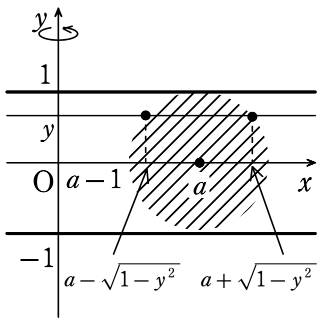
ここで　　$\displaystyle\int_0^1(a^2+1-y^2)dy=\left[(a^2+1)y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=a^2+\frac{2}{3}$

また，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ の値は半径 1 の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ に等しい。

よって　　$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{4}$

ゆえに　　$V_1=2\pi\left\{\left(a^2+\dfrac{2}{3}\right)+2a\cdot\dfrac{\pi}{4}\right\}=2\pi a^2+\pi^2a+\dfrac{4}{3}\pi$

(2)　V_2 は右の図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積であり，この立体は x 軸に関して対称であるから



$$V_2=2\pi\int_0^1\left\{(a+\sqrt{1-y^2})^2-(a-\sqrt{1-y^2})^2\right\}dy$$

$$=8a\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=8a\pi\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi^2a$$

よって，$V_1=2V_2$ のとき

$$2\pi a^2+\pi^2a+\frac{4}{3}\pi=2\cdot2\pi^2a$$

$$6a^2-9\pi a+4=0$$

したがって　　$a=\dfrac{9\pi\pm\sqrt{81\pi^2-96}}{12}$

$a>1$ より　　$a=\dfrac{9\pi+\sqrt{81\pi^2-96}}{12}$

参考　$\dfrac{9\pi-\sqrt{81\pi^2-96}}{12}<1<\dfrac{9\pi+\sqrt{81\pi^2-96}}{12}$ については，次のように確認できる。

$f(a)=6a^2-9\pi a+4$ とおくと，$f(1)=10-9\pi<0$ より，方程式 $f(a)=0$ は 1 より大きい解と 1 より小さい解を 1 つずつもつ。

よって，$f(a)=0$ の解のうち，大きい方が求める a の値である。

$\boxed{4}$

(解説)

y を固定したときに z が動く領域を考える。

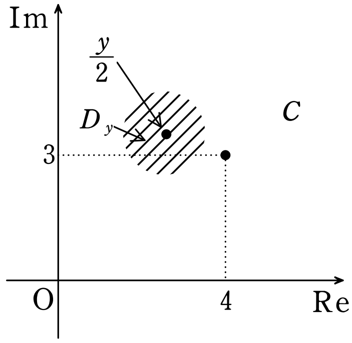
$z=\dfrac{x+y}{2}$ より　　$x=2z-y$

これを $|x|\leqq 2$ に代入すると

$$|2z-y|\leqq 2 \qquad \text{すなわち} \qquad \left|z-\frac{y}{2}\right|\leqq 1$$

よって，z は点 $\dfrac{y}{2}$ を中心とする半径 1 の円の内部と周を動く。

この領域を D_y とする。



ここで，$|y-(8+6i)|=3$ から　　$\left|\dfrac{y}{2}-(4+3i)\right|=\dfrac{3}{2}$

よって，点 $4+3i$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を C とすると，領域 D_y の中心である点 $\dfrac{y}{2}$ は C 上を動く。

以上より，z が動く領域は，領域 D_y の中心が C 上を動くときに，D_y が通過してできる領域であり，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。

ゆえに，求める面積は

$$\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\pi$$