高2理系数学総合S　課題(11月28日まで)　～積分計算～

1

不定積分 $\int e^{-x}\sin^2 x\,dx$ を求めよ。

2

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}dx$ とする。

(1)　$x=\frac{\pi}{2}-t$ とおいて置換積分法を用いることで，$I=J$ を示せ。

(2)　$I+J$ の値を求めよ。

(3)　I と J の値を求めよ。

3

すべての実数 x に対して $f(x)=\sin\pi x+\int_0^1 tf(t)\,dt$ が成り立つような関数 $f(x)$ を求めよ。

4

1 次関数 $f(x)$ が $\int_a^{3x+2} f(t)\,dt=x^2+3x$ を満たすとき，$f(x)={}^{ア}\boxed{\quad}$ であり，

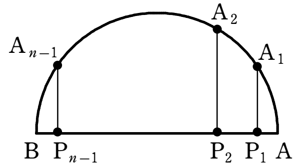
$a={}^{イ}\boxed{\quad}$ である。

5

$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-a\cos x)^2 dx$ を最小にする a の値とその最小値を求めよ。

6

n を 2 以上の自然数とし，直径 AB$=2$ の半円を考える。弧 AB を n 等分し，その分点を A に近い順に A_1，A_2，……，A_{n-1} とする。各点 A_k ($k=1$，2，……，$n-1$) に対し，点 A_k から線分 AB に下ろした垂線の足を P_k とする。$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{A}_k\mathrm{P}_k$ とおく。



(1)　S_4 を求めよ。

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を求めよ。

7

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$　($n=1$，2，……) とする。

(1)　不等式 $\int_1^{2n+1}\frac{1}{x}dx<2a_n$ が成り立つことを示せ。

(2)　極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}$ を求めよ。

8

$a_n=\int_0^1 x^n e^x dx$ ($n=1$，2，3，……) で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2)　$a_{n+1}=e-(n+1)a_n$ を示せ。

(3)　$\frac{1}{n+1}<a_n<\frac{e}{n+1}$ を示し，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(4)　$\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{1}{10}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x-5)+C$　(C は積分定数)

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{\pi-1}{2}$　　(3)　$I=\dfrac{\pi-1}{4}$，$J=\dfrac{\pi-1}{4}$

$\boxed{3}$

解答　$f(x)=\sin \pi x+\dfrac{2}{\pi}$

$\boxed{4}$

解答　(ア)　$\dfrac{2}{9}x+\dfrac{5}{9}$　　(イ)　2，-7

$\boxed{5}$

解答　$a=\dfrac{4(\pi-2)}{\pi}$，最小値 $\dfrac{\pi^3}{6}-\dfrac{4(\pi-2)^2}{\pi}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$1+\sqrt{2}$　　(2)　$\dfrac{2}{\pi}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{1}{2}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$a_1=1$，$a_2=e-2$，$a_3=6-2e$　　(2)　略　　(3)　証明略，0　　(4)　e

$\boxed{1}$

$$e^{-x}\sin^2 x=e^{-x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x$$

ここで　$\displaystyle\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C_1$　(C_1 は積分定数)　……①

また　$\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x\,dx=-e^{-x}\cos 2x-\int 2e^{-x}\sin 2x\,dx$

$$=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-\int 4e^{-x}\cos 2x\,dx$$

$$=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos 2x\,dx$$

よって　$\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x\,dx=\frac{1}{5}(-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x)+C_2$　(C_2 は積分定数)　……②

①，② より　$\displaystyle\int e^{-x}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\cdot(-e^{-x})-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x)+C$

$$=\frac{1}{10}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x-5)+C \ (C\text{ は積分定数})$$

$\boxed{2}$

(1)　$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと　　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

よって　$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{\sin t+\cos t}dt=J$$

(2)　$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x)}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx=\left[x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{2}$$

(3)　(1)，(2) より，$I=J$，$I+J=\dfrac{\pi-1}{2}$ であるから　　$I=\dfrac{\pi-1}{4}$，$J=\dfrac{\pi-1}{4}$

$\boxed{3}$

$\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt=k$　(k は定数) とおくと　　$f(x)=\sin\pi x+k$

このとき　$\displaystyle\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1(t\sin\pi t+kt)dt=\int_0^1 t\left(-\frac{\cos\pi t}{\pi}\right)'dt+k\int_0^1 tdt$

$$=\left[-\frac{t\cos\pi t}{\pi}\right]_0^1+\int_0^1\frac{\cos\pi t}{\pi}dt+k\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{\pi}+\left[\frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right]_0^1+\frac{k}{2}=\frac{1}{\pi}+\frac{k}{2}$$

よって　$\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{k}{2}=k$　　したがって　$k=\dfrac{2}{\pi}$

ゆえに　$f(x)=\sin\pi x+\dfrac{2}{\pi}$

$\boxed{4}$

$\displaystyle\int_a^{3x+2}f(t)dt=x^2+3x$　……①　とおく。

$f(t)$ の不定積分の1つを $F(t)$ とすると　$F'(t)=f(t)$

よって　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^{3x+2}f(t)dt=(3x+2)'F'(3x+2)-0=3f(3x+2)$

また，① の右辺を x で微分すると　$2x+3$

ゆえに　$f(3x+2)=\dfrac{2}{3}x+1$

$3x+2=t$ とおくと，$x=\dfrac{t-2}{3}$ から　$f(t)=\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{t-2}{3}\right)+1$

したがって　$f(x)={}^{ア}\dfrac{2}{9}x+\dfrac{5}{9}$

また，$3x+2=a$ のとき $x=\dfrac{a-2}{3}$ であるから，① は　$\displaystyle\int_a^a f(t)dt=\left(\frac{a-2}{3}\right)^2+a-2$

よって　$\dfrac{1}{9}(a-2)(a+7)=0$

ゆえに　$a={}^{イ}2,\ -7$

$\boxed{5}$

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-a\cos x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4x^2-4ax\cos x+a^2\cos^2 x)dx$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

よって　$I(a)=4\cdot\dfrac{\pi^3}{24}-4a\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)+a^2\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}a^2-2(\pi-2)a+\dfrac{\pi^3}{6}$

すなわち　$I(a)=\dfrac{\pi}{4}\left\{a-\dfrac{4(\pi-2)}{\pi}\right\}^2+\dfrac{\pi^3}{6}-\dfrac{4(\pi-2)^2}{\pi}$

ゆえに，$I(a)$ は $a=\dfrac{4(\pi-2)}{\pi}$ で最小値 $\dfrac{\pi^3}{6}-\dfrac{4(\pi-2)^2}{\pi}$ をとる。

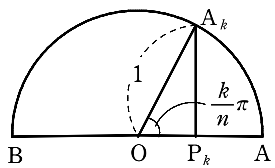
$\boxed{6}$

(1)　円の中心を O とすると

$\mathrm{A}_k\mathrm{P}_k=\mathrm{OA}_k\sin\dfrac{k}{n}\pi=\sin\dfrac{k}{n}\pi$

$S_4=\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1+\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2+\mathrm{A}_3\mathrm{P}_3$

$=\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{2}{4}\pi+\sin\dfrac{3}{4}\pi=1+\sqrt{2}$



(2)　$\sin\dfrac{n}{n}\pi=0$ から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k}{n}\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$\boxed{7}$

(1)　自然数 k に対して，$2k-1\leqq x\leqq 2k+1$ のとき　$\dfrac{1}{2k+1}\leqq\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{2k-1}$

また，等号は常には成り立たない。

よって　$\displaystyle\int_{2k-1}^{2k+1}\frac{1}{2k+1}dx<\int_{2k-1}^{2k+1}\frac{1}{x}dx<\int_{2k-1}^{2k+1}\frac{1}{2k-1}dx$

すなわち　$\dfrac{2}{2k+1}<\displaystyle\int_{2k-1}^{2k+1}\dfrac{1}{x}dx<\dfrac{2}{2k-1}$

各辺 $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について足し合わせると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+1}<\int_{1}^{2n+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}$$

ゆえに，右側の不等式から　$\displaystyle\int_{1}^{2n+1}\frac{1}{x}dx<2a_n$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-2+\frac{2}{2n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\frac{4n}{2n+1}=2a_n-\frac{4n}{2n+1}$

ここで　$\displaystyle\int_{1}^{2n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_{1}^{2n+1}=\log(2n+1)$

よって，(1) から　$2a_n-\dfrac{4n}{2n+1}<\log(2n+1)<2a_n$

各辺を $2\log n$ で割ると　$\dfrac{a_n}{\log n}-\dfrac{2n}{(2n+1)\log n}<\dfrac{\log(2n+1)}{2\log n}<\dfrac{a_n}{\log n}$

ゆえに　$\dfrac{\log(2n+1)}{2\log n}<\dfrac{a_n}{\log n}<\dfrac{\log(2n+1)}{2\log n}+\dfrac{2n}{(2n+1)\log n}$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(2n+1)}{2\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log\left(2+\frac{1}{n}\right)}{2\log n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{\log\left(2+\frac{1}{n}\right)}{2\log n}\right\}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(2n+1)\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\log n}=0$$

したがって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}=\frac{1}{2}$

8

(1)　$\displaystyle a_1=\int_0^1 xe^x dx=\int_0^1 x(e^x)'dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\Big[e^x\Big]_0^1=e-(e-1)=1$

$\displaystyle a_2=\int_0^1 x^2e^x dx=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=e-2a_1=e-2$

$\displaystyle a_3=\int_0^1 x^3e^x dx=\Big[x^3e^x\Big]_0^1-\int_0^1 3x^2e^x dx=e-3a_2=e-3(e-2)=6-2e$

(2)　$\displaystyle a_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=\Big[x^{n+1}e^x\Big]_0^1-\int_0^1(n+1)x^ne^x dx$

$\displaystyle =e-(n+1)\int_0^1 x^ne^x dx=e-(n+1)a_n$

(3)　$0<x\leqq1$ において $x^{n+1}e^x>0$ であるから　$\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^x dx>0$

よって　$a_{n+1}=e-(n+1)a_n>0$　　ゆえに　$a_n<\dfrac{e}{n+1}$　……①

$0<x<1$ において $e^x>1$ であるから　$x^ne^x>x^n$

よって　$\displaystyle\int_0^1 x^ne^x dx>\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

ゆえに　$a_n>\dfrac{1}{n+1}$　……②

①，② から，$\dfrac{1}{n+1}<a_n<\dfrac{e}{n+1}$ が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(4)　$a_{n+1}=e-(n+1)a_n$ から　$a_n=\dfrac{1}{n+1}(e-a_{n+1})$

また，(3) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(e-a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}(e-a_{n+1})=e$$