第3回コラボ模試

中2[発展]

(試験時間　60分)

解答上の注意

オンライン上での解答となります。各自解答ページで解答を入力してください。

入力対象は「0～9」の数です。

例　12＋34＝$\boxed{\text{アイ}}$　⇒　46　と入力

例　$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ に $\dfrac{4}{5}$ と答えたいとき　⇒　45　と入力

また，分数は既約分数で答えること。

$\boxed{1}$ (1) 次の式を展開せよ。

$(x+2y)(3x+5y)=\boxed{\text{ア}}x^2+\boxed{\text{イウ}}xy+\boxed{\text{エオ}}y^2$

$(3x-y+4)^2=\boxed{\text{カ}}x^2+y^2-\boxed{\text{キ}}xy+\boxed{\text{クケ}}x-\boxed{\text{コ}}y+\boxed{\text{サシ}}$

(2) 次の式を因数分解せよ。

$6x^2-7xy-5y^2=\left(\boxed{\text{ス}}x+y\right)\left(\boxed{\text{セ}}x-\boxed{\text{ソ}}y\right)$

$2x^2-3y^2+5xy-4x-5y+2=\left(x+\boxed{\text{タ}}y-\boxed{\text{チ}}\right)\left(\boxed{\text{ツ}}x-y-\boxed{\text{テ}}\right)$

(3) $x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$，$y=7+4\sqrt{3}$ のとき，$x+y=\boxed{\text{トナ}}$，$xy=\boxed{\text{ニ}}$ である。

よって，$x^2y+xy^2=\boxed{\text{ヌネ}}$，$x^2+y^2=\boxed{\text{ノハヒ}}$ である。

(4) 次の $\boxed{\text{フ}}$ ～ $\boxed{\text{ホ}}$ に当てはまるものを下の ⓪ ～ ③ から 1 つずつ選べ。ただし，x，y は実数とする。

⓪ 必要十分条件である　　① 必要条件であるが十分条件ではない

② 十分条件であるが必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(i) $x=y$ であることは，$x^2=y^2$ であるための $\boxed{\text{フ}}$。

(ii) xy が有理数であることは，x と y がともに有理数であるための $\boxed{\text{ヘ}}$。

(iii) $|x|=0$ であることは，$x=0$ であるための $\boxed{\text{ホ}}$。

$\boxed{2}$ (1)　2 次関数 $y=-\dfrac{3}{2}x^2+x-1$ のグラフの軸の方程式は $x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，頂点の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\ -\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)$ である。

(2)　放物線 $y=-2x^2+8x+1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると $y=-\boxed{キ}x^2+\boxed{クケ}x-\boxed{コサ}$ となる。これをさらに x 軸に関して対称に移動すると $y=\boxed{シ}x^2-\boxed{スセ}x+\boxed{ソタ}$ となる。

(3)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，$y=-2x^2+3x$ となる。

このとき $a=-\boxed{チ}$，$b=-\boxed{ツ}$，$c=-\boxed{テ}$ である。

(4)　2 次関数 $y=3x^2-2x+4$ は $x=\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}$ をとる。

(5)　2 次関数 $y=-x^2+4x-3$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ は $x=\boxed{ノ}$ のとき，最大値 $\boxed{ハ}$ をとり，$x=\boxed{ヒ}$ のとき，最小値 $-\boxed{フ}$ をとる。

$\boxed{3}$ (1) 2つの2次不等式 $x^2-x-12<0$ ……①，$x^2-6x+1\geqq 0$ ……② がある。

① の解は $-\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$ であり，② の解は

$$x\leqq\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}},\quad \boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\leqq x$$

であるから，①，② を同時に満たす整数 x の値は $\boxed{\text{カ}}$ 個あり，そのうち最小のものは $-\boxed{\text{キ}}$ である。

(2) 2次方程式 $-x^2+6x-9=0$ の解は $x=\boxed{\text{ク}}$ であるから，2次不等式 $-x^2+6x-9\geqq 0$ の解は $\boxed{\text{ケ}}$。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$ は，以下の ⓪ ～ ③ から正しいものを選べ。

⓪ ない　　① すべての実数　　② $x=\boxed{\text{ク}}$

③ $x=\boxed{\text{ク}}$ 以外のすべての実数

(3) x の2次関数 $y=x^2+2px+3p^2-4p-6$ のグラフが x 軸と異なる2点で交わるときの実数 p の値の範囲は $-\boxed{\text{コ}}<p<\boxed{\text{サ}}$ である。また，このグラフが x 軸から切り取る線分の長さが4となるとき，$p=\boxed{\text{シ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(4) a を定数とし，2次関数 $y=2x^2-ax+a-1$ のグラフを C とする。

(i) グラフ C の頂点の座標は $\left(\dfrac{a}{\boxed{\text{セ}}},\ \dfrac{-a^2+\boxed{\text{ソ}}a-8}{\boxed{\text{タ}}}\right)$ である。

(ii) グラフ C が，x 軸の $-1<x<1$ の部分と，異なる2点で交わるための a の値の範囲は $-\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}<a<\boxed{\text{テ}}-\boxed{\text{ト}}\sqrt{2}$ である。

$\boxed{4}$ (1) 1から4までの数字を，重複を許して並べてできる4桁の自然数は，全部で $\boxed{アイウ}$ 個ある。

(2) (1)の $\boxed{アイウ}$ 個の自然数のうちで，1から4までの数字を重複なく使ってできるものは $\boxed{エオ}$ 個ある。

(3) (1)の $\boxed{アイウ}$ 個の自然数のうちで，1331のように，異なる二つの数字を2回ずつ使ってできるものの個数を，次の考え方に従って求めよう。

(i) 1から4までの数字から異なる二つを選ぶ。この選び方は $\boxed{カ}$ 通りある。

(ii) (i)で選んだ数字のうち小さい方を，一・十・百・千の位のうち，どの2箇所に置くか決める。置く2箇所の決め方は $\boxed{キ}$ 通りある。小さい方の数字を置く場所を決めると，大きい方の数字を置く場所は残りの2箇所に決まる。

(iii) (i)と(ii)より，求める個数は $\boxed{クケ}$ 個である。

(4) (1)の $\boxed{アイウ}$ 個の自然数を，それぞれ別々のカードに書く。できた $\boxed{アイウ}$ 枚のカードから1枚引き，それに書かれた数の四つの数字に応じて，得点を次のように定める。

・四つとも同じ数字のとき	9点
・2回現れる数字が二つあるとき	3点
・3回現れる数字が一つと，1回だけ現れる数字が一つあるとき	2点
・2回現れる数字が一つと，1回だけ現れる数字が二つあるとき	1点
・数字の重複がないとき	0点

(i) 得点が9点となる確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$，得点が3点となる確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$ である。

(ii) 得点が2点となる確率は $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}$，得点が1点となる確率は $\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}$ である。

(iii) 得点の期待値は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ 点である。