$\boxed{1}$

(解説)

(1)　直線 ℓ と y 軸が平行であるとする。

このとき，直線 ℓ は方程式 $x=a$ とおける。直線 ℓ と点 A の距離を d_1，直線 ℓ と点 B の距離を d_2 とすると，条件から　$d_1+d_2=1$

一方

[1]　$a<-1$，$a>1$ のとき

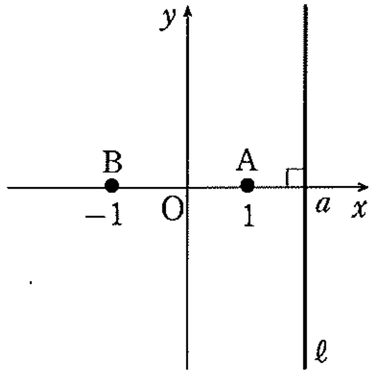
$d_1+d_2>2$

[2]　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき

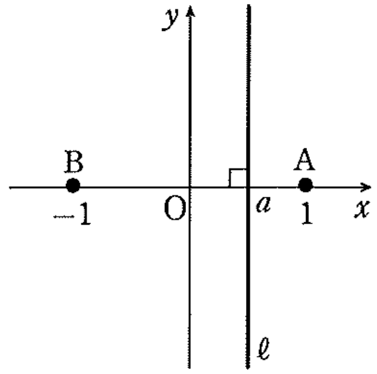
$d_1+d_2=2$

したがって，どちらの場合も $d_1+d_2=1$ に矛盾する。

よって，直線 ℓ は y 軸と平行でない。

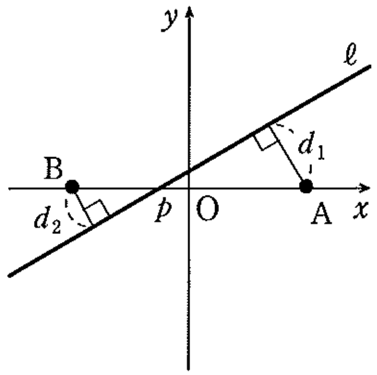


[1] の場合



[2] の場合

(2)　線分 AB と直線 ℓ が交わる点を $(p,\ 0)\ (-1\leqq p\leqq 1)$ とする。直線 ℓ の傾きを m とすると，直線 ℓ の方程式は $y=m(x-p)$ すなわち $mx-y-mp=0$ とおける。



$$d_1=\frac{|m-mp|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m||1-p|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$d_2=\frac{|-m-mp|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m||1+p|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$-1\leqq p\leqq 1$ であるから

$$d_1=\frac{|m|(1-p)}{\sqrt{m^2+1}},\quad d_2=\frac{|m|(1+p)}{\sqrt{m^2+1}}$$

これらより　$d_1+d_2=\dfrac{2|m|}{\sqrt{m^2+1}}$

$d_1+d_2=1$ であるから　$\dfrac{2|m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$　　よって　$2|m|=\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗すると　$4m^2=m^2+1$　　これを解くと　$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3)　(2) と同様に，直線 ℓ の方程式は

$mx-y-mp=0\ (p<-1,\ p>1)$ とおける。

ここで，2 点 A，B の y 軸に関する対称性により，

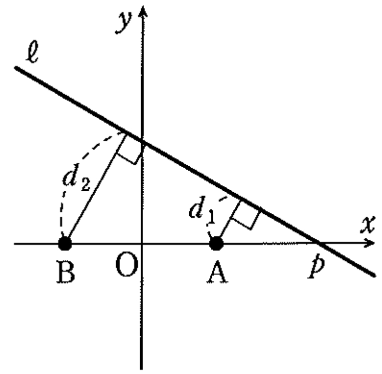
$p>1$ としても一般性は失わない。

原点と直線 ℓ の距離を d とすると

$$d=\frac{|-mp|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m|p}{\sqrt{m^2+1}}$$

一方　$d_1=\dfrac{-|m|(1-p)}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{|m|(p-1)}{\sqrt{m^2+1}}$

$$d_2=\frac{|m|(1+p)}{\sqrt{m^2+1}}$$



$p>1$ の場合

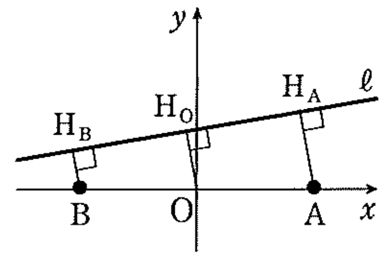
これらより　$d_1+d_2=\dfrac{2|m|p}{\sqrt{m^2+1}}$

$d_1+d_2=1$ であるから　$\dfrac{2|m|p}{\sqrt{m^2+1}}=1$　　したがって　$\dfrac{|m|p}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{1}{2}$

よって　$d=\dfrac{1}{2}$

別解　(3)　点 A，B，O から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H_A，H_B，H_O とする。四角形 AH_AH_BB は台形となる。

また，$AO=BO=1$，$AH_A /\!/ OH_O /\!/ BH_B$ であるから，台形の中点連結定理により



$$OH_O=\frac{1}{2}(AH_A+BH_B)$$

$AH_A+BH_B=1$ から　$OH_O=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2-3a$，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ から y を消去して整理すると

$$x^2-2ax+a^3+a^2-3a=0\quad\cdots\cdots①$$

$y=\dfrac{1}{2}x^2-3a$，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ が異なる 2 点で交わるから，x の 2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ。

よって，① の判別式 D について　$D>0$

$$\frac{D}{4}=a^2-(a^3+a^2-3a)=-a^3+3a=-a(a^2-3)>0$$

$a>0$ であるから　$a^2-3<0$　　これを解くと　$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

$a>0$ であるから　$0<a<\sqrt{3}$

(2) 2次方程式①の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと

$$S(a)=\int_\alpha^\beta\left\{-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2-\left(\frac{1}{2}x^2-3a\right)\right\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

ここで，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=a^3+a^2-3a$

よって　$S(a)=\dfrac{1}{6}\{(2a)^2-4(a^3+a^2-3a)\}^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{6}\cdot4^{\frac{3}{2}}(3a-a^3)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}(3a-a^3)^{\frac{3}{2}}$

(3) $f(a)=3a-a^3$ とおくと　$f'(a)=3-3a^2=-3(a+1)(a-1)$

$f'(a)=0$ とすると　$a=-1,\ 1$

$0<a<\sqrt{3}$ における $f(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	2	↘	

よって，$f(a)$ は $a=1$ のとき最大値2をとる。

$f(a)$ が最大となるとき，$S(a)$ も最大となる。

$$S(1)=\frac{4}{3}\times2^{\frac{3}{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

よって，$S(a)$ は $a=1$ のとき最大値 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ をとる。

3

(解説)

(1) $x>0$，$y>0$ より，$xy>0$ であるから

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}-2=\frac{y^2+x^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geqq0$$

よって　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqq2$

等号が成立するための条件は，$x=y$ である。

(2) [1] $n=1$ のとき

左辺 $=a_1\cdot\dfrac{1}{a_1}=1$，右辺 $=1^2=1$ より，成り立つ。

[2] $n\geqq2$ のとき

$$(a_1+\cdots\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=a_1\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)+a_2\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)+\cdots\cdots+a_n\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_1}{a_n}\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}+1+\cdots\cdots+\frac{a_2}{a_n}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_n}{a_2}+\cdots\cdots+1\right)$$

$$=n+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$

（ただし，$1\leqq i<j\leqq n$）

ここで，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たす自然数の組 $(i,\ j)$ は ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個ある。

また，$a_i>0$，$a_j>0$ であるから，(1) より

$$\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\geqq2\quad（等号成立は\ a_i=a_j\ のとき）$$

よって　$(a_1+\cdots\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqq n+2\times\dfrac{n(n-1)}{2}=n^2$

$n=1$ のとき，等号は常に成り立つ。

$n\geqq2$ のとき，等号が成立するための条件は　$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$

参考　一般に，次のシュワルツの不等式が成り立つ。

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)\geqq(x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n)^2$$

$x_i=a_i$，$y_j=\dfrac{1}{a_j}$ とすると，(2) の不等式になる。