1 [2025 福岡大]

解説

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると　$(7\sqrt{3},\ 2)=s(2\sqrt{3},\ -3)+t(\sqrt{3},\ 1)$

すなわち　$(7\sqrt{3},\ 2)=(2\sqrt{3}s+\sqrt{3}t,\ -3s+t)$

よって　$2\sqrt{3}s+\sqrt{3}t=7\sqrt{3}$, $-3s+t=2$

連立して解くと　$(s,\ t)={}^{ア}(1,\ 5)$

また, $\vec{a}+u\vec{b}=(2\sqrt{3}+\sqrt{3}u,\ -3+u)=(\sqrt{3}(u+2),\ u-3)$ であるから

$$|\vec{a}+u\vec{b}|^2=3(u+2)^2+(u-3)^2$$
$$=4u^2+6u+21=4\left(u+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{75}{4}$$

ゆえに, $|\vec{a}+u\vec{b}|^2$ は $u=-\frac{3}{4}$ のとき最小値 $\frac{75}{4}$ をとる。

$|\vec{a}+u\vec{b}|\geqq 0$ であるから, このとき $|\vec{a}+u\vec{b}|$ も最小となる。

よって, 求める $|\vec{a}+u\vec{b}|$ の最小値は $\sqrt{\frac{75}{4}}={}^{イ}\frac{5\sqrt{3}}{2}$ である。

2 [2025 立教大]

解説

$|\vec{a}+\vec{b}|=4$, $|\vec{a}-\vec{b}|=2$ から

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=16,\quad |\vec{a}-\vec{b}|^2=4$$

すなわち　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16$ ……①

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ ……②

①−② から　$4\vec{a}\cdot\vec{b}=12$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}={}^{ア}3$

これを ① に代入して整理すると　$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=10$

ゆえに　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2+|3\vec{a}-2\vec{b}|^2$

$$=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2+9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=13(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)-24\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=13\times 10-24\times 3={}^{イ}58$$

3 [2025 広島工業大]

解説

(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

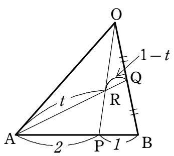
(2) $\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OP}$ のとき, (1) から

$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}s\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}s\overrightarrow{OB}$ ……①

AR : RQ $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OQ}$

$=(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{OB}$ ……②



①, ② から　$\frac{1}{3}s\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}s\overrightarrow{OB}=(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから

$\frac{1}{3}s=1-t$, $\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}t$

連立して解くと　$s=\frac{3}{5}$, $t=\frac{4}{5}$

よって　OR : RP $=s:(1-s)=\frac{3}{5}:\frac{2}{5}=3:2$

別解　$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OP}$ のとき　OR : RP $=s:(1-s)$

△OPB と直線 AQ について, メネラウスの定理により

$\frac{PA}{AB}\cdot\frac{BQ}{QO}\cdot\frac{OR}{RP}=1$　　すなわち　$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{s}{1-s}=1$

よって　$2s=3-3s$

ゆえに　$s=\frac{3}{5}$

したがって　OR : RP $=\frac{3}{5}:\frac{2}{5}=3:2$

4 [2025 関西大]

解説

$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$, OA : OB $=3:2\sqrt{3}=\sqrt{3}:2$ であるから　$\angle OAB=\frac{\pi}{2}$

$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$ であるから　OD $=6$

直線 OB は ∠AOD を 2 等分するから

AB : BD = OA : OD = 3 : 6 = 1 : 2

よって, 点 D は線分 AB を 3 : 2 に外分する。

したがって　$\overrightarrow{OD}=-{}^{ア}2\overrightarrow{OA}+{}^{イ}3\overrightarrow{OB}$

5 [2025 関西大]

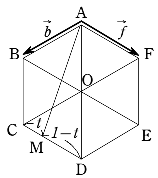
解説

(1) 正六角形 ABCDEF の中心を O とすると

$\overrightarrow{AO}=\vec{b}+\vec{f}$

したがって　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=2\vec{b}+\vec{f}$

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2\vec{b}+2\vec{f}$



(2) 条件より, $\overrightarrow{AM}=(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AD}$ と表されるから,

(1) の結果を代入して

$\overrightarrow{AM}=(1-t)(2\vec{b}+\vec{f})+2t(\vec{b}+\vec{f})=2\vec{b}+(1+t)\vec{f}$

(3) P は直線 AM 上の点であるから

$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AM}$　(k は実数, $k\neq 0$) ……①

と表される。

$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BP}$ より, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ であるから

$\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})=0$

$\overrightarrow{AM}\cdot(k\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})=0$

$k|\overrightarrow{AM}|^2-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

(2) の結果から

$k|2\vec{b}+(1+t)\vec{f}|^2-\{2\vec{b}+(1+t)\vec{f}\}\cdot\vec{b}=0$

$k\{4|\vec{b}|^2+4(1+t)\vec{b}\cdot\vec{f}+(1+t)^2|\vec{f}|^2\}-\{2|\vec{b}|^2+(1+t)\vec{b}\cdot\vec{f}\}=0$

$|\vec{b}|=|\vec{f}|=1$, $\vec{b}\cdot\vec{f}=1\times 1\times\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$ であるから, これらを代入すると

$$k\{4-2(1+t)+(1+t)^2\}-\left\{2-\frac{1}{2}(1+t)\right\}=0$$

ゆえに　$2k(t^2+3)=3-t$

$t^2+3\neq 0$ であるから　$k=\frac{3-t}{2(t^2+3)}$ ……②

よって　$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AM}=2k\vec{b}+k(1+t)\vec{f}$

$=\frac{3-t}{t^2+3}\vec{b}+\frac{(3-t)(1+t)}{2(t^2+3)}\vec{f}$

(4) AP : PM = 5 : 9 のとき, AP : AM = 5 : (5 + 9) から

$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{14}\overrightarrow{AM}$

ゆえに, (3) の ① から　$k=\frac{5}{14}$

したがって, ② から　$\frac{5}{14}=\frac{3-t}{2(t^2+3)}$

分母を払って整理すると　$5t^2+7t-6=0$

よって, $(t+2)(5t-3)=0$ から　$t=-2,\ \frac{3}{5}$

$0<t<1$ を満たすものは　$t=\frac{3}{5}$