高1数学総合SA＋　確認テスト　1～3月期第3講

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点　　／　10

$\boxed{1}$（各3点　計6点）

次の点 P に対するベクトル方程式はどのような図形を表すか答えよ。

(1)　平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P 対し　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-5\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$

(2)　平面上の △ABC と任意の点 P に対し　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=6$

$\boxed{2}$（4点）

△OAB について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 s，t が $0\leqq 2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たしながら変わるとき，点 P の存在範囲を求めよ。

高1数学総合SA＋　確認テスト 1～3月期第3講【解答】

$\boxed{1}$ （各3点　計6点）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。

$|\vec{p}+2\vec{a}|=|\vec{p}-5\vec{a}|$ の両辺を 2 乗すると　$|\vec{p}+2\vec{a}|^2=|\vec{p}-5\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}|^2+4\vec{p}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2=|\vec{p}|^2-10\vec{p}\cdot\vec{a}+25|\vec{a}|^2$　ゆえに　$14\vec{p}\cdot\vec{a}-21|\vec{a}|^2=0$

両辺を 14 で割ると　$\vec{p}\cdot\vec{a}-\dfrac{3}{2}|\vec{a}|^2=0$　すなわち　$\left(\vec{p}-\dfrac{3}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0$

ここで，線分 OA を3:1 に外分する点を Q とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{2}\vec{a}$ であるから

$$\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{QP}}\qquad\text{よって}\qquad\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\vec{0}$ のとき，点 P は Q と一致する。

したがって，点 P が描く図形は，線分 OA を3:1 に外分する点 Q を通り OA に垂直な直線である。

(2) A，B，C，P の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とすると，

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=6$ から　$|-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})|=6$

ゆえに　$|(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}})-6\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=6$　すなわち　$|6\overrightarrow{\mathrm{AP}}-(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}})|=6$

よって　$\left|6\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}\right|=1$　……①

ここで　$\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$

BC を 3:2 に内分する点，AD を 5:1 に内分する点をそれぞれ D，E とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

よって，$\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　となり，① から　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=1$

したがって，BC を 3:2 に内分する点，AD を 5:1 に内分する点をそれぞれ D，E とすると，点 P は E を中心とする半径 1 の円を表す。

$\boxed{2}$ （4点）

$0\leqq 2s+3t\leqq 6$ から　$0\leqq\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}\leqq 1$　　また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，

$0\leqq s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ を とると，点 P の存在範囲は △OA′B′の周および内部である。