高2理系数学総合S　課題(2月27日まで)　～数列～

1

第59項が70で，第66項が84である等差数列がある。

(1)　この数列の初項と公差をそれぞれ求めよ。

(2)　101はこの数列の項となり得るか。

(3)　初項から第何項までの和が最小となるか。

2

数列$\{a_n\}$は1，0，3，-6，21，-60，…… で与えられ，その階差数列をとると等比数列が得られる。したがって，一般項は$a_n=$ ア$\boxed{}$ である。また，値が1000より小さい正の項をすべて加えると，その和は イ$\boxed{}$ である。

3

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが，$S_n=2a_n-2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$を満たしている。

(1)　a_1を求めよ。

(2)　a_{n+1}とa_nの関係式を求めよ。

(3)　一般項a_nを求めよ。

4

条件$a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5を求めよ。

(2)　一般項a_nを推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

5

4で割った余りが2であり，5で割った余りが3であるような自然数を小さい方から順に並べて，a_1，a_2，a_3，……，a_n，…… とする。$a_1=$ ア$\boxed{}$，$a_2=$ イ$\boxed{}$，$a_3=$ ウ$\boxed{}$ である。

一般に，a_nをnを用いて表すと，$a_n=$ エ$\boxed{}$ と表される。和$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$が4桁の数となるような$n$の最小値は オ$\boxed{}$，最大値は カ$\boxed{}$ である。

6

第3項が$\dfrac{9}{8}$，第6項が$\dfrac{243}{64}$である等比数列の第n項をa_n，初項から第n項までの和をS_nとする。ただし，公比は実数であるとする。

(1)　a_nおよびS_nをnの式で表せ。

(2)　$S_n \geqq 9999$となる最小の自然数nを求めよ。必要なら，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$を用いてよい。

7

座標平面上において，x座標，y座標がともに整数である点を格子点という。例えば，$0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 1$における格子点は$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$である。正の整数nに対して，次の問いに答えよ。

(1)　領域$0 \leqq x \leqq n$，$0 \leqq y \leqq nx$にある格子点の個数$a(n)$を，nを用いて表せ。

(2)　領域$0 \leqq x \leqq n$，$x^2 \leqq y \leqq nx$にある格子点の個数$b(n)$を，nを用いて表せ。

8

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を，初項$a_1=-1$，$b_1=2$と漸化式$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-4b_n \\ b_{n+1}=a_n+5b_n \end{cases}$で定める。

(1)　$c_n=a_{n+1}-3a_n$とおくとき，数列$\{c_n\}$が漸化式$c_{n+1}=3c_n$を満たすことを示せ。

(2)　$d_n=\dfrac{a_n}{3^n}$とおくとき，数列$\{d_n\}$が満たす漸化式を導き，数列$\{d_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{9}$

2次方程式 $x^2-x-1=0$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とし，$L_n=\alpha^n+\beta^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ によって数列 $\{L_n\}$ を定める。

(1)　L_0，L_1，L_2 を求めよ。

(2)　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して L_n は常に自然数であることを数学的帰納法により証明せよ。

$\boxed{10}$

座標平面の原点を中心とする半径1の円 C と，点 A$(0,\ 1)$ で C に接する直線 ℓ がある。直線 ℓ 上の点の列 P_n と円 C 上の点の列 Q_n を次のように定める。

P_1 を点 $(1,\ 1)$ とする。$n\geqq1$ に対して P_n が定まったとき，P_n に最も近い C 上の点を Q_n とし，Q_n に最も近い ℓ 上の点を P_{n+1} とする。

(1)　Q_1 の座標を求めよ。

(2)　Q_n の x 座標を x_n とするとき，x_{n+1} を x_n の式で表せ。

(3)　$\dfrac{1}{{x_n}^2}=a_n$ とおいて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，Q_n の座標を n の式で表せ。

$\boxed{1}$

解答 (1) 順に -46，2 (2) 項となり得ない (3) 第 23 項および第 24 項

$\boxed{2}$

解答 (ア) $\dfrac{3+(-3)^{n-1}}{4}$ (イ) 208

$\boxed{3}$

解答 (1) $a_1=2$ (2) $a_{n+1}=2a_n+2^n$ (3) $a_n=2^{n-1}(n+1)$

$\boxed{4}$

解答 (1) $a_2=\dfrac{3}{5}$，$a_3=\dfrac{7}{9}$，$a_4=\dfrac{15}{17}$，$a_5=\dfrac{31}{33}$ (2) $a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$；証明略

$\boxed{5}$

解答 (ア) 18 (イ) 38 (ウ) 58 (エ) $20n-2$ (オ) 10 (カ) 31

$\boxed{6}$

解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$，$S_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1$ (2) $n=23$

$\boxed{7}$

解答 (1) $a(n)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n^2+2)$ (2) $b(n)=\dfrac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$

$\boxed{8}$

解答 (1) 略 (2) $d_n=-\dfrac{2}{3}n+\dfrac{1}{3}$ (3) $a_n=3^{n-1}(-2n+1)$，$b_n=3^{n-1}(n+1)$

$\boxed{9}$

解答 (1) $L_0=2$，$L_1=1$，$L_2=3$ (2) 略

$\boxed{10}$

解答 (1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (2) $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{\sqrt{{x_n}^2+1}}$

(3) $a_{n+1}=n+1$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}},\ \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$

$\boxed{1}$

解説

(1) この等差数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。

条件より $a+58d=70$，$a+65d=84$

これを解くと $a=-46$，$d=2$

よって，初項は -46，公差は 2

(2) (1) より，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=-46+(n-1)\cdot 2=2n-48$$

$a_n=101$ とすると $2n-48=101$

すなわち $2n=149$

これを満たす自然数 n は存在しないから，101 は数列 $\{a_n\}$ の項となり得ない。

(3) $a_n<0$ とすると $2n-48<0$ すなわち $n<24$

よって，$1\leqq n\leqq 23$ のとき $a_n<0$，

$n=24$ のとき $a_n=0$

$n\geqq 25$ のとき $a_n>0$

ゆえに，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_1>S_2>\cdots\cdots>S_{22}>S_{23}=S_{24}<S_{25}<\cdots\cdots$$

したがって，初項から第 23 項および第 24 項までの和が最小となる。

参考 $S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot(-46)+(n-1)\cdot 2\}=n^2-47n$

$$=\left(n-\frac{47}{2}\right)^2-\frac{47^2}{4}$$

$\dfrac{47}{2}=23.5\cdots$ に最も近い自然数は 23 と 24 であるから，S_n は $n=23$，24 で最小となる。

$\boxed{2}$

解説

$\{a_n\}$ の階差数列は -1，3，-9，27，-81，……

これは，初項 -1，公比 -3 の等比数列であるから，その一般項は

$$-1\cdot(-3)^{n-1}=-(-3)^{n-1}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\{-(-3)^{k-1}\}=1-\frac{1-(-3)^{n-1}}{1-(-3)}=\frac{3+(-3)^{n-1}}{4}$$

$\dfrac{3+(-3)^{1-1}}{4}=1$ であるから，$a_n=\dfrac{3+(-3)^{n-1}}{4}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに，一般項は　$a_n={}^{ア}\dfrac{3+(-3)^{n-1}}{4}$

また，条件から　$0<\dfrac{3+(-3)^{n-1}}{4}<1000$

すなわち　$-3<(-3)^{n-1}<3997$

ここで，n が奇数のとき　$(-3)^{n-1}=3^{n-1}$

n が偶数のとき　$(-3)^{n-1}=-3^{n-1}$

よって，$-3<(-3)^{n-1}$ を満たす自然数 n は奇数である。

$n=2m+1$ (m は0以上の整数) とおくと，$(-3)^{n-1}<3997$ から　$9^m<3997$

$9^3=729<3997$，$9^4=6561>3997$ であるから，$9^m<3997$ を満たす0以上の整数 m は

$m=0$，1，2，3

ゆえに　$n=1$，3，5，7

したがって，求める和は　$1+3+21+\dfrac{3+729}{4}={}^{イ}208$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$S_n=2a_n-2^n$ ……① とする。

①において，$n=1$ とすると，$S_1=a_1$ であるから

$a_1=2a_1-2^1$　　よって　$a_1=2$

(2)　①において，n を $n+1$ におき換えると

$$S_{n+1}=2a_{n+1}-2^{n+1}\quad\cdots\cdots②$$

②−① から　$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n-2^{n+1}+2^n$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$,

$-2^{n+1}+2^n=-2\cdot 2^n+2^n=(-2+1)\cdot 2^n=-2^n$

であるから　$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n-2^n$

ゆえに　$a_{n+1}=2a_n+2^n$

(3)　$a_{n+1}=2a_n+2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とすると　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{2}$

よって，$\{b_n\}$ は，初項 $b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{2}{2}=1$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n+1)$$

ゆえに　$a_n=2^n\cdot b_n=2^n\cdot\dfrac{1}{2}(n+1)=2^{n-1}(n+1)$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$a_2=\dfrac{3\cdot\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}+3}=\dfrac{3}{5}$,　$a_3=\dfrac{3\cdot\frac{3}{5}+1}{\frac{3}{5}+3}=\dfrac{7}{9}$,

$a_4=\dfrac{3\cdot\frac{7}{9}+1}{\frac{7}{9}+3}=\dfrac{15}{17}$,　$a_5=\dfrac{3\cdot\frac{15}{17}+1}{\frac{15}{17}+3}=\dfrac{31}{33}$

(2)　(1) から　$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$　……① と推測される。

[1]　$n=1$ のとき

$$a_1=\frac{2^1-1}{2^1+1}=\frac{1}{3}$$

から，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$a_k=\frac{2^k-1}{2^k+1}\quad\cdots\cdots②$$

$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$a_{k+1}=\frac{3a_k+1}{a_k+3}=\frac{3\cdot\frac{2^k-1}{2^k+1}+1}{\frac{2^k-1}{2^k+1}+3}$$

$$=\frac{3(2^k-1)+2^k+1}{2^k-1+3(2^k+1)}$$

$$=\frac{4\cdot2^k-2}{4\cdot2^k+2}=\frac{2(2^{k+1}-1)}{2(2^{k+1}+1)}$$

$$=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}+1}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について　　$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$

$\boxed{5}$

(解説)

4 で割ると 2 余り，5 で割ると 3 余る自然数を x とする。

x は 0 以上の整数 l，m を用いて，$x=4l+2$，$x=5m+3$ と表される。

よって　　$4l+2=5m+3$

すなわち　　$4(l+1)=5(m+1)$

4 と 5 は互いに素であるから，$l+1$ は 5 の倍数である。

よって，$l+1=5n$ (n は自然数) と表される。

ゆえに，$l=5n-1$ であり

$$x=4l+2=4(5n-1)+2=20n-2$$

よって　　$a_1=20\cdot1-2={}^{ア}18$，$a_2=20\cdot2-2={}^{イ}38$，

$a_3=20\cdot3-2={}^{ウ}58$

一般に　　$a_n={}^{エ}20n-2$

また，$\{a_n\}$ は初項 18，公差 20 の等差数列であるから

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot18+(n-1)\cdot20\}$$

$$=2n(5n+4)$$

この和が 4 桁の数となるとき　　$1000\leqq 2n(5n+4)<10000$

よって　　$500\leqq n(5n+4)<5000$

ここで，$n(5n+4)$ は単調に増加し

$n=9$ のとき　　$9(5\cdot9+4)=441$，

$n=10$ のとき　　$10(5\cdot10+4)=540$，

$n=31$ のとき　　$31(5\cdot31+4)=4929$，

$n=32$ のとき　　$32(5\cdot32+4)=5248$

したがって，n の最小値は ${}^{オ}10$，　最大値は ${}^{カ}31$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　初項を a，公比を r とすると，$a_3=\dfrac{9}{8}$，$a_6=\dfrac{243}{64}$ から

$$ar^2=\frac{9}{8},\ ar^5=\frac{243}{64}$$

よって　　$r^3=\dfrac{243}{64}\cdot\dfrac{8}{9}=\dfrac{27}{8}$

公比 r は実数であるから　　$r=\dfrac{3}{2}$

よって，$a\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{8}$ から　　$a=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$a_n=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

また　　$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1$

(2)　$S_n\geqq9999$ から　　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1\geqq9999$

すなわち　　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\geqq10000=10^4$

両辺の常用対数をとると，底 10 は 1 より大きいから

$$\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^n\geqq\log_{10}10^4$$

すなわち　$n(\log_{10}3-\log_{10}2)\geqq 4$

よって　$n\geqq \dfrac{4}{\log_{10}3-\log_{10}2}=\dfrac{4}{0.4771-0.3010}$

$=22.7\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=23$

7

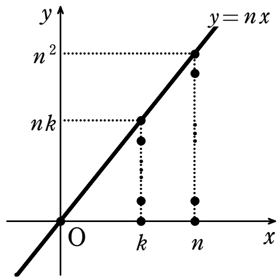
解説

(1)　$0\leqq k\leqq n$ のとき，直線 $x=k$ 上にある格子点は，

$y=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ nk$

の $(nk+1)$ 個である。

よって，格子点の個数は



$$a(n)=\sum_{k=0}^{n}(nk+1)$$

$$=n\cdot 0+1+\sum_{k=1}^{n}(nk+1)$$

$$=1+n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=1+n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

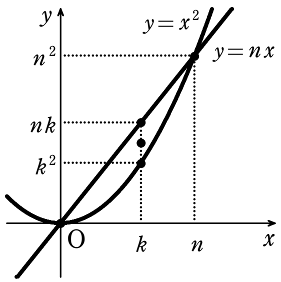
$$=\frac{1}{2}n^2(n+1)+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n^2+2)$$

(2)　$0\leqq k\leqq n$ のとき，直線 $x=k$ 上にある格子点は

$y=k^2,\ k^2+1,\ \cdots\cdots,\ nk$

の $(nk-k^2+1)$ 個である。

よって，格子点の個数は



$$b(n)=\sum_{k=0}^{n}(nk-k^2+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(nk+1)-\sum_{k=0}^{n}k^2$$

$$=a(n)-\left(0^2+\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(n^2+2)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{3(n^2+2)-n(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$$

8

解説

(1)　$c_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}=a_{n+1}-4b_{n+1}-3a_{n+1}$

$=-2a_{n+1}-4b_{n+1}=-2(a_n-4b_n)-4(a_n+5b_n)$

$=-6a_n-12b_n$

また　$3c_n=3a_{n+1}-9a_n=3(a_n-4b_n)-9a_n$

$=-6a_n-12b_n$

よって　$c_{n+1}=3c_n$

(2)　$d_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より $a_n=3^nd_n$ であるから

$c_n=a_{n+1}-3a_n=3^{n+1}d_{n+1}-3\cdot 3^nd_n=3^{n+1}(d_{n+1}-d_n)$

よって，$c_{n+1}=3c_n$ から

$3^{n+2}(d_{n+2}-d_{n+1})=3^{n+2}(d_{n+1}-d_n)$

ゆえに，$d_{n+2}-d_{n+1}=d_{n+1}-d_n$ から

$d_{n+1}-d_n=d_n-d_{n-1}=\cdots\cdots=d_2-d_1$

$a_1=-1$ より $d_1=-\dfrac{1}{3}$，$a_2=a_1-4b_1=-9$ より $d_2=-1$ であるから

$$d_{n+1}=d_n-\frac{2}{3}$$

したがって，$\{d_n\}$ は，初項 $-\dfrac{1}{3}$，公差 $-\dfrac{2}{3}$ の等差数列であるから

$$d_n=-\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}$$

(3)　(2) の結果から

$$a_n=3^nd_n=3^n\left(-\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}\right)=3^{n-1}(-2n+1)$$

ここで　$a_{n+1}=3^n\{-2(n+1)+1\}$

$=3^{n-1}\cdot 3\{-2(n+1)+1\}=3^{n-1}(-6n-3)$

よって，$a_{n+1}=a_n-4b_n$ から

$$b_n=-\frac{1}{4}(a_{n+1}-a_n)$$
$$=-\frac{1}{4}\{3^{n-1}(-6n-3)-3^{n-1}(-2n+1)\}$$
$$=\frac{3^{n-1}}{4}(4n+4)=3^{n-1}(n+1)$$

参考　$\{a_n+kb_n\}$ が公比 l の等比数列になるような k，l を定めることで，次のように $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めることもできる。

$$a_{n+1}+kb_{n+1}=(a_n-4b_n)+k(a_n+5b_n)$$
$$=(k+1)a_n+(5k-4)b_n$$

$\{a_n+kb_n\}$ が公比 l の等比数列になるとき

$$k+1=l,\ 5k-4=kl$$

これを解くと　$k=2$，$l=3$

$\{a_n+2b_n\}$ は初項 $a_1+2b_1=3$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n+2b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

$a_n=3^n-2b_n$ を漸化式に代入して

$$b_{n+1}=(3^n-2b_n)+5b_n=3b_n+3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$

$\left\{\dfrac{b_n}{3^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{b_1}{3^1}=\dfrac{2}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列であるから

$$\frac{b_n}{3^n}=\frac{2}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(n+1)$$

よって　$b_n=3^{n-1}(n+1)$

ゆえに　$a_n=3^n-2b_n=3\cdot 3^{n-1}-3^{n-1}(2n+2)$

$=3^{n-1}(-2n+1)$

$\boxed{9}$

解説

(1)　$L_0=\alpha^0+\beta^0=1+1=2$

また，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$

よって　$L_1=\alpha+\beta=1$，

$L_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=3$

(2)　「L_n は自然数である」を ① とする。

[1]　$n=0$，1 のとき

(1) より，$L_0=2$，$L_1=1$ は自然数である。

よって，$n=0$，1 のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$，$k+1$ のとき ① が成り立つと仮定すると，$L_k=\alpha^k+\beta^k$，$L_{k+1}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ は自然数である。

$n=k+2$ のときを考えると

$$L_{k+2}=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)$$
$$=1\cdot L_{k+1}-(-1)\cdot L_k$$
$$=L_{k+1}+L_k \quad \cdots\cdots(*)$$

L_k，L_{k+1} は自然数であるから，L_{k+2} $(=L_{k+1}+L_k)$ も自然数である。

よって，$n=k+2$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] より，$n=0$，1，2，…… に対して常に ① が成り立つ。

別解　([2] における等式 $(*)$ の示し方)

α，β は $x^2-x-1=0$ の解であるから

$$\alpha^2-\alpha-1=0,\ \beta^2-\beta-1=0$$

よって　$\alpha^2=\alpha+1$，$\beta^2=\beta+1$

ゆえに，$n=k+2$ のときを考えると

$$L_{k+2}=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}=\alpha^2\cdot\alpha^k+\beta^2\cdot\beta^k$$
$$=(\alpha+1)\cdot\alpha^k+(\beta+1)\cdot\beta^k$$
$$=(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})+(\alpha^k+\beta^k)$$

$$=L_{k+1}+L_k$$

参考　数列 $\{L_n\}$ は，漸化式

$$L_0=2,\ L_1=1,\ L_{n+2}=L_{n+1}+L_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を満たす。この数列 $\{L_n\}$ は **リュカ数列** とよばれる。

なお，漸化式

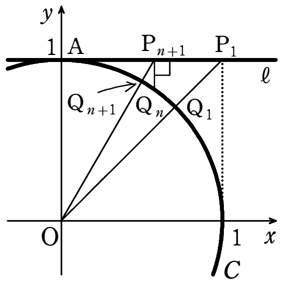
$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ は **フィボナッチ数列** とよばれる。

$\boxed{10}$

解説

(1)　円 C 上の点で $P_1(1,\ 1)$ に最も近い点 Q_1 は，線分 OP_1 と円 C の交点である。



直線 OP_1 の方程式は

$$y=x \quad \cdots\cdots ①$$

であるから，① を円 C の方程式 $x^2+y^2=1$ に代入して

$$x^2+x^2=1$$

よって　$x^2=\dfrac{1}{2}$

図より，$x>0$ であるから　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，① より　$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$Q_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(2)　直線 ℓ 上の点で Q_n に最も近い点 P_{n+1} は図のような位置にあるから，Q_n と P_{n+1} の x 座標は等しい。

よって，P_{n+1} の座標は　$(x_n,\ 1)$

また，(1) と同様に，線分 OP_{n+1} と円 C の交点が Q_{n+1} である。

直線 OP_{n+1} の方程式は　$y=\dfrac{x}{x_n}$

これを円 C の方程式 $x^2+y^2=1$ に代入して

$$x^2+\left(\frac{x}{x_n}\right)^2=1$$

すなわち　$\dfrac{x_n{}^2+1}{x_n{}^2}\cdot x^2=1$

$x_n{}^2+1\fallingdotseq 0$ であるから　$x^2=\dfrac{x_n{}^2}{x_n{}^2+1}$

図より，$x>0$，$x_n>0$ であるから　$x=\dfrac{x_n}{\sqrt{x_n{}^2+1}}$

これが Q_{n+1} の x 座標 x_{n+1} であるから

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{\sqrt{x_n{}^2+1}} \quad \cdots\cdots ②$$

(3)　② の両辺を 2 乗して　$x_{n+1}{}^2=\dfrac{x_n{}^2}{x_n{}^2+1}$

これと $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，すべての自然数 n について $x_n\fallingdotseq 0$ であるから，両辺の逆数をとって　$\dfrac{1}{x_{n+1}{}^2}=\dfrac{x_n{}^2+1}{x_n{}^2}$

すなわち　$\dfrac{1}{x_{n+1}{}^2}=1+\dfrac{1}{x_n{}^2}$

$\dfrac{1}{x_n{}^2}=a_n$ とすると　$a_{n+1}=a_n+1$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{x_1{}^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2$，公差 1 の等差数列であるから

$$a_n=2+(n-1)\cdot 1=n+1$$

また　$x_n{}^2=\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n+1}$

図より，$x_n>0$ であるから　$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

ここで，点 Q_n は円 C 上の点であるから

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2+y^2=1$$

よって　　$y^2=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

点 Q_n の y 座標は正であるから　　$y=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

したがって，点 Q_n の座標は　　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}},\ \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$

別解　(1)　点 Q_1 は，線分 OP_1 を $\mathrm{OQ}_1:\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1$ に内分する点である。

$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ より，$\mathrm{OP}_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

$$\mathrm{OQ}_1:\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1=1:(\sqrt{2}-1)$$

ゆえに，点 Q_1 の座標は

$$\left(\frac{(\sqrt{2}-1)\cdot 0+1\cdot 1}{1+(\sqrt{2}-1)},\ \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot 0+1\cdot 1}{1+(\sqrt{2}-1)}\right)$$

すなわち　　$\mathrm{Q}_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(2)　点 Q_{n+1} は，線分 OP_{n+1} を $\mathrm{OQ}_{n+1}:\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$ に内分する点である。

$\mathrm{P}_{n+1}(x_n,\ 1)$ より，$\mathrm{OP}_{n+1}=\sqrt{{x_n}^2+1^2}=\sqrt{{x_n}^2+1}$ であるから

$$\mathrm{OQ}_{n+1}:\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}=1:\left(\sqrt{{x_n}^2+1}-1\right)$$

ゆえに，点 Q_{n+1} の x 座標 x_{n+1} は

$$x_{n+1}=\frac{\left(\sqrt{{x_n}^2+1}-1\right)\cdot 0+1\cdot x_n}{1+\left(\sqrt{{x_n}^2+1}-1\right)}=\frac{x_n}{\sqrt{{x_n}^2+1}}$$