高2理系数学総合S　確認テスト　1～3月期第5講

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点　　／　10

$\boxed{1}$ （10点）

関数 $f(\theta)=a\cos^2\theta+(a-b)\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$ の最大値が $3+\sqrt{7}$，最小値が $3-\sqrt{7}$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

高2理系数学総合S　確認テスト　1～3月期第5講【解答】

$\boxed{1}$ （10点）

解答　$a=\dfrac{6\pm\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6\mp\sqrt{14}}{2}$ (複号同順)

$\boxed{1}$ （10点）

$$f(\theta)=a\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+(a-b)\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+b\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$=\frac{a-b}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{\sqrt{2}}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{a+b}{2}$$ 」3点

[1]　$a>b$ のとき　　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから

最大値は　$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$，最小値は　$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$

したがって，求める条件は　$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3+\sqrt{7}$　……①

$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3-\sqrt{7}$　……②

①＋② から　$a+b=6$　　(①－②)$\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から　$a-b=\sqrt{14}$

この 2 式を連立して解くと　$a=\dfrac{6+\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6-\sqrt{14}}{2}$ 」3点

[2]　$a=b$ のとき

$f(\theta)=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a$ となり，$f(\theta)$ は常に一定の値 a をとるから，最大値 $3+\sqrt{7}$，最小値 $3-\sqrt{7}$ となることはない。 」1点

[3]　$a<b$ のとき

最大値は　$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$，最小値は　$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$

したがって，求める条件は　$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3+\sqrt{7}$　……③

$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3-\sqrt{7}$　……④

③＋④ から　$a+b=6$　　(④－③)$\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から　$a-b=-\sqrt{14}$

この 2 式を連立して解くと　$a=\dfrac{6-\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6+\sqrt{14}}{2}$ 」3点

以上から　$a=\dfrac{6\pm\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6\mp\sqrt{14}}{2}$ (複号同順)