1

解答　(1)　周期：$2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$，速さ：$d\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$　　(2)　$x=d\cos\sqrt{\dfrac{k}{3m}}\,t$

(3)　$mg+\dfrac{1}{3}kx$　　(4)　$\dfrac{3mg}{k}$

ヒント　(1)　『糸はたるまない』 → 2つのおもりは質量 $3m$ の1つのおもりとみなして考える

(2)　単振動の式は，運動のグラフを描いてから求める。

(3)　『糸の張力』 → それぞれのおもりについて運動方程式を立てて求める

(4)　『糸がたるむことなく』 → 糸の張力≧0

(1)　糸がたるまないから，2つのおもりを一体とみなして考える。ばね定数が k，おもり全体の質量が $3m$ であるから，周期を T とすると 「$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$」より

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

この単振動の振動の中心はつりあいの位置 ($x=0$) なので，振幅は d であり，角振動数は $\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$ ※A← であるから，速さの最大値を v_0 とすると「$v_0=A\omega$」より

$$v_0=d\sqrt{\frac{k}{3m}}$$

(2)　$t=0$ のとき $x=d$ で静止していたから，この運動のグラフは図 a のような $+\cos$ 型になる。

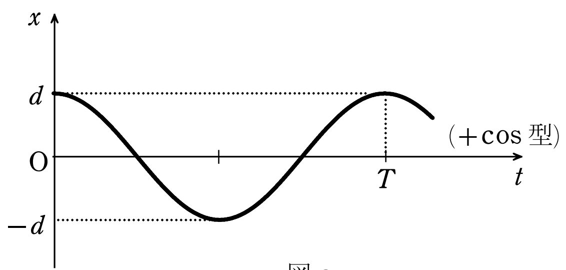


図 a

「$x=A\cos\omega t$」より　$x=d\cos\sqrt{\dfrac{k}{3m}}\,t$

(3)　変位が x のとき，張力を S としてそれぞれのおもりにはたらく力を図 b に示す。
つりあいの位置でのばねの伸びを x_0 とすると，力のつりあいより

$$(2m+m)g=kx_0 \qquad よって \quad x_0=\frac{3mg}{k}$$

変位が x のときの加速度を a として，それぞれの運動方程式を立てる。

$$2ma=2mg+S-k(x_0+x)$$
$$ma=mg-S$$

2式より a を消去すると

$$2mg+S-k(x_0+x)=2mg-2S$$

よって　$S=\dfrac{k}{3}(x_0+x)=mg+\dfrac{1}{3}kx$

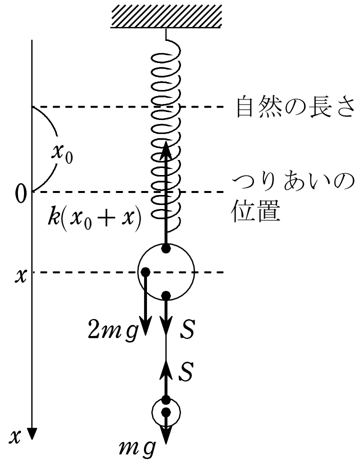


図 b

(4)　糸がたるまない条件は $S\geqq 0$ である。

$$S=mg+\frac{1}{3}kx\geqq 0 \qquad より \quad x\geqq -\frac{3mg}{k}$$

振動の中心から $-\dfrac{3mg}{k}\ (=-x_0)$ の位置，すなわち自然の長さの位置で糸はたるみ始める。よって，振幅が x_0 より小さければ糸はたるむことはない。したがって，d の最大値は x_0 となる。

$$d\ の最大値=x_0=\frac{3mg}{k}$$

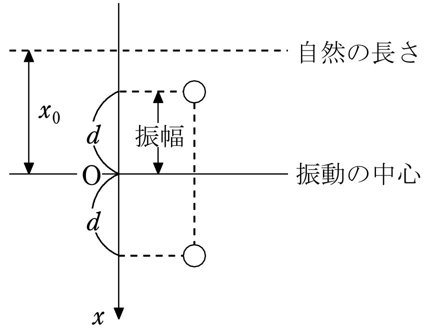


図 c

←※A　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ とを比較して　$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$

2

解答 (1) $mg=\rho Sx_0g$ (2) ρSl (3) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho Sg}}$ (4) $\dfrac{\rho Sl}{2}$

(5) 等加速度直線運動 (6) $\sqrt{2\left(\dfrac{\rho Sl}{m}-1\right)gl}$ (7) $\dfrac{3}{4}\rho Sl$

アルキメデスの原理により

浮力の大きさ＝浮きが排除した水の重さ＝浮きの水中部分の体積と同体積の水の重さ$=\rho_{水}Vg$

(1) 浮力と重力とがつりあう。

(2) 水中部分の浮きの長さ $x_0\leqq$ 浮きの長さ l であれば，浮き全体は沈まない。

(7) 運動方程式が $ma=-Kx$ で与えられる単振動において，系の力学的エネルギーは $\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}Kx^2=$ 一定 (ただし，原点 $x=0$ はつりあいの位置) を用いて考える。

(1) 水中部分の浮きの体積は Sx_0，これと同体積の水の質量 (＝密度×体積) は ρSx_0，したがって浮力は ρSx_0g となる。よって，浮力と浮きの重力 mg とのつりあいの式は

$$mg=\rho Sx_0g \quad (図\ a)$$

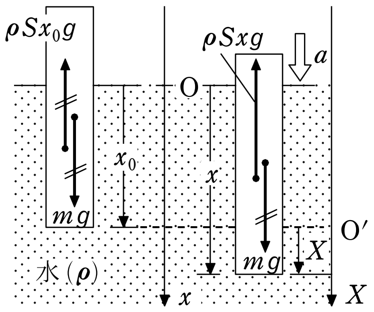


図 a 図 b

(2) (1) の式から $x_0=\dfrac{mg}{\rho Sg}=\dfrac{m}{\rho S}$ ……①

$x_0\leqq l$ であれば沈まないから $\dfrac{m}{\rho S}\leqq l$

ゆえに $m\leqq\rho Sl$ よって $m_1=\rho Sl$ ※A←

(3) 図 b は，浮きを下方にわずかに引いて，静かに放した後の状態を示す。水面を原点 O として鉛直下向きに x 軸をとる。浮きの下端の位置が x のとき，浮力は ρSxg となるから，浮きの加速度を a として運動方程式を立てると $ma=mg-\rho Sxg$

(1) の $mg=\rho Sx_0g$ を代入して $ma=-\rho Sg(x-x_0)$

新しい座標 X を $X=x-x_0$ とし，$\rho Sg=k$ とすると

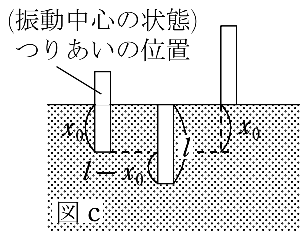
$$ma=-kX$$

これは，浮きが復元力 $-kX$ によって単振動することを示す。振動の中心は，$X=0$ の点 O′，つまり $x=x_0$ のつりあいの位置で，ここを中心として上下に振動をする。

$a=-\dfrac{\rho Sg}{m}X$ と，角振動数を ω として $a=-\omega^2X$ と比べて $\omega=\sqrt{\dfrac{\rho Sg}{m}}$

よって，求める周期 T は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho Sg}}$

(4) 図 c より，浮きをその上面が水面と等しくなるまで引いて離したときの単振動の振幅は $l-x_0$ である。



これより

$$l-x_0<x_0$$

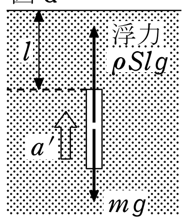
であれば，浮きは水面から飛び出ない。これと①式より

$$x_0=\frac{m}{\rho S}>\frac{1}{2}l \qquad これより，m>\frac{\rho Sl}{2}$$

よって $m_2=\dfrac{\rho Sl}{2}$

(5) 水中で浮きにはたらく力は，一定の浮力 ρSlg (上向き) と重力 mg (下向き) である。また $m<m_1$ より，浮力と重力の合力は上向きに一定の力になるので，浮きは**等加速度直線運動**である。

図 d



(6) 浮きの加速度 (上向き) を a' とし，運動方程式を立てると

$ma'=\rho Slg-mg$

よって $a'=\left(\dfrac{\rho Sl}{m}-1\right)g$

求める速さを v_0 とすると，等加速度直線運動の公式※B← より

$v_0{}^2-0^2=2a'l$

よって $v_0=\sqrt{2a'l}=\sqrt{2\left(\dfrac{\rho Sl}{m}-1\right)gl}$ ……②

(7) 浮きの下面が水面と一致したときの浮きの速さを v_1 とする。浮きの上面が水面に達したときと下面が水面に達したときに力学的エネルギー保存の法則を用いると

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}\rho Sg(l-x_0)^2=\frac{1}{2}mv_1{}^2+\frac{1}{2}\rho Sgx_0{}^2 \text{※C←}$$

$$v_1{}^2=v_0{}^2+\frac{\rho Sg}{m}\left\{(l-x_0)^2-x_0{}^2\right\}$$

$v_1{}^2\leqq0$ であれば浮きは水面から飛び出さない。v_0 に②式，x_0 に①式を代入して

$$v_1{}^2=2\left(\frac{\rho Sl}{m}-1\right)gl+\frac{\rho Sg}{m}\left(l^2-2l\cdot\frac{m}{\rho S}\right)\leqq 0$$

これを解いて

$$m\geqq\frac{3}{4}\rho Sl\qquad よって\quad m_2{}'=\frac{3}{4}\boldsymbol{\rho Sl}$$ ※D←

←※A　浮き全体を沈めたときの浮力 ρSlg が，浮きの重さ mg より大きければ沈まない。　$mg\leqq\rho Slg$

$m\leqq\rho Sl$

よって　$m_1=\boldsymbol{\rho Sl}$

←※B　等加速度直線運動の公式

$v^2-v_0{}^2=2ax$

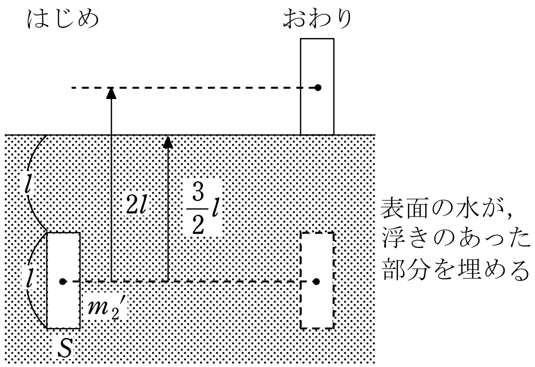
←※C　$ma=-Kx=-\rho Sgx$　より　$K=\rho Sg$

←※D 別解　浮きと水とのエネルギー保存を考えると

水＋うき＝水＋うき

$$\rho\cdot Slg\times\frac{3}{2}l+0=0+m_2{}'g\cdot 2l$$

よって　$m_2{}'=\dfrac{3}{4}\boldsymbol{\rho Sl}$



3

解答　〔A〕(1)　$ma=-mg\sin\theta$　　(2)　$2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

〔B〕(3)　$2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta_0}{g}}$　　(4)　$k\varDelta L$　　(5)　$m(L+\varDelta L)\sin\theta_1\cdot\omega^2-S\sin\theta_1=0$

(6)　$\dfrac{mgL}{kL\cos\theta_0-mg}$

〔C〕(7)　$2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta_2}{g-A}}$　　(8)　$\sqrt{\dfrac{(g-A)L}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2$　　(9)　$\sqrt{\dfrac{2H}{g-A}}$

(10)　$\sqrt{\dfrac{2HL}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2$

〔A〕(1)　小球にはたらく力は図 a のように，大きさ mg の重力と糸の張力である。円弧にそった向きの力の成分の大きさは $mg\sin\theta$ のみだから，運動方程式「$ma=F$」は，符号に注意して　$\boldsymbol{ma=-mg\sin\theta}$

(2)　振幅がきわめて小さいときは，円弧にそった向きは水平方向とみなせる。水平方向の変位を x とし，

$\sin\theta\fallingdotseq\dfrac{x}{L}$ と近似して

$$ma=-mg\frac{x}{L}$$

となる。単振動の加速度の式「$a=-\omega^2x$」より，角振動数は　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{L}}$

周期の式「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より　$T=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}}$

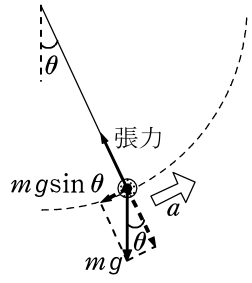


図 a

〔B〕(3)　小球にはたらく力は図 b の通り。この 2 力の合力が等速円運動の向心力となる。糸の張力の大きさを S_B とすると，鉛直方向の力のつりあいの式は

$S_B\cos\theta_0-mg=0$　　よって　$S_B=\dfrac{mg}{\cos\theta_0}$

合力は糸の張力の水平成分となり

$S_B\sin\theta_0=mg\tan\theta_0$

等速円運動の加速度の式「$a=r\omega^2$」より，運動方程式「$ma=F$」は，角速度を ω として

$mL\sin\theta_0\cdot\omega^2=mg\tan\theta_0$

ゆえに　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{L\cos\theta_0}}$　　……①

周期は　$T_0=\dfrac{2\pi}{\omega}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta_0}{g}}}$

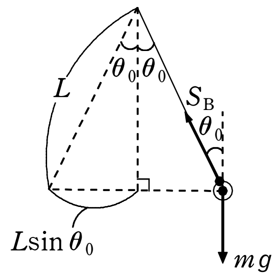


図 b

(4)　フックの法則「$F=kx$」より

$$S=k\Delta L$$

(5)　遠心力の大きさは，等速円運動の加速度の式「$a=r\omega^2$」より，$m(L+\Delta L)\sin\theta_1\cdot\omega^2$

図 c より，力のつりあいの式は

$$m(L+\Delta L)\sin\theta_1\cdot\omega^2-S\sin\theta_1=0$$

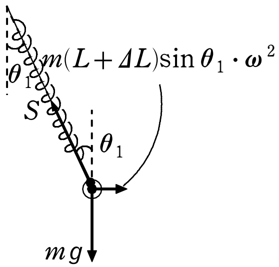


図 c

(6)　(4)，(5) より

$$m(L+\Delta L)\sin\theta_1\cdot\omega^2-k\Delta L\sin\theta_1=0$$

ω は ① 式と等しいので

$$m(L+\Delta L)\frac{g}{L\cos\theta_0}-k\Delta L=0$$

整理して　$\left(k-\dfrac{mg}{L\cos\theta_0}\right)\Delta L=\dfrac{mg}{\cos\theta_0}$

よって　$\Delta L=\dfrac{mgL}{kL\cos\theta_0-mg}$

〔C〕(7)　小球とともに運動する人から見ると，小球にはたらく力は，大きさ $mL\sin\theta_2\cdot\omega_1{}^2$ (ω_1 は角速度) の遠心力と大きさ mA の慣性力を加え，図 d のようになる。糸の張力の大きさを S_C とすると，水平，鉛直方向の力のつりあいはそれぞれ

$$mL\sin\theta_2\cdot\omega_1{}^2-S_C\sin\theta_2=0 \quad\cdots\cdots ②$$

$$S_C\cos\theta_2+mA-mg=0$$

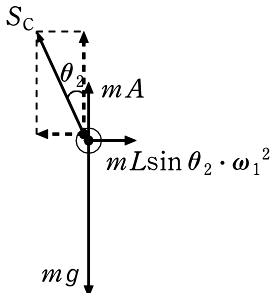


図 d

よって　$S_C=\dfrac{m(g-A)}{\cos\theta_2}$

② 式に代入して　$mL\omega_1{}^2=\dfrac{m(g-A)}{\cos\theta_2}$

ゆえに　$\omega_1=\sqrt{\dfrac{g-A}{L\cos\theta_2}}$

周期の式「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より　$T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta_2}{g-A}}$

(8)　等速円運動のときの速さに等しい。円運動の速さの式「$v=r\omega$」より

$$L\sin\theta_2\cdot\omega_1=L\sin\theta_2\sqrt{\frac{g-A}{L\cos\theta_2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(g-A)L}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2$$

(9)　落下している小球にはたらく力は図 e の通り。加速度を α' とすると，運動方程式「$ma=F$」は

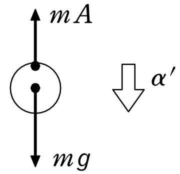


図 e

$$m\alpha'=mg-mA$$

よって

$$\alpha'=g-A$$

求める時間を t とすると，等加速度直線運動の式「$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$」より

$$H=\frac{1}{2}(g-A)t^2\quad ゆえに\quad t=\sqrt{\frac{2H}{g-A}}$$

(10)　水平方向は等速直線運動なので，「$x=vt$」より

$$\sqrt{\frac{(g-A)L}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2\times\sqrt{\frac{2H}{g-A}}=\sqrt{\frac{2HL}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2$$