

1

解説

$$(1) \quad \overrightarrow{DA} = (2-x, -y, -z), \quad \overrightarrow{DB} = (1-x, 1-y, -z), \quad \overrightarrow{DC} = (1-x, -y, 1-z)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} &= (2-x) \times (1-x) + (-y) \times (1-y) + (-z) \times (-z) \\ &= x^2 - 3x + 2 + y^2 - y + z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} &= (1-x) \times (1-x) + (1-y) \times (-y) + (-z) \times (1-z) \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - y + z^2 - z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} &= (1-x) \times (2-x) + (-y) \times (-y) + (1-z) \times (-z) \\ &= x^2 - 3x + 2 + y^2 + z^2 - z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} &= (x^2 - 3x + 2 + y^2 - y + z^2) - (x^2 - 2x + 1 + y^2 - y + z^2 - z) \\ &= -x + z + 1 \quad \dots\dots ① \quad (\text{ア ㊸}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} &= (x^2 - 2x + 1 + y^2 - y + z^2 - z) - (x^2 - 3x + 2 + y^2 + z^2 - z) \\ &= x - y - 1 \quad \dots\dots ② \quad (\text{イ ㊸}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad AB = \sqrt{(1-2)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(1-2)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$CA = \sqrt{(2-1)^2 + (0-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

よって、 $AB=BC=CA=\sqrt{2}$ であるから、三角形 ABC は正三角形である。

4 点 A, B, C, D が、正四面体の 4 つの頂点であるから、 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ の大きさは、いずれも $\sqrt{2}$ であり、どの 2 つのベクトルのなす角も 60° である。

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos 60^\circ = 1$$

$$\text{このことと ①, ② より} \quad -x + z + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0$$

$$\text{よって} \quad z = x - 1, \quad y = x - 1$$

$$|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{2} \text{ より } |\overrightarrow{DA}|^2 = 2 \text{ であるから} \quad (2-x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2 = 2$$

$$z = x - 1, \quad y = x - 1 \text{ を代入すると} \quad (2-x)^2 + \{-(x-1)\}^2 + \{-(x-1)\}^2 = 2$$

$$\text{よって} \quad 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad (x-2)(3x-2) = 0$$

$$x > 1 \text{ であるから} \quad x = 2$$

$$z = x - 1, \quad y = x - 1 \text{ より} \quad y = 1, \quad z = 1$$

(このとき、 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 1$, $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{2}$ を満たす)

$$\text{したがって} \quad (x, y, z) = (2, 1, 1)$$

$$(3) \quad \text{線分 AB の中点 P の座標は} \quad \left(\frac{2+1}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2} \right)$$

$$\text{よって} \quad P \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$\text{線分 DA を } 1:2 \text{ に内分する点 Q の座標は} \quad \left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 2}{1+2}, \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1+2}, \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1+2} \right)$$

$$\text{よって} \quad Q \left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

線分 DC を $t:(1-t)$ に内分する点 R の座標は

$$((1-t) \cdot 2 + t \cdot 1, (1-t) \cdot 1 + t \cdot 0, (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1)$$

$$\text{よって} \quad R(2-t, 1-t, 1)$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{PQ} = \left(2 - \frac{3}{2}, \frac{2}{3} - \frac{1}{2}, \frac{2}{3} - 0 \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\overrightarrow{PR} = \left(2 - t - \frac{3}{2}, 1 - t - \frac{1}{2}, 1 - 0 \right) = \left(\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} - t, 1 \right)$$

$$\text{よって} \quad |\overrightarrow{PQ}|^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{6} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2 = \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 + 1 = 2t^2 - 2t + \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad 4S^2 &= |\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 \sin^2 \theta = |\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - |\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - |\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 \cdot \left(\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|} \right)^2 \\ &= |\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2 \end{aligned}$$

$$\text{ここで} \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - t \right) + \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2} - t \right) + \frac{2}{3} \times 1 = 1 - \frac{2}{3}t$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 4S^2 &= \frac{13}{18} \left(2t^2 - 2t + \frac{3}{2} \right) - \left(1 - \frac{2}{3}t \right)^2 \\ &= \frac{13}{9}t^2 - \frac{13}{9}t + \frac{13}{12} - \left(1 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9}t^2 \right) \\ &= t^2 - \frac{1}{9}t + \frac{1}{12} = \left(t - \frac{1}{18} \right)^2 + \frac{13}{162} \end{aligned}$$

したがって、 $4S^2$ は $t = \frac{1}{18}$ のとき最小となる。

$S > 0$ であるから、 S は $t = \frac{1}{18}$ のとき最小となる。

2

解説

(1) $y=x^2$ から $y'=2x$

C 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=2tx-t^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

これが ℓ と平行になるとき $2t=a$ よって $t=\frac{a}{2}$

これを $\textcircled{1}$ に代入して、 m の方程式は $y=ax-\frac{a^2}{4}$

(2) m の方程式を変形すると $ax-y-\frac{a^2}{4}=0$

よって、原点 O と m の距離は

$$\frac{\left| -\frac{a^2}{4} \right|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \frac{a^2}{4\sqrt{a^2+1}}$$

(3) ℓ と C の交点の x 座標は、 $x^2=ax$ を解いて

$$x=0, a$$

よって、 O 以外の交点 P の座標は (a, a^2) であり

$$OP=\sqrt{a^2+(a^2)^2}=a\sqrt{a^2+1}$$

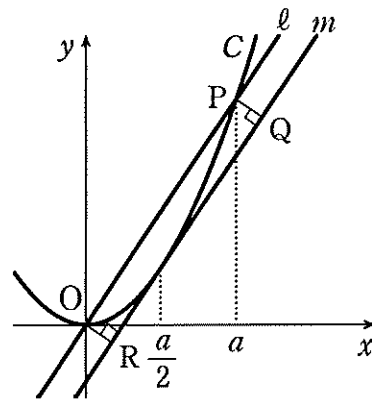
また、(2) から $OR=\frac{a^2}{4\sqrt{a^2+1}}$

ゆえに、長方形 $OPQR$ の面積を S とすると

$$S=OP \cdot OR=a\sqrt{a^2+1} \cdot \frac{a^2}{4\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^3}{4}$$

$S=2$ とすると $\frac{a^3}{4}=2$ すなわち $a^3=8$

$a>0$ であるから $a=2$



$$y-(t_1^3-3at_1^2)=(3t_1^2-6at_1)(x-t_1)$$

すなわち $y=(3t_1^2-6at_1)x-2t_1^3+3at_1^2$

これと C の方程式から y を消去して

$$x^3-3ax^2=(3t_1^2-6at_1)x-2t_1^3+3at_1^2$$

変形して $(x-t_1)^2(x+2t_1-3a)=0$

$x \neq t_1$ とすると $x=-2t_1+3a$ よって $t_2=-2t_1+3a$

別解 C 上の点 $P_1(t_1, f(t_1))$ における接線は x 軸に垂直でないから、その方程式は

$$y=mx+n$$

これと C の方程式から y を消去して整理すると

$$x^3-3ax^2-mx-n=0$$

この3次方程式の解が t_1, t_2 (t_1 は2重解) であるから、解と係数の関係により

$$t_1+t_1+t_2=3a \quad \text{よって} \quad t_2=-2t_1+3a$$

(3) $P_n(t_n, f(t_n))$ とすると、(2) と同様にして

$$t_{n+1}=-2t_n+3a \quad \text{よって} \quad t_{n+1}-a=-2t_n+2a$$

(1) の結果により $t_n=(t_1-a) \cdot (-2)^{n-1}+a$

ここで、異なる自然数 i, j に対して、 $t_i=t_j$ であると仮定すると

$$(t_1-a) \cdot (-2)^{i-1}+a=(t_1-a) \cdot (-2)^{j-1}+a$$

$t_1 \neq a$ であるから $(-2)^{i-1}=(-2)^{j-1}$

よって $i=j$ これは $i \neq j$ に矛盾する。

したがって、 $t_1, t_2, t_3, \dots$ はすべて相異なるから、 $P_1, P_2, P_3, \dots$ もすべて相異なる。

3

解説

(1) 漸化式を変形すると $x_{n+1}-a=-2(x_n-a)$

よって、数列 $\{x_n-a\}$ は初項 x_1-a 、公比 -2 の等比数列であるから

$$x_n-a=(x_1-a) \cdot (-2)^{n-1}$$

したがって $x_n=(x_1-a) \cdot (-2)^{n-1}+a$

(2) $f(x)=x^3-3ax^2$ から $f'(x)=3x^2-6ax$

よって、 C 上の点 $P_1(t_1, f(t_1))$ における接線の方程式は