1

(解説)

(1)　点Pは ℓ 上にあり，点Qは z 軸上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 1,\ 0)+p(-1,\ -1,\ 0)$$
$$=(-p,\ 1-p,\ 0)\ (p\text{ は実数})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q(0,\ 0,\ 1)$$
$$=(0,\ 0,\ q)\ (q\text{ は実数})$$

と表される。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(p,\ p-1,\ q)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k(3,\ 1,\ -1)$$

となる実数 k が存在することである。

すなわち　$(p,\ p-1,\ q)=(3k,\ k,\ -k)$

よって　$p=3k$　……①

$p-1=k$　……②

$q=-k$　……③

①−②から　$1=2k$　　よって　$k=\frac{1}{2}$

これを①，③にそれぞれ代入して　$p=\frac{3}{2}$，$q=-\frac{1}{2}$

よって　Pの座標は $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，Qの座標は $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$

(2)　点Rは ℓ 上にあり，点Sは z 軸上にあるから，(1)と同様に考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-r,\ 1-r,\ 0)\ (r\text{ は実数})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(0,\ 0,\ s)\ (s\text{ は実数})$$

と表される。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(r,\ r-1,\ s)$$

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ 0)$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\quad\text{かつ}\quad\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot(0,\ 0,\ 1)=0$$

すなわち

$$-r-r+1=0\quad\text{かつ}\quad s=0$$

よって　$r=\frac{1}{2}$，$s=0$

ゆえに　Rの座標は $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，Sの座標は $(0,\ 0,\ 0)$

(3)　点Tは ℓ 上にあり，点Uは z 軸上にあるから，(1)と同様に考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(-t,\ 1-t,\ 0)\ (t\text{ は実数})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=(0,\ 0,\ u)\ (u\text{ は実数})$$

と表される。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=(t,\ t-1,\ u)$$

$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ と平行になるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=m\vec{v}$$

となる実数 m が存在することである。

すなわち　$(t,\ t-1,\ u)=m(a,\ b,\ c)$

よって　$t=ma$　……①

$t-1=mb$　……②

$u=mc$　……③

また，(2)で求めたR，Sについて

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

$\vec{v}$ は $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないから

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}\neq 0\quad\text{すなわち}\quad\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\neq 0$$

よって　$a-b\neq 0$

①−②から　$1=m(a-b)$

$a-b\neq 0$ であるから　$m=\frac{1}{a-b}$

これを①，③にそれぞれ代入して　$t=\frac{a}{a-b}$，$u=\frac{c}{a-b}$

よって　Tの座標は $\left(-\frac{a}{a-b},\ -\frac{b}{a-b},\ 0\right)$，Uの座標は $\left(0,\ 0,\ \frac{c}{a-b}\right)$

2

(解説)

(1)　△ABCは辺ABを斜辺とする直角三角形であるから，CA⊥CBより

$$\frac{a^2-c^2}{a-c}\cdot\frac{b^2-c^2}{b-c}=-1$$

$$(a+c)(b+c)=-1$$

したがって　$a=-c-\dfrac{1}{b+c}$

(2)　(1)より　$b-a=b-\left(-c-\dfrac{1}{b+c}\right)=(b+c)+\dfrac{1}{b+c}$　……①

$a<b$ より $b-a>0$ であるから，①は正である。

したがって　$b+c>0$

よって，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$(b+c)+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}}=2$$

したがって①から　$b-a\geqq 2$

(3)　$\mathrm{AB}^2=(b-a)^2+(b^2-a^2)^2$

$$=(b-a)^2+(b-a)^2(b+a)^2=(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}$$

ここで，(2)より　$(b-a)^2\geqq 4$　……②

また，a，b は実数であるから　$1+(b+a)^2\geqq 1$　……③

したがって　$\mathrm{AB}^2\geqq 4$　すなわち　$\mathrm{AB}\geqq 2$　……④

④の等号が成り立つのは，②と③の等号が同時に成り立つときである。

したがって，$b-a=2$ かつ $b+a=0$ のとき，すなわち $a=-1$，$b=1$ のとき④の等号が成り立つ。

$a=-1$，$b=1$ のとき，(1)より $c=0$ であるから

ABは，A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ 1)$，C$(0,\ 0)$ のとき最小値2をとる。

3

(解説)

(1)　r_1，r_2 の値の組と，それに対する $R=|r_1-r_2|$ の値を表にすると右のようになる。

r_1 \ r_2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

よって，R がとりうる値は　0，1，2，3，4，5

また

$$P(R=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\quad P(R=1)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

$$P(R=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9},\quad P(R=3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(R=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\quad P(R=5)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

(2)　$R\geqq 4$ となる確率は　$\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{6}$

G がとりうる値，B がとりうる値はともに，R がとりうる値と同じであり，確率も同じである。

$G\geqq 4$ となる確率，$B\geqq 4$ となる確率はともに $\dfrac{1}{6}$ である。

ゆえに，求める確率は　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{1}{216}$

(3)　$RGB\geqq 80$ となるときの R，G，B の値の組は

(4，4，5)，(4，5，5)，(5，5，5)

ゆえに，求める確率は

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{18}\times 3+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{18}\times 3+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{18}=\frac{19}{5832}$$

別解　(2)で求めた確率から，$(R,\ G,\ B)=(4,\ 4,\ 4)$ となる確率を引いて

$$\frac{1}{216}-\left(\frac{1}{9}\right)^3=\frac{19}{5832}$$